APPUNTI DI MECCANICA RAZIONALE

0. Introduzione

Questi appunti sono una via di mezzo tra delle dispense ed una lettura guidata alla bibliografia. I testi di Meccanica Razionale, che sono indicati alla fine di questo paragrafo, sono svariati. Ognuno di loro può essere migliore degli altri per uno o più argomenti.

Ovviamente utilizzare molti testi può generare confusione oltre ad essere praticamente difficile.

Quindi ho scelto due testi di riferimento: il Goldstein e l'Arnold.

Per quanto riguarda gli esercizi la situazione non è così rosea. Esiste un testo di A. Celletti , dei testi più classici e poi esistono delle raccolte di esercizi che potete trovare alla pagina web di D. Benedetto [11]

Questi appunti sono strutturati nel seguente modo. In ogni sezione si considera un particolare argomento del corso e si descrive succintamente dove lo si può studiare. Se è il caso si commentano i diversi approcci seguiti dai testi nel descrivere l'argomento in questione.

Infine, se conveniente, l'argomento viene trattato direttamente.

Bibliografia

1. H. Goldstein, *Meccanica Classica*, Zanichelli.
2. V. I. Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti.
3. V.I. Arnold, *Equazioni differenziali ordinarie*, Editori Riuniti.
4. E. Olivieri, *Appunti di Meccanica Razionale*, Aracne.
5. F. R. Gantmacher, *Lezioni di Meccanica Analitica.*
6. L. D. Landau, E.M. Lisfitz, *Meccanica*, Editori Riuniti.

7. R. Esposito, *Appunti dalle lezioni di meccanica razionale*, Aracne.
8. A. Fasano, S. Marmi, *Meccanica analitica: con elementi di meccanica statistica e dei continui*, Boringhieri.
9. G. Dell'Antonio, *Elementi di Meccanica* (Liguori).
10. A. Celletti, *Esercizi di Meccanica Razionale*, Aracne.
11. D. Benedetto ed altri, *Esercizi di Meccanica*, http://brazil.mat.uniroma1.it.
12. F. Bampi, M. Benati, A. Morro, *Problemi di Meccanica Razionale*, ECIG.

In questa parte del corso diamo i risultati matematici di base nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie. In particolare dimostriamo il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni di una ODE qundo il campo vettoriale è una funzione Lipschitz. ed il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali. Questo è un risultato matematico classico che però generalmente non si trova sui testi di Meccanica Razionale. Quindi riporto qui la dimostrazione.

Un altro risultato importante che vale per le ODE è la dipendenza continua dai valori iniziali. Più precisamente si può dimostrare, nelle ipotesi precedenti, che se il campo vettoriale è C^1 allora l'errore finale si può stimare con quello iniziale moltiplicato per $e^{\lambda t}$. L'esponente λ si può stimare dall'alto con la costante di Lipschitz del campo vettoriale.

Inoltre descriveremo il metodo di Eulero per la soluzione di un equazione differenziale ordinaria. Quest'ultimo non solo è utile perchè vi dice come simulare al calcolatore un equazione differenziale ma anche perchè permette di vedere le equazioni differenziali da un punto di vista molto concreto. Anche la dimostrazione del metodo di Eulero e le relative possibili rappresentazioni per la soluzione di una ODE le darò qui di seguito.

1.1 Alcuni risultati generali sulle ODE

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(t=0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

per $x \in \mathbb{R}^n$.

Supponiamo, per semplicità, che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia una funzione uniformemente

Lipschitz: cioè che esista $L > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \tag{1.2}$$

Teorema di esistenza ed unicità per ODE. *Se f soddisfa alla (1.2) allora l'equazione (1.1) ammette una unica soluzione.*

Dimostrazione Sia $T < \frac{1}{L}$. Consideriamo la famiglia di funzioni $x_0, x_1, x_2, \ldots$ definite sull'intervallo $[0, T]$ da

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(x_n(s))ds, \tag{1.3}$$

e dove $x_0(t)$ è definito uguale a x_0 per ogni t.

Possiamo dimostrare che se $TL < 1$ allora la sequenza di funzioni è convergente.

Per fare ciò dobbiamo utilizzare una norma sulle funzioni. Esse sono continue (si può banalmente verificare per induzione) e quindi definiamo

$$||x||_{[0,T]} = \max_{s \in [0,T]} |x(s)|.$$

Valutiamo quindi $||x_{n+1} - x_n||$. Troviamo

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = x_0 + \int_0^t f(x_n(s))ds - x_0 - \int_0^t f(x_{n-1})(s)ds$$

eliminando il dato iniziale, raggruppando l'integrale e portando il modulo dentro, troviamo

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \int_0^t |f(x_n(s)) - f(x_{n-1}(s))|$$

Dalla Lipschitzianità di f troviamo $|f(x_n(s)) - f(x_{n-1}(s))| \leq L|x_n(s) - x_{n-1}(s)|$, quindi sostituendo nella (1.3) e maggiorando l'integrale con il massimo delll'integrando moltiplicato per la lunghezza dell'intervallo troviamo:

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq L\, t \max_{s \in [0,T]} |x_n(s) - x_{n-1}(s)|$$

Il caso peggiore si ottiene per $t = T$ e quindi troviamo

$$||x_{n+1} - x_n||_{[0,T]} \leq LT||x_n - x_{n-1}||_{[0,T]}$$

Dato che $LT < 1$ la successione tende a 0 esponenzialmente, quindi è di Cauchy e quindi converge:

$$x_n \to_{n\to\infty} x$$

Rimane quindi da verificare che x risolve l'equazione. Per ottenere ciò, prima di tutto, prendiamo il limite per $n \to \infty$ di entrambi i membri della (1.3) ottenendo

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds.$$

Poi notiamo che il membro destro è derivabile rispetto a t, infatti esso è l'integrale di una funzione continua.

Quindi deriviamo ed otteniamo che x risolve la (1.1).

Quindi abbiamo dimostrato che per $LT < 1$ abbiamo soluzione. Quindi per esempio possiamo arrivare fino al tempo $T = \frac{1}{2L}$. A questo punto la soluzione globale (per ogni tempo) si ottiene semplicemente riapplicando lo stesso argomento a partire da questo tempo. in altre parole: con l'argomento precedente abbiamo trovato la soluzione fino a T. A questo punto possiamo ripartire da T ed arrivare a $2T$, eccetera.

Dobbiamo ancora ottenere l'unicità. Per fare ciò consideriamo due soluzioni $x_1(t), x_2(t)$ della (1.1). Per ognuna di esse possiamo scrivere

$$x_i(t) = x_0 + \int_0^t f(x_i(s)ds, i = 1, 2$$

Sottraendo e procedendo analogamente a quanto fatto sopra troviamo:

$$||x_2 - x_1|| \leq LT||x_2 - x_1||$$

Essendo $LT < 1$, la disquazione precedente implica che

$$||x_2 - x_1|| = 0$$

Se poi è 0 fino a T sarà 0 fino a $2T$ eccetera. $\square$

Nota Abbiamo dimostrato che la soluzione esiste se la f è uniformemente Lipschitz. Ciò non è ovviamente necessario. Se per esempio la funzione è uniformemente Lipschitz in un insieme e non in tutto $\mathbb{R}^n$, alora il teorema varrà fino a quando la soluzione non esce da quell'insieme.

Esercizio 1.1 Si risolva l'equazione differenziale

$$\dot{x} = x^2$$

con dato iniziale $x = 1$.

Esercizio 1.2 Si trovino almeno due soluzioni diverse dell'equazione differenziale

$$\dot{x} = \sqrt{x}$$

per dato iniziale $x = 0$.

Vogliamo ora dimostrare che la soluzione di una equazione differenziale è continua nel dato iniziale. Più precisamente dimostreremo che è una funzione Lipschitziana del dato iniziale e che la costante di Lipshitz cresce al più come e^{Lt} dove L è la costante di Lipschitz del campo vettoriale.

In altre parole vogliamo sapere quanto si allontano nel tempo due traiettorie che partono vicine.

Anticipo qui il fatto che un sistema si dice caotico quando due triettorie si allontanano esponenzalmente mentre non lo è altrimenti. Qui otteniamo quindi in generale una stima dall'alto dell'allontanamento di due traiettorie che come tutte le stime generali è spesso molto pessimista.

Prima di dimostrare ciò dimostriamo il Lemma di Gronwall il quale serve a dimostrare questo e molti altri teoremi.

Lemma di Gronwall. *Supponiamo che $x(t)$ soddisfi alla disequazione integrale*

$$x(t) \leq x_0 + a \int_0^t x(s)ds$$

dove $a > 0$ e $x_0 > 0$.

Allora

$$x(t) \leq x_0 e^{at}$$

In altre parole la soluzione della disequazione differenziale qui sopra è sempre minore della soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = ax$ con dato iniziale x_0.

Dimostrazione.

Studiamo $y(t) = e^{-at}x(t)$. Vogliamo dimostrare quindi che $y(t) \leq x_0$ per ogni t.

Usando l'ipotesi troviamo

$$y(t) \leq x_0 e^{-at} + ae^{-at} \int_0^t e^{as} y(s)ds$$

Sia M il massimo in $[0, t]$ di y, e supponiamo per assurdo che sia $M > x_0$, allora sostituendo nella formula precedente troviamo

$$y(t) \leq e^{-at}|x_0| + ae^{-at} \int_0^t e^{as} M = |x_0|e^{-at} + M(1 - e^{-at})$$

Notando che il membro destro è crescente in t troviamo

$$M \leq e^{-at}|x_0| + a + e^{-at} \int_0^t e^{-Ls} M = |x_0|e^{-at} + M(1 - e^{-at})$$

Cioè

$$M \leq x_0 e^{-at}$$

come volevamo. □

Teorema (dipendenza continua dal dato iniziale). *Si considerino le soluzioni dell'equazione (1.1) con dati iniziali x_1 ed x_2. Supponiamo che f verifichi la (1.2). Allora*

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq e^{Lt}|x_2 - x_1|$$

Dimostrazione.

Utilizziamo la rappresentazione integrale per le due soluzioni $x_1(t)$ ed $x_2(t)$:

$$x_1(t) = x_1 + \int_0^t f(x_1(s))ds$$
$$x_2(t) = x_1 + \int_0^t f(x_2(s))ds$$

Sottraendo troviamo

$$x_1(t) - x_2(t) = x_1 - x_2 + \int_0^t (f(x_1(s)) - f(x_2(s))\, ds$$

Usando il fatto che la somma dei moduli è maggiore del modulo della somma, che l'integrale del modulo è maggiore del modulo dell'integrale e la Lipschitzianità di f troviamo

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1 - x_2| + L\int_0^t |x_1(s) - x_2(s)|ds$$

Possiamo notare che se definiamo $y = |x_1 - x_2|$ allora y soddisfa alle ipotesi del lemma di Gronwall con dato iniziale $|x_1 - x_2|$ ed $a = L$.

Quindi il teorema è dimostrato

Nota.

Supponiamo che f sia C^∞. La serie di Taylor per la soluzione della (1.1) si può ottenere mediante semplici operazioni algebriche.

Per esempio

$$x(t) = x_0 + f(x_0)t + (f'(x_0) \cdot \dot{x})\frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

Se invece f è $C^k, k \geq 1$, allora la soluzione dell'equazione differenziale è C^{k+1}, e il suo sviluppo di Taylor (fino all' 'ordine $k+1$) si può calcolare analogamente.

1.2 Metodo di Eulero per la soluzione numerica di una ODE

In questo paragrafo illustro il metodo di Eulero per la soluzione numerica di una ODE.

Esso è molto semplice. Si sceglie un Δt (passo temporale) molto "piccolo" e si calcola l'evouzione temporale semplicemente dicendo che

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

$$x_0 = x_0$$

Ovviamente questo sistema dinamico è discreto, cioè x_n è definito per i valori di $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, che corrispondono ai tempi $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots$.

Per ragioni che saranno, spero, evidenti nel seguito estendiamo a tutti i tempi (non solo quelli multipli interi di Δt) la x.

L'estensione la facciamo molto semplicemente: se $t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ allora interpoliamo linearmente x(t). nell'intervallo $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]]$ tra x_n ed x_{n+1}.

Più precisamente :
dato t sia $n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]$, dove con [ ] indichiamo la parte intera. Siano poi $a = t - n\Delta t$, $b = (n+1)\Delta t - t$, dove ovviamente $a + b = \Delta t$.

Allora definiamo

$$X_{\Delta t}(t) = \frac{bx_n + ax_{n+1}}{a+b}$$

Possiamo dimostrare il seguente teorema.

Metodo di Eulero. *Sia f uniformemente Lipschitziana con costante di Lipschitz L e tale che per ogni x*

$$|f(x)| \leq M$$

Allora

$$|X_{\Delta t}(t) - x(t)| \leq M\left(e^{Lt} - 1\right)\Delta t$$

Dimostrazione.

Vogliamo confrontare l'equazione integrale per $x(t)$ con qualcosa di analogo per $X_{\Delta t}(t)$. Quindi prima di tutto calcoliamo $\dot{X}_{\Delta t}$. Troviamo

$$\dot{X}_{\Delta t}(t) = f(x_n) = f(X_{\Delta t}(n\Delta t))$$

dove n è il più grande intero tale che $n\Delta t \leq t$.

Dato che $|f| \leq M$ troviamo $X_{\Delta t}(t) - X_{\Delta t}(n\Delta t) \leq M\Delta t$ e quindi, usando la Lipschitzianità di f

$$f(X_{\Delta t}(t) - f(X_{\Delta t}(n\Delta t)) \equiv R(t)$$

dove

$$|R(t)| \leq LM\Delta t \tag{1.4}$$

Possiamo quindi scrivere

$$X_{\Delta t}(t) = x_0 + \int_0^t \left(f(X_{\Delta t}(s)) + R(s)\right) ds \tag{1.5}$$

Sottraendo alla (1.5) l'equazione integrale (1.3) per la $x(t)$ troviamo

$$X_{\Delta t}(t) - x(t) = \int_0^t \left(f(X_{\Delta t}(s)) - f(x(s)) + R(s)\right) ds$$

Mettendo i moduli, utilizzando la Lipschitzianità di f ed usando la (1.4) troviamo

$$|X_{\Delta t}(t) - x(t)| \leq \int_0^t \left(L|X_{\Delta t}(t) - x(t)| + LM\Delta t\right)$$

Se adesso definiamo $y(t) \equiv |X_{\Delta t}(t) - x(t)| + M\Delta t$ possiamo riscrivere l'equazione precedente come

$$y(t) \leq y_0 + L \int_0^t y(s)ds$$

dove

$$y_0 = M\Delta t$$

Quindi applicando il Lemma di Gronwall troviamo

$$y(t) \leq M\Delta t e^{Lt}$$

e quindi

$$|X_{\Delta_t} - x(t)| \leq M\left(e^{Lt} - 1\right)\Delta t$$

□

1.3 Trasporto di un insieme

Finiamo questo capitolo sulle equazioni differenziali ordinarie considerando l'evoluzione di un insieme di punti sotto l'azione dell'equazione differenziale. In particolare faremo vedere che se la divergenza del campo vettoriale è nulla allora il volume di un insieme trasportato dal flusso si conserva.

Per fare ciò conviene introdurre la seguente notazione.

Indichiamo con $\Phi_t(x)$ l'evoluto al tempo t del punto x. Cioè

$$\dot{\Phi}_t(x) = f(\Phi(x)),$$
$$\Phi_0(x) = x$$

Possiamo quindi definire l'evoluto di un insieme come

$$\Lambda_t = \{y : y = \Phi_t(x), x \in \Lambda\}$$

Su alcuni testi troverete la comoda notazione $\Lambda_t = \Phi_t(\Lambda)$.

Vogliamo calcolare come evolve il volume di Λ_t.

In questa sezione supporremo che f sia C^1 e che Λ sia un insieme regolare.

Per definizione

$$|\Lambda_t| = \int_{\Lambda_t} dx = \int_{\Lambda} |\frac{\partial \Phi_t}{\partial x}| dx$$

Quindi ci interessa calcolare il determinante Jacobiano della trasformazione che è appunto $J = |\frac{\partial \Phi_t}{\partial x}|$.

Faremo vedere che la derivata di J è nulla. Calcoliamola per $t = 0$.

Sviluppando al primo ordine la soluzione dell'equazione differenziale troviamo

$$\Phi_t(x) = x + tf(x) + O(t^2)$$

Quindi

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial x} = 1 + tf(x) + O(t^2)$$

A questo punto utilizziamo il seguente lemma:

Lemma. *Sia A una matrice $n \times n$. Allora*

$$Det(1 + \epsilon A) = 1 + \epsilon Tr(A) + O(\epsilon^2)$$

dove con $DetA$ indichiamo il determinante di A e con TrA la traccia della matrice A. Quindi nel nostro caso troviamo

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t = 0) = TrA = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i = div f.$$

Quindi se fosse $div f(x) = 0$ per ogni x, avremmo che al tempo 0 la derivata del determinante Jacobiano è 0. Il discorso, ovviamente si generalizza a qualunque t.

Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema.

Conservazione del Volume. *Se* $div f(x) = 0$ *per ogni* x, *allora per ogni* t *e per ogni* $\Lambda \in \mathbb{R}^n$ *troviamo*

$$|\Lambda_t = \Lambda_0.$$

2. ODE IN R^2

Una generica equazione differenziale ordinaria in due variabili non é risolubile esplicitamente se non cè un integrale primo per essa. Il fatto che questi sistemi siano definiti sul piano ed il teorema di esistenza ed unicità ci assicurano alcune proprietà dei moti che rendono possibile l'analisi qualitativa per questi sistemi.

L'idea di base è che due traiettorie diverse non si possono intersecare. A causa di ciò, per esempio, se esiste un insieme invariante allora esiste un punto fisso o un ciclo limite.

Notiamo infine che un sistema di equazione differenziali ordinarie può essere "caotico" solo da tre variabili in su. Essenzialmente questo fatto è dovuto al fatto che per i sistemi in $\mathbb{R}^2$ è possibile fare l'analisi qualitativa.

La maggior parte di ciò che segue è dovuto all'opera di Poincarè.

Questo argomento è sviluppato in grande dettaglio sul Dell'Antonio. Qui considereremo solo alcuni aspetti della teoria.

Prima di tutto introduciamo il concetto di $\omega - limite$.

$\omega - limite$. *Data in* $\mathbb{R}^n$ *l'equazione differenziale*

$$\dot{x} = f(x)$$

definiamo $\omega limite$ *del punto* x *l'insieme dei punti di accumulazione di* $\Phi_t(x)$ *per* $t \to +\infty$.

Si può anche definire, anche se non lo useremo qui, l' $\alpha - limite$. La definizione è la stessa a parte il fatto che si considera il limite per $t \to -\infty$.

Esercizio.

Trovare l' $\Omega - limite$ per l'equazione differenziale

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = x - x^3$$

in funzione dei dati iniziali x e v.

Un altra definizione importante è la seguente. La definizione si può fare in $\mathbb{R}^n$ per qualsiasi n. Dato che qui ci interessiamo esclusivamente di sistemi nel piano considereremo solo il caso $n = 2$.

Sezione locale. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, e sia x tale che $f(x) \neq 0$, allora la sezione locale di f in un punto x è un segmento aperto $S(x)$, contenente x, e contenuto nella retta passante per x ed ortogonale ad $f(x)$, tale che, per ogni $y \in S(y)$, $f(y) \cdot f(x) > 0$.*

La definizione è precisa ma forse poco chiara.

In altre parole: supponiamo che il punto x sia l'origine e che $f(0) = (0, 1)$. Allora il segmento $S(x)$ dovrà giacere sull'asse delle x, e contenere 0. Richiediamo inoltre che per tutti i punti del segmento la seconda componente di f non si annulli. Cioè che per tutti i punti di S l'evoluzione porti (localmente) dal semipiano delle ordinate negative a quelle delle ordinate positive.

Insieme Positivamente Invariante. *Λ è un insieme positivamente invariante per l'equazione differenziale*

$$\dot{x} = f(x)$$

se per ogni $x \in \Lambda$, si ha $\Phi_t(x) \in \Lambda$ per ogni $t > 0$. Φ_t è ovviamente il flusso definito dall'equazione differenziale.

Un insieme è quindi positivamente invariante se partendo da quell'insieme non si esce da esso.

Esistono vari modi di per determinare se un insieme è positivamente invariante. Per esempio l'interno di un orbita chiusa è, per il teorema di esistenza ed unicità, un insieme positivamente invariante.

Più in generale un insieme aperto la cui frontiera sia una curva regolare chiusa del piano tale che in ogni punto x della curva si abbia

$$f(x) \cdot n(x) \leq 0,$$

dove $n(x)$ è la normale esterna alla curva nel punto x è positivamente invariante.

Dimostrazione del teorema di Poincarè-Bendixon.

Supponiamo di avere un insieme invariante chiuso senza punti fissi. Consideriamo una traiettoria al suo interno. Questa per compattezza dovrà accumulare almeno in un punto. Supponiamo, senza perdita di generalità che questo punto sia l'origine e che sia $f(0) = (0, v)$ con $v > 0$. Consideriamo una sezione locale $S(0)$ di $f(x)$ in 0.

Siano

$$x_n = \Phi_{t_n}(x)$$

la sequenza delle successive intersezioni di $\Phi_t(x)$ con $S(0)$. Con successive intersezioni intendiamo $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ Prima di tutto dimostriamo che questa sequenza è ordinata. Cioè che x_n è sempre contenuto tra x_{n-1} ed x_{n+1}.

Si consideri infatti l'insieme D la cui frontiera è costituita dal segmento x_{n-1}, x_n e dal tratto di orbita che va da x_{n-1} ad x_n. L'esterno di questo insieme è positivamente invariante. Infatti sul segmento il campo vettoriale è entrante mentre sul tratto di orbita il campo è parallelo. Ciò vuol dire che se si esce da D non ci si può più rientrare.

Quindi se per assurdo fosse x_{n+1} contenuto nel segmento che va da x_{n-1} ad x_n avremmo che la traiettoria che al tempo t_n esce da D ad un tempo successivo ci rientra, ma questo è impossibile.

Il miglior modo di convincersi di ciò di provare il contrario con carta e penna. Si veda Figura 1.

Abbiamo quindi una serie di punti ordinata (monotona) e limitata sul segmento.

Quindi questa successione converge. Dato che per sottosequenze convergeva a 0 essa convergerà a 0.

Dobbiamo ora far vedere che la traiettoria converge all'orbita che parte da 0 e che quest'ultima è periodica.

Consideriamo quindi la traiettoria $\Phi_t(0)$. Sia y un suo punto di accumulazione, sia S una sezione locale di f in y.

Siano $y_1, y_2, \ldots$ la sequenza di successive intersezioni della traiettoria con S.

Faremo ora vedere che $y_1 = y_2 = y$ e che quindi $y_n = y$ per ogni n.

Ciò implicherà che la traiettoria è periodica. Infatti ciò vuol dire che esiste T

tale che che $\Phi_t(y_1) = y_2$ e cioè tale che $\Phi_T(y) = y$. Quindi la traiettoria è periodica di periodo T.

Dimostriamo che $y_1 = y_2$. Prima di tutto notiamo che y_1 ed y_2 sono dei punti di accumulazione di $\Phi_t(x)$. Infatti esistono τ_1 e τ_2 tali che

$$\Phi_{t_1}(0) = y_1$$
$$\Phi_{t_2}(0) = y_2$$

Dato che $\Phi_t(x)$ accumula in 0 allora esiste una sequenza di tempi crescenti t_k tale che $\Phi_{t_k}(x)$. Quindi per il teorema di dipendenza continua delle soluzione di una ODE dal dato iniziale sarà

$$\Phi_{t_k+\tau_1}(0) = y_1$$
$$\Phi_{t_k+\tau_2}(0) = y_2$$

Se quindi fosse $y_1 \neq y_2$ allora la sequenza di intersezioni di $\Phi_t(x)$ con S sarebbe non ordinata. Infatti non potrebbe esserlo dovendo convergere a due punti diversi. Vedi Figura 2. E ciò conclude la prova.

Per tutta questa sezione supporremo quindi che il campo vettoriale f che compare in $\dot{x} = f(x)$ sia almeno C^1.

Definizione: Equilibrio. *Si consideri l'equazione differenziale in* $\mathbb{R}^n$.

$$\dot{x} = f(x)$$

Il punto x *si dice di equilibrio se* $f(x) = 0$.

Ovviamente se il punto è di equilibrio allora la traiettoria che parte da x rimane in x a tutti i itempi.

Definizione: Stabilità. *Un punto* x *di equilibrio si dice stabile se, per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che, se* $|y - x| \leq \delta$, *allora, per ogni* t, *si ha* $|\Phi_t(y) - x| < \epsilon$.

In altre parole un punto di equilibrio si dice stabile se presa una palla qualsiasi intorno a questo punto esiste un'altra palla (non più grande della precedente ovviamente) tale che tutti i punti che partono dalla palla più piccola non escono da quella più grande a nessun tempo.

Definizione: Stabilità asintotica. *Un punto di equilibrio* x *si dice asintoticamente stabile se è stabile e se esiste esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni* $y \in B_\delta(x)$ $\lim_{t\to\infty} \Phi_t(y) = x$.

In altre parole un punto è asintocamente stabile se è stabile e se esiste una palla intorno ad esso per cui tutte le traiettorie che partono da questa palla asintoticamente finiscono nel punto.

Definizione: Instabilità. *Un punto di equiilibrio di dice instabile quando non è stabile.*

Esistono molti criteri per determinare se un punto è stabile o instabile.

Un primo criterio che è utile sia per i sistemi dissipativi che quello della stabilità del linearizzato.

Stabilità dallo studio del linearizzato. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale C^2. Consideriamo l'equazione differenziale*

$$\dot{x} = f(x)$$

Sia

$$f(x) = Ax + g(x)$$

dove A è un operatore lineare e dove $|g| \leq C|x|^2$.
Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa allora il punto di equilibrio è asintoticamente stabile. Se almeno un autovalore di A ha parte reale positiva il punto è instabile.

Per la dimostrazione si può vedere, per esempio, il Gantmacher.

Un altro criterio, utile anche per i sistemi conservativi e quindi per i sistemi meccanici è il seguente.

Teorema di Ljapunov. *Sia 0 un punto di equilibrio per l'equazione $\dot{x} = f(x)$.*

Supponiamo che esista una funzione $W \in C^1(\Lambda)$ con le seguenti proprietà.

i) W(0)=0

ii) Esiste un intorno Λ tale che $W(x) > 0$ per ogni $x \in \Lambda - \{0\}$.

iii) $\frac{d}{dt}W(x(t)) = \nabla W \cdot f \leq 0$, per ogni $x \in \Lambda$

Allora il punto di equilibrio è stabile.

Se vale anche

iii)' $\frac{dW}{dt} = \nabla W \cdot f < 0$, per ogni $x \in \Lambda - \{0\}$ allora il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.

Dimostrazione.

Iniziamo col dimostrare la stabilità. Fissato $\epsilon > 0$ sia m il minimo di W sul bordo della palla di raggio ϵ e centro l'origine (stiamo prendendo un ϵ abbastanza piccolo in modo che la palla di raggio ϵ e centro l'origine sia dentro Λ. Per ipotesi $m > 0$.

Usando la continuità di W in $x = 0$ ed il fatto che $W(0) = 0$, troviamo un δ_ϵ per cui

$$W(x) \leq \frac{m}{2} \, per \, ogni \, x \in B_{\delta_\epsilon}$$

Ora consideriamo una traiettoria che parta da $x \in B_{\delta_\epsilon}$.

Per costruzione $W(y) > 0$. Se, per assurdo, la traiettoria uscisse dalla palla di raggio ϵ essa passerebbe per un punto $y' \in \partial B_\epsilon$. Per costruzione $W(y') \geq m > \frac{m}{2}$. Ma ciò é assurdo in quanto lungo il moto W diminuisce.

La dimostrazione della stabilità asintotica è più complicata e per essa rimandiamo al Gantmacher. $\square$