Esercizi di Meccanica Razionale

AA 1999-2000, corsi Marchioro, Negrini, esercitatore D. Benedetto

2 ottobre 2000

Indice

I richiami alla bibliografia non sono ovviamente completi: non sono citati tutti i testi, né i testi in bibliografia sono citati tutte le volte che potrebbe essere utile. Me ne scuso con gli studenti e con gli autori.

Questa versione non è definitiva. Possono esserci errori, anche gravi. La versione più recente, e presumibilmente più corretta, è sul sito http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/meccanica

1 Ulteriori (Pochi) Esercizi in Formalismo Hamiltoniano

Esercizio 1.1 *Due aste omogenee di massa M e lunghezza L, una di estremi A e B e l'altra di estremi C e D, si muovono in un piano verticale. L'estremo B è incernierato, senza attrito, nel baricentro dell'asta CD. Una molla di costante elastica k lega A a C.*

1 *Determinare i gradi di libertà*

2 *Scrivere la Lagrangiana*

3 *Scrivere l'Hamiltoniana*

4 *Scrivere l'equazione di Hamilton Jacobi*

5 *Risolvere l'equazione di Hamilton Jacobi*

6 *Supponendo che inizialmente le aste sono ferme, con CD parallela all'asse delle x,, con l'ascissa di C minore dell'ascissa di D e con AC parallela all'asse delle y con l'ordinata di A maggiore dell'ordinata di B. Che angolo forma la direzione di CD con l'asse orizzontale quando C passa per il baricentro di AB?*

Esercizio 1.2 *Una circonferenza omogenea, di raggio R e massa M, è vincolata a muoversi in un piano orizzontale, passando sempre per un punto fisso O del piano. Un'altra circonferenza di raggio $r < R$ e massa m rotola senza strisciare sul bordo interno della prima.*

1 *Scrivere la lagrangiana*

2 *Scrivere l'hamiltoniana*

3 *Scrivere l'equazione di Hamilton Jacobi*

4 *discutere la riconducibilità del moto alle quadrature e, eventualmente, la regione dello spazio delle fasi in cui si possono definire le variabili azione-angolo*

Esercizio 1.3 *In un piano orizzontale, l'estremo A di un'asta omogenea di massa m e lunghezza L è vincolato a muoversi su di una guida circolare fissa del piano, di centro O e raggio $R > L$. L'altro estremo dell'asta è richiamato da O da una molla di costante elastica k.*

1 *Scrivi la lagrangiana*

2 *Scrivi l'hamiltoniana*

3 *Determina la regione nello spazio delle fasi in cui si possono introdurre le variabili azione-angolo*

4 *Discuti le posizioni di equilibrio e la loro stabilità.*

5 *Prova che esistono moti per cui l'asta rimane parallela al raggio che passa per A, sia interna che esterna alla guida. Osserva che sono moti periodici.*

6 *Discuti se le orbire descritte al punto 5 sono stabili, cioè se una piccola perturbazione dei dati iniziali fa ruotare l'asta in modo che rimanga per tutti i tempi vicina al raggio OA oppure no.*

7 *Trova un'altra famiglia di soluzioni periodiche, oltre a quelle descritte nel punto 5.*

Esercizio 1.4 *Sia*

$$H = \frac{1}{2}P_\rho^2 + \frac{1}{2\rho^2}P_\theta^2 - \rho\cos\theta - \frac{1}{2}\rho^2\sin^2\theta,$$

e sia, al tempo 0 $\theta(0) = P_\theta = 0$ e $\rho = P_\rho = 1$. Sia $S(\rho, \theta, P_1, P_2) = P_1\rho\cos\theta + \alpha P_2\rho\sin\theta$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ una funzione generatrice, con x_1, x_2, P_1, P_2 nuove coordinate ed impulsi. Determina i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che l'hamiltoniana nelle nuove variabili sia integrabile.

Utilizza tale trasformazione per determinare il valore di $\theta, \rho, P_\rho, P_\theta$ al tempo $t = \pi$.

2 Altro

Esercizio 2.1 *In un piano verticale (x, y) di origine O, considerate il sistema materiale formato da due punti P_1, P_2, di massa m_1, m_2, rispettivamente; un vincolo liscio obbliga O, P_1, P_2 ad essere allineati. Inoltre il punto P_1 è vincolato a muoversi lungo la circonferenza di centro (R, O) e raggio R, ed il punto P_2 è vincolato a muoversi lungo la retta $x = 2R$.*

a) Determinare la funzione di Lagrange;
b) Determinare per quali valori del parametro $a = \frac{m_2}{m_1}$ si possono avere posizioni di equilibrio;
c) Determinare le piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

Soluzione

Il problema è evidentemente ad un solo grado si libertà. Scelgo come variabile l'angolo ϕ che la direzione $O\,P_1\,P_2$ forma con l'asse delle x. Per i vincoli presenti, $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. Con un po' di trigonometria elementare si ottiene:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2R\cos^2\phi \\ 2R\sin\phi\cos\phi \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2R \\ 2R\tan\phi \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

quindi:

$$\dot{P}_1 = \dot{\phi}\begin{pmatrix} -4R\sin\phi\cos\phi \\ 2R(\cos^2\phi - \sin^2 phi \end{pmatrix} \quad \dot{P}_2 = \dot{\phi}\begin{pmatrix} 0 \\ 2R\frac{1}{\cos^2\phi} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

L'energia potenziale dovuta alla forza di gravità è

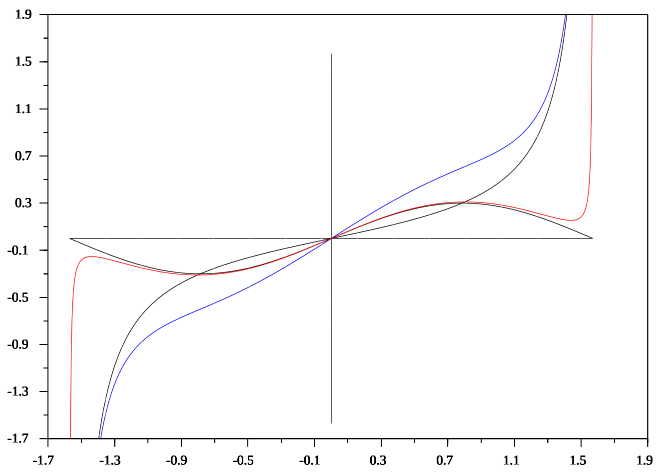
$$V = 2Rg(m_1\sin\phi\cos\phi + m_2\tan\phi), \tag{2.3}$$

dove g è l'accelerazione di gravità.

Quadrando e sommando i termini cinetici si ottiene la Lagrangiana:

$$L = 2R^2\dot{\phi}^2(m_1 + m_2\frac{1}{\cos^4\phi}) - 2Rg(m_1\sin\phi\cos\phi + m_2\tan\phi). \tag{2.4}$$

Per analizzare le posizioni di equilibrio, prima del calcolo delle derivate, tento un grafico qualitativo dell'energia potenziale V, ricordandomi che $2\sin\phi\cos\phi = \sin(2\phi)$.



In nero ho disegnato il seno di $(2x)$ e la tangente di x, nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. La curva blu è la somma, con coefficienti davanti al seno e alla tangente, dello stesso ordine, la curva rossa l'ho ottenuta con un coefficiente davanti alla tangente molto piu' piccolo del coefficiente davanti al seno. I due coefficienti sono esattamente le masse. Dunque deve esistere un valore critico $\bar{a}$ del parametro $a = \frac{m_2}{m_1}$ tale che:

- per $a < \bar{a}$ ci sono quattro posizioni di equilibrio; nell'ordine crescente di ϕ: instabile stabile instabile stabile;

- per $a \to 0$ le posizioni estreme tendono a $0 = 2\pi$, le altre tendono alle posizioni di equilibrio per il potenziale $\sin(2\phi)$, che sono evidentemente $\pm\frac{\pi}{4}$;
- per $a \to \bar{a}^-$ le due posizioni di equilibrio a sinistra andranno a coincidere, cosí come le due a destra (vviamente saranno tutte instabili);
- per $a > \bar{a}$ non ci sono posizioni di equilibrio: qualunque sia il dato iniziale $\lim_{t\to+\infty}\phi(t) = -\frac{\pi}{2}$, cioè l'ordinata di P_2 va a $-\infty$ e $P_1 \to O$.

Procedendo esplicitamente:

$$V' = 2Rg(m_1(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + m_2\frac{1}{\cos^2\phi}) = 2Rg(m_1(2\cos^2\phi - 1) + m_2\frac{1}{\cos^2\phi}). \tag{2.5}$$

Le posizioni di equilibrio le ottengo annullando V', risolvendo, cioè:

$$2m_1\cos^4\phi - m_1\cos^2\phi + m_2 = 0. \tag{2.6}$$

Ottengo

$$\cos^2\phi = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{1-8a}\right). \tag{2.7}$$

Dunque il valore critico del parametro è $\bar{a} = \frac{1}{8}$. Per $a > \bar{a}$ non ci sono soluzioni. Per $a < \bar{a}$ si ha $0 < 1 - 8a < 1$, dunque

$$\cos\phi = \frac{1}{2}\sqrt{1 \pm \sqrt{1-8a}} \tag{2.8}$$

(scarto i valori negativi perchè $|\phi| < \frac{\pi}{2}$). In definitiva ho le quattro posizioni di equilibrio che mi aspettavo:

$$\phi = \pm\arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{1 \pm \sqrt{1-8a}}\right). \tag{2.9}$$

Per $a = \bar{a}$ esse coincidono a due a due, nei punti

$$\phi = \pm\frac{\pi}{3}. \tag{2.10}$$

L' analisi della stabilità è facilmente ottenibile dal grafico.

Per $a < \bar{a}$ esistono due posizioni di equilibrio stabile: $\phi_1 = -\arccos\left(1 - \sqrt{1-8a}\right)$ e $\phi_2 = \arccos\left(1 + \sqrt{1-8a}\right)$. Il modo più pulito per determinare la frequenza delle piccole oscillazioni è quello di scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni. Per fare ciò bisogna calcolare la derivata seconda dell'energia potenziale. La indico con V''. Detto α_i lo scostamento dall'equilibrio ϕ_i $(i = 1, 2)$, le lagrangiane delle piccole oscillazioni sono:

$$L_i = 2R^2\dot{\alpha}_i^2(m_1 + m_2\frac{1}{\cos^4\phi_i}) - \frac{1}{2}V''(\phi_i)\alpha_i^2, \tag{2.11}$$

quindi le frequenze delle piccole oscillazioni intorno ai due equilibri stabili sono:

$$\omega_i = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{V''(\phi_i)}{m_1 + \frac{m_2}{\cos^4\phi_i}}}. \tag{2.12}$$

(Notare che, svolti i conti, esse dipendono solo dal rapporto tra le masse a).