Esercizi di Meccanica Razionale

AA 1999-2000, corsi Marchioro, Negrini, esercitatore D. Benedetto

2 ottobre 2000

Indice

I richiami alla bibliografia non sono ovviamente completi: non sono citati tutti i testi, né i testi in bibliografia sono citati tutte le volte che potrebbe essere utile. Me ne scuso con gli studenti e con gli autori.

Questa versione non è definitiva. Possono esserci errori, anche gravi. La versione più recente, e presumibilmente più corretta, è sul sito http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/meccanica

1 Altri Esercizi in Formalismo Hamiltoniano

1.1 Trasformazioni Canoniche

Esercizio 1.1 (III Esonero 26/5/97, prima parte) *Considera la famiglia di trasformazioni da $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$:*

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{p}{q^3}\right)^{\alpha} \\ P &= -\left(\frac{p}{q^3}\right)^{\beta} (q^4+1), \end{aligned} \tag{1.1}$$

con α, $\beta > 0$.

a) *Trova i valori di α e β per i quali la trasformazione è canonica.*

b) *Determina la funzione generatrice del tipo $F(q, Q)$ della trasformazione.*

Esercizio 1.2 (Compito del 5/6/90, parte 2) *Si consideri la trasformazione*

$$\begin{aligned} Q &= -\arctan\frac{p}{2q} \\ P &= q^2 + \alpha p^2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

definita nell'insieme $\{q > 0, p > 0\}$. Dimostrare che questa trasformazione è canonica per una scelta opportuna di α e scrivere, per tale valore, la trasformazione inversa.

Esercizio 1.3 (Esonero recupero 19/5/92, prima parte) *Trovare per quali valori di α, β la seguente trasformazione è canonica:*

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{p}e^{\alpha q} \\ P &= -2p^{\beta}e^{\frac{q}{2}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

In corrispondenza di tali valori scrivere la fuinzione generatrice della trasformazione.

Esercizio 1.4 (III Esonero 1/6/95 (Marchioro), prima parte) *Data la seguente trasformazione: $(q, p) \leftrightarrow (Q, P)$*

$$\begin{aligned} q &= -\frac{1}{4}Q^{\alpha}P \\ p &= Q^{\beta}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

con α, $\beta \in \mathbb{R}$, trovare i valori di α e β per cui essa è canonica e trovarne la funzioni generatrice $F(q, Q)$.

1.2 Hamilton-Jacobi e variabili azione-angolo

Esercizio 1.5 (by Negrini, 2000) *Si consideri l'hamiltoniana*

$$H = \frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{p_2^2}{q_2^2} + \sin(q_1^2 + q_2^2),$$

e si consideri la funzione generatrice

$$S = \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}P_1 + q_1^2 P_2.$$

a) *Si determini la trasformazione canonica individuata da S, nella regione q_1, $q_2 > 0$.*

b) *Si determini la nuova Hamiltoniana.*

c) *Si determinino le soluzioni delle equazioni del moto per la nuova Hamiltoniana.*

d) *Le soluzioni ottenute permettono di trovare le soluzioni delle equazioni del moto nelle vecchie variabili?*

Soluzione.

a) La funzione generatrice dipende dalle vecchie coordiante e dai nuovi impulsi. Pertanto la traformazione canonica è implicitamente definita da:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{q_1^2+q_2^2}{2} & p_1 &= q_1P_1 + 2q_1P_2 \\ Q_2 &= q_1^2 & Q_2 &= q_2P_1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

La trasformazione canonica è dunque:

$$\begin{aligned} q_1 &= \pm\sqrt{Q_2} & p_1 &= \pm\sqrt{Q_2}(P_1+2P_2) \\ q_2 &= \pm\sqrt{2Q_1-Q_2} & p_2 &= \pm\sqrt{2Q_1-Q_2}P_1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Nella regione q_1, $q_2 > 0$ il segno da scegliere è $+$.

b) Sostituendo nell'espressione di$H$ si ottiene l'hamiltoniana nelle nuove variabili:

$$K = (P_1+2P_2)^2 + P_1^2 + \sin(2Q_1).$$

c) La variabile Q_2 è ciclica, dunque P_2 si conserva, e K si conserva. Un modo per ottenere la quadratura del moto è di scrivere la lagrangiana unidimensionale per la variabile Q_1, pensando P_2 come un parametro fissato (un altro è la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi, per separazione di variabili, o l'ispezione diretta delle equazioni del moto). Si ottiene

$$L = P_1\dot{Q}_1 - K,$$

dove

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial K}{\partial P_1} = 4P_1 + 4P_2.$$

La lagrangiana è:

$$L = \frac{1}{8}\dot{Q}_1^2 - \dot{Q}_1P_2 - 2P_2^2 - \sin(2Q_1).$$

In questa lagrangiana il termine $-2P_2^2$ è costante, e posso eliminarlo, inoltre il termine $\dot{Q}_1P_2$ è una derivata totale ripetto al tempo ($\dot{Q}_1P_2 = \frac{d}{dt}(Q_1P_2)$), quindi non influisce sulle equazioni del moto, e posso elimare anch'esso. In definitiva la Lagrangiana che descrive il moto è

$$L = \frac{1}{8}\dot{Q}_1^2 - \sin(2Q_1),$$

che ha come energia totale

$$E = \frac{1}{8}\dot{Q}_1^2 + \sin(2Q_1).$$

L'analisi qualitativa di questo moto è assolutamente standard.

Il moto di Q_1 è descritto da:

$$t = \pm\int^{Q_1} dQ_1 \frac{1}{\sqrt{8(E-\sin(2Q_1))}},$$

la determinazione del moto nelle altre variabili è determinato integrando le equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned} P_2(t) &= P_2(0) \\ P_1(t) &= \frac{1}{4}\dot{Q}_1(t) - P_2(0) \\ Q_2(t) &= Q_2(0) + Q_1(t) - Q_1(0) + 4tP_2(0). \end{aligned} \tag{1.7}$$

d) La trasformazione effettuata è valida solo fino a che $Q_2 \geq 0$ e $2Q_1 - Q_2 \geq 0$. Quindi posso ottenere le soluzioni nelle vecchie variabili solo fino a quando $Q_2(t) \geq 0$ e $2Q_1(t) - Q_2(t) \geq 0$. Dalle soluzioni delle equazioni di Hamilton si ottiene:

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= Q_2(0) + Q_1(t) - Q_1(0) + 4tP_2(0) \\ (2Q_1 - Q_2)(t) &= 2Q_1(0) - Q_2(0) + Q_1(t) - Q_1(0) - 4tP_2(0) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ne segue che se $P_2(0) \neq 0$, e il moto in Q_1 è limitato, il moto raggiunge o la frontiera $Q_2(t) = 0$ o la frontiera $2Q_1(t) - Q_2(t) = 0$. Infatti, o $Q_1(t) - Q_1(0) + 4tP_2(0)$ o $Q_1(t) - Q_1(0) + 4tP_2(0)$ tende a meno infinito.

Quindi la soluzione trovata non può essere estesa per tutti i tempi nelle vecchie variabili. Per ottenere la soluzioni per tutti i tempi bosogna considerare la trasfrmazione canonica nelle altre regioni dello spazio delle fasi.

Esistono, però, dati iniziali per cui si ottiene globalemente il moto nelle vecchie variabili. Sia ad esempio $P_2 > 0$ e consideriamo i moti illimitati in Q_1, con $\dot{Q}_1 > 0$ (che corrispondono a $E > 1$). Allora, se $\sqrt{8(E-1)} > 4P_2$, le condizioni per l'invertibilità sono sempre soddisfatte, infatti:

$$\frac{Q_1(t) - Q_1(0)}{t} = \dot{Q}_1(\tau) = \sqrt{8(E - \sin(2Q_1(\tau)))},$$

per un opportuno tempo intermedio $0 < \tau < t$. Dunque: $Q_1(t) - Q_1(0) \pm 4tP_2 > 0$.

Esercizio 1.6 ((III Esonero 26/5/97, seconda parte) *Un'asta omogenea di massa m e lunghezza l è vincolata a muoversi su di un piano orizzontale (O, x, y). Sul suo punto medio P è applicata una forza di energia potenziale*

$$V = \frac{J^2}{2m} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2),$$

dove x, y sono le coordinate del punto P, e $k > 0$, J paramteri fissati.

Usa come variabili lagrangiane la distanza ρ di P dall'origine O, l'angolo θ che PO forma con l'asse delle x, e l'angolo ϕ che l'asta forma con l'asse delle x.

a) *Scrivi la Lagrangiana e l'Hamiltoniana;*

b) *risolvi l'equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili;*

c) *considera il dato iniziale*

$$\begin{aligned} &P_\rho(0) = 0 && P_\theta(0) = 0 && P_\phi(0) = p_0 > 0 \\ &\rho(0) = \rho_0 > 0 && \theta(0) = \theta_0 && \phi(0) = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Per quali valori di θ_0 il moto è multiperiodico (cioè è nella regione dello spazio delle fasi in cui il moto può essere descritto in variabili azione-angolo)?

d) *Sia ora $P_\phi(0) = 0$. Trova un valore di θ_0 per cui il moto è periodico.*

Esercizio 1.7 (III Esonero 1/6/95 (Marchioro) seconda parte) *In un piano verticale è posto un disco omogeneo di centro C, masa M e raggio R, che rotola senza strisciare lungo un asse orizzontale x. In tale piano è posta un'asta omogenea pesante di massa m e lunghezza $L = R$ ed i cui estremi A e B sono obbligati a scorrere senza attrito lungo una guida liscia solidale alla circonferenza del disco.*

Scegliamo come variabili Lagrangiane l'ascisa x_C del centro del disco e l'angolo θ che CH forma con la verticale discendente, ove H è il punto di mezzo dell'asta AB.

a) *Scrivere le equazioni del moto con il metodo di Lagrange.*

b) *Trovare due integrali primi e, tramite questi, considerando le seguenti condizioni inizilali:*

$$x_C(0) = 0; \;\; \dot{x}_C(0) = 0; \;\; \theta(0) = 0 : \;\; \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0,$$

trovare i valori di $\dot{\theta}_0$ per cui l'asta compie una rotazione completa.

c) *Scrivere prima l'Hamiltoniana e poi l'equazione di Hamilton-Jacobi.*

d) *(aggiunto) Risolvere per separazione di variabili l'equazione di Hamilton-Jacobi. Esiste una regione nello spazio delle fasi in cui il motot può essere descritto in variabile azione-angolo?*

Esercizio 1.8 (Esonero 19/5/92 (recupero), seconda parte) *Data la Lagrangiana*

$$L = (1 + q^2)\dot{q}^2 - \dot{q} + q,$$

a) *Scrivere la corrispondente Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.*

b) *Scirvere l'equazione di Hamilton-Jacobi relativa a tale Hamiltoniana e riportare il moto del sistema alle quadrature.*

c) *Scrivere l'energia meccanica totale corrispondente alla Lagrangiana L. Utilizzando la conservazione dell'energia, riportare il sistema alle quadrature. Confrontare il risultato con quanto ottenuto mediante l'equazione di Hamilton-Jacobi.*

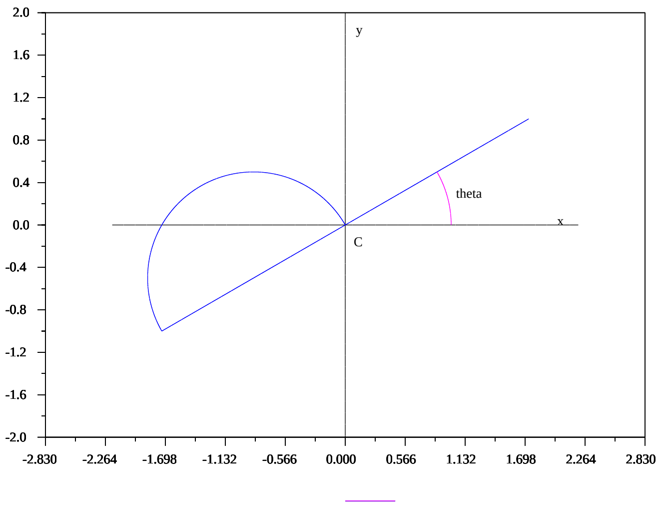
Esercizio 1.9 (Compito 12/10/94, seconda parte) *Si consideri il sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p - q^2 \\ \dot{p} &= 2q^3 - 2pq \end{aligned} \tag{1.10}$$

a) *Si riconosca che il sistema è hamiltoniano.*

b) *Si risolva il sistema usando il metodo di Hamilton-Jacobi.*

Esercizio 1.10 (Compito 23/9/91) *Un corpo rigido è formato da un semidisco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta di massa m e lunghezza $2R$. Esso è vicolato da una cerniera a ruotare attorno a C in un piano verticale, e sia θ l'angolo che l'asta forma con l'asse (vedi figura).*



a) *Scirvere la Lagrangiana e mostrare che essa assume la forma*

$$L = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 - a\sin\theta - b\cos\theta,$$

e scrivere le espressioni di I, a, b in funzione dei R, M, m.

b) *Determinata l'Hamiltoniana, scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi e risolvere il problema della dinamica del corpo riportando tale equazione alle quadrature.*

c) *Dire sotto quali condizioni la posizione $\theta = 0$ è di equilibrio. AQl di fuori di tali condizioni studiare il moto del corpo con condizioni iniziali $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Specificare se la rotazione avviene inizialmente in senso orario o antiorario, se esiste un tempo t^* in cui l'asta raggiunge una posizione verticale ed in tal caso determinare l'espressione di tale tempo t^*.*

Esercizio 1.11 (Compito 5/6/90, prima parte) *Una particella puntiforme di massa $m = 1$ si muove nel piano sotto l'azione di una forza conservativa di energia potenziale*

$$V(r) = -\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}},$$

esendo r la distanza dall'origine.

Si supponga che, all'istante $t = 0$, indicando con θ l'angolo polare rispetto all'origine:

$$r(0) = 1, \ \ \dot{r}(0) = v_0, \ \ \dot{\theta}(0) = 1.$$

Si chiede di dire per quali valori di v_0 il moto è quasi periodico.

1.3 Teoria delle perturbazioni

Esercizio 1.12 *Si consideri l'Hamiltoniana*

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + \varepsilon(q^3 + \lambda q p^2).$$

Si trovi una trasformazione canonica polinomiale, che trasforma H in una Hamiltoniana della forma:

$$K(Q,P) = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\omega^2 Q^2 + \varepsilon^2 V(Q,P,\varepsilon),$$

con $V(Q,P,\varepsilon)$ limitato in ε. Si utilizzi tale trasformazione per scrivere la soluzione generale delle equazioni del moto a meno di termini di oridine ε^2.