Esercizi di Meccanica Razionale

AA 1999-2000, corsi Marchioro, Negrini, esercitatore D. Benedetto

1 febbraio 2007

Indice

I richiami alla bibliografia non sono ovviamente completi: non sono citati tutti i testi, né i testi in bibliografia sono citati tutte le volte che potrebbe essere utile. Me ne scuso con gli studenti e con gli autori.

Questa versione non è definitiva. Possono esserci errori, anche gravi. La versione più recente, e presumibilmente più corretta, è sul sito http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/meccanica

1 Bignamino di Formalismo Hamiltoniano

In questa sezione c'è un riassunto sulle trasformazioni canoniche, le funzioni generatrici, l'equazione di Hamilton-Jacobi, le variabili azione-angolo e la teoria delle perturbazioni. Sono argomenti su cui è facile fare esercizi in modo meccanico, ma è facile non capire di che si tratta. È il motivo per cui ripeto in sintesi i fatti della teoria e per cui si sono alcuni esercizi teorici.

1.1 Le trasformazioni canoniche

1.1.1 Il problema

Considera un Hamiltoninana $H(q, p, t)$, e una trasformazione regolare di coordinate

$$\begin{aligned} Q &= Q(q, p, t) \\ P &= P(q, p, t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Esiste $K = K(Q, P, t)$ tale che

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{dp} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{dq} \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{dP} \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{dQ} \end{cases} \quad ? \tag{1.2}$$

In altre parole, il sistema di equazioni differenziali nelle variabili Q, P è hamiltoniano? E se lo è, qual è l'Hamiltoniana?

Risolvere questo problema è utile perché in alcuni casi il sistema nelle nuove variabili è piú facilmente risolubile di quello nelle vecchie.

1.1.2 Un esempio

Sia $H = \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2$ e sia data la trasformazione:

$$\begin{aligned} Q &= p + q \\ P &= q. \end{aligned} \tag{1.3}$$

La trasformazione inversa è

$$\begin{aligned} q &= P \\ p &= Q - P \end{aligned} \tag{1.4}$$

Le equazioni del moto, nelle vecchie variabili sono:

$$(1) \begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q. \end{cases} \tag{1.5}$$

Nelle nuove variabili le equazioni si ottengono utilizzando le equazioni (1) e le trasformazioni di coordinate. Si ottiene:

$$(2) \begin{cases} \dot{Q} = \dot{p} + \dot{q} = -q + p = Q - 2P \\ \dot{P} = \dot{q} = p = Q - P. \end{cases} \tag{1.6}$$

Un sistema differenziale è Hamiltoniano se esiste l'hamiltoniana, cioè se esiste una funzione $K(P, Q)$ tale che

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Nel nostro caso, questo accade se una delle seguenti condizioni equivalenti è soddisfatta:

i) la forma differenziale $(P - Q)dQ + (Q - 2P)dP$ è chiusa

ii) $\mathrm{div}_{Q,P}\binom{Q-2P}{Q-P} = 0$

Ed in effetti $\mathrm{div}_{Q,P}\binom{Q-2P}{Q-P} = 1 - 1 = 0$. Per la determinare la Hamiltoniana K bisogna trovare la primitiva della forma differenziale $(P-Q)dQ + (Q-2P)dP$. Integrando nella variabile Q si ottiene: $K(P,Q) = -\frac{Q^2}{2} + QP + g(P)$, dove g si determina imponendo $\dfrac{\partial K}{\partial P} = Q - 2P$. Si ottiene $Q + \dfrac{\partial g}{\partial P} = Q - 2P$, quindi $g(P) = P^2$. In definitiva $K(P,Q) = -\frac{Q^2}{2} + QP + P^2$.

1.1.3 Un esempio molto particolare

Sia $H = \frac{p^2}{2}$, e sia $P = p^2$, $Q = q$ la trasformazione assegnata. Nelle nuove variabili il sistema differenziale è $\dot{Q} = \sqrt{P}$, $\dot{P} = 0$, che è hamiltonianio di halmiltoniana $K = \frac{2}{3}P^{\frac{3}{2}}$. D'altra parte per l'hamiltoniana $H = \frac{qp^2}{2}$, il sistema trasformato $\dot{Q} = \sqrt{P}$, $\dot{P} = -P^{\frac{3}{2}}$ non è hamiltoniano.

In questo esempio la trasformazione porta il sistema di Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2}$ in un sistema hamiltoniano, mentre porta il sistema di hamiltoniana $H = \frac{qp^2}{2}$ in un sistema che non è hamiltoniano.

Il fatto importante è che esistono invece trasformazioni che portano sistemi Hamiltoniani in sistemi Hamiltoniani *qualunque sia* l'Hamiltoniana di partenza. Nel seguito chiamerò trasformazioni canoniche tali trasformazioni.

Esercizio 1.1 *(teorico) Provare che ogni cambiamento lineare invertibile per sistemi a un grado di libertà di coordinate è canonico nel senso detto sopra.*

Una classe di trasformazioni canoniche è quella dei diffeomorfismi simplettici (nel seguito chiamate trasformazioni simplettiche):

$$\begin{aligned} Q &= Q(q,p) \\ P &= P(q,p) \end{aligned} \tag{1.8}$$

è un diffeomorfismo simplettico se lo jacobiano della trasformazione è simplettico per ogni valore di (q,p):

$$D = \begin{pmatrix} \partial_q Q & \partial_p Q \\ \partial_q P & \partial_p P \end{pmatrix} : \quad DJD^t = J \;\text{ dove }\; J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

(in dimensione $n > 2$, la matrice D è una matrice $2n \times 2n$, dove ogni blocco è definito nel modo ovvio: $\dfrac{\partial Q}{\partial q}$ è la matrice delle derivate delle n funzioni Q_i rispetto alle n variabili q_j, cioè $(\partial_q Q)_{i,j} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$ etc. . Per queste trasformazioni, nel caso in cui H *non dipenda dal tempo* la regola per trovare la nuova Hamiltoniana è $K(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P))$.

In sintesi esistono

a) trasformazioni che trasformano un sistema hamiltoniano di hamiltoniana H assegnata in un altro sistema hamiltoniano

b) trasformazioni **canoniche** che trasformano un sistema hamiltoniano in un sistema hamiltoniano qualunque sia l'hamiltoniana H

c) trasformazioni **simplettiche**, cioè quelle che verificano l'identità (1.9). In particolare queste trasformazioni sono canoniche. La nuova Hamiltoniana si ottiene semplicemente esprimendo la vecchia nelle nuove coordinate $K(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P))$.

Nel seguito mi interesserò solo alle trasformazioni simplettiche, che chiamerò, con abuso di linguaggio, canoniche.

1.2 Trasformazioni simplettiche indipendenti dal tempo

Condizioni equivalenti di simpletticità sono:

1) lo jacobiano è una matrice simplettica;

2) $\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\}$, $\forall i, j$, $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$ (le parentesi di Poisson sono definite da $\{f, g\} = \partial_q f \cdot \partial_p g - \partial_p f \cdot \partial_q g$, e sono un prodotto antisimmetrico per le funzioni regolari di (q, p));

3) la forma differenziale $p\,dq - P\,dQ = \sum_i (p_i\,dq_i - P_i\,dQ_i) = \sum_i (p_i\,dq_i - \sum_j (\partial_{q_j} Q_i\,dq_j + \partial_{p_j} Q_i\,dp_j))$ è chiusa (localmente esatta).

4) ne esistono altre (vedi "parentesi di lagrange" sui testi di meccanica analitica).

Esercizio 1.2 *(teorico) Verifica che le condizioni 1,2,3 sono equivalenti e che implicano la canonicità della trasformazione.*

Esercizio 1.3

$$\begin{aligned} Q &= \log\left(\tfrac{1}{q}\sin p\right) \\ P &= q \;\; ctg\, p \end{aligned} \tag{1.10}$$

Dove è definita? Qual è l'inversa? È canonica?

Soluzione

Perché la traformazione abbia senso deve essere $\frac{1}{q}\sin p > 0$, dunque $(q,\, p)$ devono essere nelle regioni $q > 0$ e $p \in (2k\pi, 2(k+1)\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$, o nelle regioni $q < 0$ e $p \in (2k - 1\pi, 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. In entrambi i casio anche la seconda equazione ha senso, infatti essa ha singolarità solo per $\sin p = 0$. Quindi la trasformazione è definita nelle regioni descritte sopra.

Per calcolare l'inversa bisogna esprimere $(q,\, p)$ in funzione di $(Q,\, P)$. Comincio con l'invertire il logaritmo: $\sin p = qe^Q$. Dalla seconda $\sin p = \frac{q}{P}\cos p$. Ma allora $qe^Q = \frac{q}{P}\cos p$. Dunque

$$p = \pm \arccos\left(Pe^Q\right).$$

Inserendo questa relazione nella prima equazione ottengo

$$q = \pm\sqrt{1 - P^2 e^Q}\, e^{-Q}.$$

I segni si determinano a seconda della regione in cui si inverte la trasformazione.

Per verificare la canonicità è sufficiente calcolare verificare se $\{Q, P\} = 1$. Calcolo quindi lo Jacobiano della trasformazione.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q} & \text{ctg } p \\ \text{ctg } p & -q(1 + \text{ctg}^2 p) \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Ma allora $\{Q, P\} = 1$.

Esercizio 1.4

$$\begin{aligned} Q &= 2a \log p + \log q \\ P &= -p^b q \log q \end{aligned} \tag{1.12}$$

Trovare per quali valori di a e b è canonica. Considera l'hamiltoniana $H = \frac{1}{2}p^2 q^2 (\log q)^2$, *e il dato iniziale* $(q(0), p(0)) = (e, \frac{1}{e})$. *Trova la soluzione delle equazioni del moto utilizzando la trasformazione canonica trovata.*

Soluzione Calcolo lo Jacobiano

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{q} & 2a\frac{1}{p} \\ -p^b(\log q + 1) & -bp^{b-1} q \log q \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Impongo $\{Q,\, P\} = 1$:

$$-\frac{1}{q} b p^{b-1} q \log q + 2a \frac{1}{p} p^b (\log q + 1) = 1,$$

cioè:

$$p^{b-1}(-b \log q + 2a \log q + 2a) = 1.$$

Se deve fare 1, in particolare non deve dipendere da p. Dunque $b = 1$. Ottengo

$$(2a - 1) \log q + 2a = 1.$$

Ma non deve dipendere nemmeno da q, dunque $2a = 1$. Quindi per $b = 1$ e $a = \frac{1}{2}$ la trasformazione è canonica.

La trasformazione cercata è

$$\begin{aligned} Q &= \log p + \log q \\ P &= -pq \log q. \end{aligned} \tag{1.14}$$

La nuova Hamiltoniana è $K(P, Q) = H(p(Q, P), q(Q, P)) = \frac{1}{2} P^2$. Ma allora le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= P \\ \dot{P} &= 0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

che hanno soluzioni

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(0) + P(0)t \\ P(t) &= P(0). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Impongo il dato iniziale e ottengo $Q(0) = 0$ e $P(0) = -1$. Quindi:

$$\begin{aligned} Q(t) &= -t \\ P(t) &= -1. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Ma allora posso cercare di esprimere la soluzione nelle vecchie variabili attraverso la trasformazione inversa. Dopo un pò di algebra si ottiene

$$\begin{aligned} q &= e^{-Pe^{-Q}} \\ p &= e^{Q + Pe^{-Q}}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Dunque

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{e^t} \\ p(t) &= e^{-t - e^t}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Come visto negli esercizi precedenti, la simpletticità si controlla sia calcolando l'esattezza della forma differenziale $p\,dq - P\,dQ$, sia calcolando le parentesi di Poisson. Nel caso di un sistema ad un grado di libertà, questi conti sono particolarmente semplici. Infatti, per antisimmetria, $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$ qualunque siano le funzioni Q e P. Dunque la condizione di simpletticità è semplicemente $\{Q, P\} = 1$.

In più dimensioni il calcolo si complica. Ad esempio considera l'esercizio

Esercizio 1.5 *Verificare la canonicità di:*

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 q_2 \\ Q_2 &= q_1 + q_2 \\ P_1 &= \tfrac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} + 1 \\ P_2 &= \tfrac{q_2 p_2 - q_1 p_1}{q_2 - q_1} - (q_2 + q_1). \end{aligned} \tag{1.20}$$

In questo caso le relazioni per le parentesi di Poisson da verificare sono:

$$\begin{aligned} &\{Q_1, Q_2\} = \{P_1, P_2\} = \{Q_1, P_2\} = \{P_1, Q_2\} = 0 \\ &\{Q_1, P_1\} = \{Q_2, P_2\} = 0. \end{aligned} \tag{1.21}$$

1.3 Funzioni generatrici e trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo

La condizione di simpletticità 3), può essere riformulata nel modo seguente:

esiste $F(p,q)$ tale che $p\,dq - P\,dQ = dF$.

Un modo di usare questo fatto è pensare che la trasformazione assegnata permetta di considerare le q e le Q come variabili indipendenti. In tal caso anche nelle variabili $(q,\,Q)$ deve valere $p\,dq - P\,dQ = dF$, dove al posto di p e P avremo scritto la loro espressione in termini di $(q,\,Q)$. Ma allora la trasformazione deve verificare: esiste $F = F(q,Q)$ tale che:

$$\begin{aligned} p(q,Q) &= \partial_q F(q,Q) \\ P(q,Q) &= -\partial_Q F(q,Q). \end{aligned} \tag{1.22}$$

L'utilità di questo ragionamento è che per avere una trasformazione canonica è sufficiente dare una funzione $F(q,Q)$, di definire le funzioni $p(q,Q)$ e $P(q,Q)$ attraverso le definizioni 1.22 e poi invertire la prima rispetto a Q, in modo da ottenere $Q = Q(q,p)$ e $P = P(q,p)$. Ovviamente per fare ciò deve valere almeno la condizione di invertibilità locale $\det\left(\partial_q\partial_q F(q,Q)\right) \neq 0$.

Esercizio 1.6 *Trovare i valori dei parametri per cui la trasformazione seguente è canonica, costruendo la funzione generatrice di tipo $F = F(q,Q)$:*

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{p}e^{aq} \\ P &= -p^b e^q; \end{aligned} \tag{1.23}$$

La condizione di canonicità espressa tramite la funzione generatrice è particolarmente utile nel caso di trasformazioni dipendenti dal tempo. Infatti, una trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= Q(q,p,t) \\ P &= P(q,p,t) \end{aligned} \tag{1.24}$$

è canonica se è simplettica per ogni t. Questo è equivalente al fatto che, detta H la vecchia hamiltoniana (anche dipendente dal tempo) e detta K la nuova, esista una funzione $F(p,q,t)$ tale che:

$$p\,dq - H(p,q,t)dt = P\,dQ - K(P,Q,t) + dF(p,q,t).$$

Anche in questo caso, se si possono considerare le q e le Q come variabili indipendenti si ottiene

$$\begin{aligned} p(q,Q,t) &= \partial_q F(q,Q,t) \\ P(q,Q,t) &= -\partial_Q F(q,Q,t). \end{aligned} \tag{1.25}$$

E non solo, ottenuta la trasformazione, si ottiene anche la nuova hamiltoniana:

$$K(Q,P,t) = H(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t) + \partial_t F(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t). \tag{1.26}$$

Esercizio 1.7 *Risolvere le equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana $H = -\frac{pq}{2t}\log\left(\frac{p}{2t}\right)$, utilizzando la trasformazione canonica generata da $F(q,Q,t) = q^2e^{Qt}$.*

1.3.1 Altri tipi di funzioni generatrici

può essere conveniente pensare l'espressione

$$p\,dq - H\,dt = P\,dQ - K\,dt + dF \tag{1.27}$$

in termini di altre coppie di variabili. Considera ad esempio (q,P): è utile scivere $P\,dQ = d(PQ) - Q\,dP$ e definire $S = F + PQ$; ottieni:

$$p\,dq - H\,dt = -Q\,dP - K\,dt + dS, \tag{1.28}$$

dove p, Q, H, K, S le stai pensando come funzioni di (q, P, t). In tal caso la condizione di canonicità (e quindi la trasformazione in forma implicita, assegnata la funzione S) diventa:

$$\begin{aligned} p(q, P, t) &= \partial_q S(q, P, t) \\ Q(q, P, t) &= \partial_P S(q, P, t), \end{aligned} \tag{1.29}$$

e la relazione tra le hamiltoniane e S: $K = H + \partial_t S$.

Esercizio 1.8 *(teorico) Trovare tutte le relazioni che definiscono una trasfomazione canonica, assegnata una funzione di qualunque combinazione delle variabili; quante sono per un sistema a n gradi di libertà? Ad esmpio, usa come variabili indipendenti (q, P), (P, q), (p, P), e, a due gradi di libertà (q_1, P_1, p_2, Q_2).*

Esercizio 1.9 *(teorico) Data H e la trasformazione delle sole coordinate $Q = Q(q, t)$, puoi ottenere una trasformazione canonica nel seguente modo: scrivi la lagrangiana in $(q, \dot{q})$, cambia il sistema di coordinate e scrivi la nuova hamiltoniana; hai dunque trovato una legge di trasformazione degli impulsi. Prova che la trasformazione che hai ottenuto è generata da $S = PQ(q, t)$.*

Esercizio 1.10 *Determinare una trasformazione canonica tra quelle generate da $F = \alpha q^a Q^b$, che trasformi l'hamiltoniana $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right)$ nell'hamiltoniana di un oscillatore armonico.*

Esercizio 1.11 *Studiare il moto del sistema di Hamiltoniana*

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2, \tag{1.30}$$

mediante la trasformazione canonica generata da $F = kq_1 Q_2 - p_2 Q_2 + p_2 P_1$.

Esercizio 1.12 *Determinare il moto del sistema di Lagrangiana*

$$L = q\dot{q}^2, \tag{1.31}$$

passando all'hamiltoniana e utilizzando la trasformazione canonica generata da $F(p, Q) = -\frac{p^3}{12Q}$.

1.4 Equazione di Hamilton Jacobi

Come si è visto una trasformazione canonica può rendere banalmente integrabile le equazioni di Hamilton. Peró, chi ti dice come trovare la trasformazione? Tentiamo allora di cercare una funzione generatrice $S(q, P, t)$ tale che la nuova hamiltoniana K sia esattamente 0. In tal caso, infatti, le equazioni nelle nuove varibili (Q, P) sono banali:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= 0 \\ \dot{P} &= 0, \end{aligned} \tag{1.32}$$

dunque nota la trasfomazione si può risalire al moto nelle variabili q, p. Come deve essere fatta una tale S? Deve valere: $\partial_q S = p$ e $K = 0$, cioè:

$$H\left(q, \partial_q S(q, P, t), t\right) + \partial_t S(q, P, t) = 0. \tag{1.33}$$

Per Hamiltoniane indipendenti dal tempo, si può cercare una soluzione del tipo $S(q, P, t) = W(q, P) - P_n t$, dove P_n è l'ultimo impulso: l'equazione di H.J. diventa (equazione caratteristica di H.J.):

$$H\left(q, \partial_q W(q, P, t)\right) = P_n. \tag{1.34}$$

In realtà, invece di cercare S dipendente dal tempo che renda nulla l'Hamiltoniana, puoi pensare che basta trovare W che rende costante l'Hamiltoniana. Infatti puoi pensare che la funzione generatrice W rende l'hamiltoniana uguale ad uno dei nuovi impulsi; anche cosí le equazioni di Hamilton sono banali:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \partial_{P_i} K = 0 \quad i = 1, \ldots n-1 \\ \dot{Q}_n &= \partial_{P_n} K = 1 \\ \dot{P}_i &= -\partial_{Q_i} K = 0 \quad i = 1, \ldots n. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Come si procede in pratica? Sempre e solo per separazione di variabili; in alcuni rari casi ci si riesce (sistemi integrabili) in generale no. Separazione di variabili significa che cerchi la soluzione come somma di n funzioni ognuna delle quali dipende solo da una delle vecchie coordinate. Il fatto che si riesca a trovare la soluzione dipende dal fatto che dentro H la dipendenza delle variabili è *separtata.*

1.4.1 Esempio

$H = \frac{1}{2}\left(q_2(p_1q_1)^2 + p_2\right)^2$. Cerco la funzione $W((q_1, q_2, a_1, a_2) = A(q_1, a_1, a_2) + B(q_2, a_1, a_2)$. I parametri a_1, a_2 saranno i nuovi impulsi. La separazione di variabili in questo caso consiste nel cercare la funzione W come la somma di una funzione che dipende solo da q_1 e di una funzione che dipende solo da q_2.

L'equazione da risolvere è:

$$\frac{1}{2}\left(q_2(q_1\partial_{q_1}A)^2 + \partial_{q_2}B\right)^2 = a_2. \tag{1.36}$$

Stai cercando B in modo che non dipenda da q_2, ma solo da q_1. Dall'equazione puoi ricavare:

$$\partial_{q_2}B = \pm\sqrt{2a_2} - q_2(q_1\partial_{q_1}A)^2 \tag{1.37}$$

peró in questa espressione $\partial_{q_2}B$ dipendende da q_1 e da $A(q_1)$; l'unica possibilità che ho è dunque che la combinazione $q_1\partial_{q_1}A$ non dipenda da q_1, cioè: $q_1\partial_{q_1}A = a_1$, ovvero $A(q_1) = a_1 \log q_1$. A questo punto posso risolvere anche l'equazione in B infatti $\partial_{q_2}B = \pm\sqrt{2a_2} - q_2a_1^2$ è una funzione della sola q_2 e dei nuovi impulsi. Riassumendo, ottieni:

$$W = a_1 \log q_1 \pm \sqrt{2a_2}q_2 - \frac{1}{2}q_2^2a_1^2. \tag{1.38}$$

La trasformazione generata da W è:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \log q_1 - a_1q_2^2 \\
Q_2 &= \pm\frac{q_2}{\sqrt{2a_2}} \\
p_1 &= \frac{a_1}{q_1} \\
p_2 &= \pm\sqrt{2a_2} - a_1^2q_2.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Usando la soluzione delle equazioni del moto per l'hamiltoniana K e tornando indietro con la trasformazione, ottieni:

$$\begin{aligned}
q_2(t) &= \pm\sqrt{2a_2(0)}(Q_2(0) + t) \\
q_1(t) &= e^{Q_1(0)+2a_1(0)a_2(0)(Q_2(0)+t)^2} \\
p_1 &= a_1(0)e^{-Q_1(0)-2a_1(0)a_2(0)(Q_2(0)+t)^2} \\
p_2 &= \pm\sqrt{2a_2(0)}(1 - a_1^2(0)(Q_2(0) + t)).
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Il segno $+, -$ lo determini a seconda del segno di $q_2(p_1q_1)^2 + p_2 = \pm\sqrt{2a_2}$. Nella soluzione compaiono i termini $Q_1(0), Q_2(0), a_1(0), a_2(0)$, che trovi imponendo i dati iniziali.

OSSERVAZIONE 1. La separazione di variabili funziona perché la dipendenza da p_1, q_1 dell'hamiltoniana è isolata nel termine $(p_1q_1)^2$, cioè abbiamo potuto risolvere *separatamente* l'equazione per A nella variabile q_1 senza coinvolgere l'altra variabile.

OSSERVAZIONE 2. In effetti, ci sei riuscito perché oltre all'energia c'è un altro integrale primo, esattamente p_1q_1, infatti a_1 si conserva. L'esistenza di questo integrale primo ti ha permesso di portare il moto alle quadrature, così come accade nei problemi lagrangiani. In generale, peró, il tipico integrale primo che ti capita di trovare risolvendo l'equazione di H.J. non è un momento che proviene da una simmetria della lagrangiana. Considera ad esempio le Hamiltoniane: $H_1 = \frac{1}{2}\left(q_2^2(p_1q_1)^2 + p_2^2\right)$ e $H_2 = \frac{1}{2}\left(q_2^2(p_1^2 + q_1^2) + p_2^2\right)$. Per H_1 si conserva p_1q_1 e la lagrangiana è $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_2^2 + \frac{\dot{q}_1^2}{q_2^2q_1^2}\right)$, che ha il gruppo ad un parametro di simmetrie $g_\tau\binom{q_1}{q_2} = \binom{e^\tau q_1}{q_2}$. Per H_2 si conserva $p_1^2 + q_1^2$, la lagrangiana è $L = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_1^2}{q_2^2} + \dot{q}_2^2 + q_1^2q_2^2\right)$ che non ha evidenti simmetrie.

OSSERVAZIONE 3. I nuovi impulsi li scegli tu, mentre risolvi l'equazione di H.J.. Infatti potevi, ad esempio, decidere che $\partial_{q_1}Aq_1 = a_2^2$, oppure $\log a_2$, o $a_1a_2, ...$, o potevi decidere che $H = a_1 + a_2$. Avresti ottenuto una soluzione di H.J. con una diversa dipendenza dai nuovi impulsi, che comunque risolveva il problema. In sostanza, scegli come impulsi una qualche combinazione delle costanti da cui la soluzione di H.J. dipende. Inoltre la soluzione di H.J. *deve* dipendere da un numero di costanti pari ai gradi di libertà in modo non triviale (c'è comunque una costante additiva che si può aggiungere a W).

1.5 Costruzione delle variabili azione-angolo

1.5.1 Variabili azione-angolo per l'oscillatore armonico

Considera l' oscillatore armonico:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2).$$

La soluzione dell'equazione di H.J. è $W(q,\alpha) = \int^q dq\,\sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2}$. Nel piano delle fasi l'integrale primo dell'energia, cioè α, individua la curva chiusa C_α descritta da $p = \pm\sqrt{2(\alpha - \omega^2 q^2)}$, che interseca l'asse delle q in $\pm\frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega}$.

La variabile d'azione è:

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_\alpha} p\,dq = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega}} dq\,\sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2} = \\ &= \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega}} \sqrt{2\alpha}\sqrt{1 - \left(\tfrac{\omega q}{\sqrt{2\alpha}}\right)^2}\, d\left(\tfrac{\omega q}{\sqrt{2\alpha}}\right) = \tfrac{2}{\pi}\tfrac{2\alpha}{\omega}\int_0^1 d\xi\sqrt{1-\xi^2} = \tfrac{\alpha}{\omega}. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Come determini la variabile angolare conigata ad I? Pensando W come funzione di I e derivandola rispetto ad I:

$$\begin{aligned} \phi &= \partial_I W(q,I) = \partial_I \int^q dq\sqrt{2\omega I - \omega^2 q^2} = \omega \int^q \tfrac{dq}{\sqrt{2\omega I}\sqrt{1 - \frac{\omega}{2I}q^2}} \\ &= \int^{\sqrt{\frac{\omega}{2I}}} \tfrac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin(\sqrt{\tfrac{\omega}{2I}}q), \end{aligned} \tag{1.42}$$

ovvero $q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}}\sin\phi$. Sostituendo nell'hamiltoniana: $K(I) = \alpha(I) = I\omega$. Quindi, dalle equazioni di Hamilton nelle variabili $(\phi,\, I)$:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial K}{\partial \phi} = 0 \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial K}{\partial I} = \omega, \end{aligned} \tag{1.43}$$

cioè la frequenza della variabile angolare è la frequenza dell'oscillatore armonico.

1.5.2 Un esempio

Considera l'hamiltoniana: $H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}x^2(p_\phi^2 - \cos\phi)$.

a) Risolvi l'equazione di H.J. per separazione di varibili, e riduci il moto alle quadrature, cercando $W = A(x,\alpha,\beta) + B(\phi,\alpha,\beta)$ (α,β saranno i nuovi impulsi)

b) Determina la regione dello spazio delle fasi un cui il moto si può descrivere in variabili azione-angolo.

c) In questa regione trova le frequenze dei moti quasi periodici.

Soluzione

a) Cerca: $W = A(x,\alpha,\beta) + B(\phi,\alpha,\beta)$ (α,β saranno i nuovi impulsi). L'equazione da risolvere è:

$$\frac{1}{2}\left(\partial_x A\right)^2 + \frac{1}{2}x^2\left(\left(\partial_\phi B\right)^2 - \cos\phi\right) = \alpha. \tag{1.44}$$

Riesci a risolverla ponendo $\left(\partial_\phi B\right)^2 - \cos\phi = \beta$. Ottieni:

$$B = \pm\int^\phi d\phi\,\sqrt{\beta + \cos\phi}, \qquad A = \pm\int^x dx\,\sqrt{2\alpha - \beta x^2}. \tag{1.45}$$

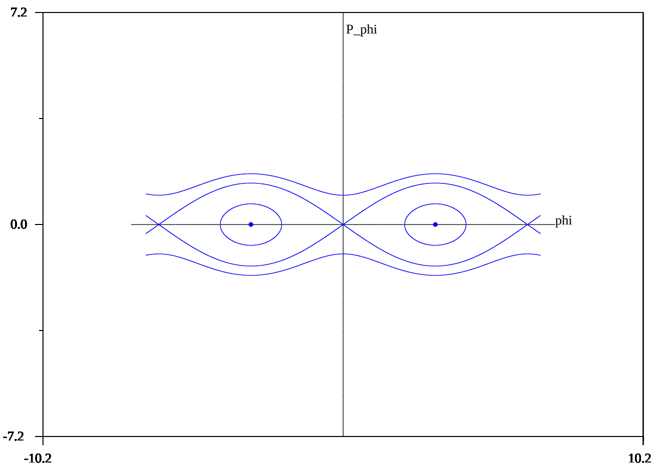
Hai risolto l'eq. di H.J. , quindi puoi scrivere le formule di quadratura (cioé la soluzione in forma implicita delle equazioni del moto) procedendo cosí: chiama q_α, q_β le nuove coordinate associate ai nuovi impulsi α, β; le determini attraverso W:

$$\begin{aligned} q_\alpha &= \partial_\alpha W = \pm\int^x \tfrac{dx}{\sqrt{2\alpha - \beta x^2}} \\ q_\beta &= \partial_\beta W = \pm\int^x \tfrac{-x^2\,dx}{2\sqrt{2\alpha - \beta x^2}} \pm \int^\phi \tfrac{d\phi}{2\sqrt{\beta + \cos\phi}}. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Nota che ai fini della soluzione esplicita del moto, sono questi gli integrali che può essere utile calcolare esplicitamente, e non quelli che definiscono W. Le formule di quadratura le ottieni dalle equazioni di Hamilton nelle nuove variabili che ti dicono che α, β, $q_\beta = c_2$ sono costanti, mentre $q_\alpha(t) = c_1 + t$:

$$\begin{aligned} c_1 + t &= \partial_\alpha W = \pm \int^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2\alpha - \beta x^2}} \\ c_2 &= \partial_\beta = \pm \int^{x(t)} \frac{-x^2\, dx}{2\sqrt{2\alpha - \beta x^2}} \pm \int^{\phi(t)} \frac{d\phi}{2\sqrt{\beta + \cos\phi}}. \end{aligned} \tag{1.47}$$

b) Hai due integrali primi α, β. Questo ti permette di capire come è fatto il moto (analisi qualitativa). Procedi cosí. Controlla per prima cosa quali sono i valori possibili per i due integrali primi: $\beta = p_\phi^2 + \cos\phi$, dunque $\beta \geq -1$. La proiezione dell'orbita sul piano coordinato $\phi\, p_\phi$, è costituita dai punti $(\pm\frac{\pi}{2}, 0)$ per $\beta = -1$; da due curve chiuse per $-1 < \beta < 1$; due separatrici (omocline per la periodicità di ϕ) ed un punto fisso per $\beta = 1$; due curve periodiche per $\beta > 1$.

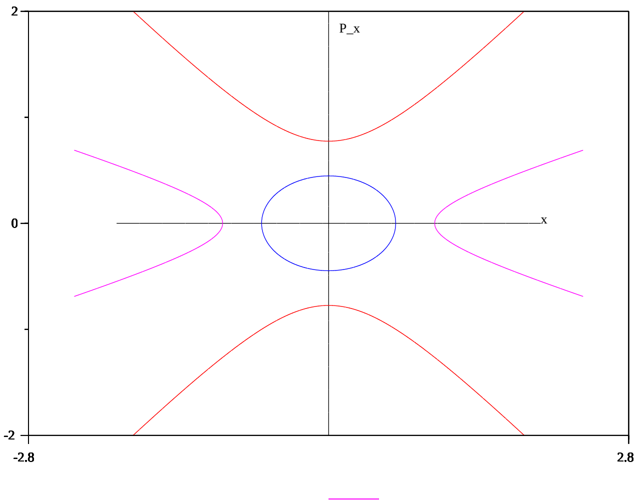


La proiezione dell'orbita sul piano $x\, p_x$ è fatta cosí: se $\beta > 0$ deve essere $\alpha = \frac{1}{2}(p_x^2 + \beta x^2) > 0$, quindi la proiezione è una curva chiusa simmetrica rispetto agli assi, che interseca l'asse delle x nei punti $x = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}$; se $\beta < 0$, e $\alpha > 0$, la proiezione consiste in due curve aperte che intersecano l'asse delle p_x in $p_x = \pm\sqrt{2\alpha}$; se $\beta < 0$, $\alpha < 0$ due curve aperte che intersecano l'asse delle x in $x = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}$.
Dunque, se $\alpha > 0$ e $0 < \beta < 1$, l'orbita vive sul prodotto diretto delle due curve chiuse proiezioni sui due piani coordinati; chiama $C_\phi(\alpha, \beta)$, $C_x(\alpha, \beta)$ queste due curve rispettivamente. L'orbita vive dunque su una varietà in $\mathbb{R}^4$ diffeomorfa ad un toro bidimensionale. In questo caso ha senso tentare di scrivere le variabili azione-angolo, cioé di tentare di descrivere il moto attraverso delle variabili angolari che esprimano la rotazione sul toro. Ci riesci scegliendo come nuovi impulsi non α, β, ma delle loro opportune funzioni (variabili d'azione) che determini nel modo seguente: saranno gli integrali della forma $p\, dq$, divisi per 2π , sulle curve che hai ottenuto proiettando il moto sui piani coordinati; tali integrali dipendono evidentemente da α, β:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{C_\phi(\alpha,\, \beta)} p_\phi\, d\phi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\arccos(-\beta)} \sqrt{\beta + \cos\phi}\, d\phi \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{C_x(\alpha,\, \beta)} p_x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}} \sqrt{2\alpha - \beta x^2}\, dx. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Hai introdotto I_1, I_2 come funzioni di α, β, in linea di principio puoi invertire questa funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, per ottenere α, β in funzione di I_1, I_2; la funzione generatrice adesso è W pensata come funzione di I_1, I_2 attraverso α, β. Questa scelta assicura che le coordinate coniugate sono delle variabili angolari, sono cioé periodiche di periodo 2π; chiama $\gamma_1\, \gamma_2$ queste nuove variabili. Chi è la nuova Hamiltoniana? Evidentemente $K(I_1, I_2) = \alpha(I_1, I_2)$, dunque le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned} \dot\gamma_1 &= \partial_{I_1}\alpha(I_1, I_2) \qquad \dot I_1 = 0 \\ \dot\gamma_2 &= \partial_{I_2}\alpha(I_1, I_2) \qquad \dot I_2 = 0. \end{aligned} \tag{1.49}$$



Nota che la regione $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$ non è l'unica alla quale corrispondono moti quasi periodici sul toro. Infatti anche se $\alpha > 0$ e $\beta > 1$ il moto è quasi periodico sul toro; l'unica differenza è che la curva chiusa nel piano ϕ, p_ϕ é $\sqrt{\beta + \cos\phi}$ al variare di $\phi \in [0, 2\pi]$, quindi $I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\beta + \cos\phi}\, d\phi$. Nota che nonostante ϕ sia già una variabile angolare, che descrive con periodicità 2π la proiezione dell'orbita, non è la variabile angolare giusta perché la sua velocità angolare non è costante.

c) Le frequenze $\omega_i = \partial_{I_i}\alpha(I_1, I_2)$ sono costanti, in quanto dipendono da I_1, I_2 che sono delle costanti del moto; essendo γ_i degli angoli, in effetti ω_i sono le frequenze delle rotazioni. Il moto nelle singole variabili angolari è dunque una rotazione con velocità angolare costante; globalmente è un moto quasi-periodico su un toro.

Come calcoli le frequenze ω_i? Devi calcolare le derivate di α rispetto alle variabili d'azione, peró hai a disposizione solo l'espressione delle variabili d'azione in funzione di α, β. Dunque procedi cosí:

$$\begin{pmatrix} \partial_{I_1}\alpha & \partial_{I_2}\alpha \\ \partial_{I_1}\beta & \partial_{I_2}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\alpha I_1 & \partial_\beta I_1 \\ \partial_\alpha I_2 & \partial_\beta I_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\partial_\alpha I_1 \partial_\beta I_2 - \partial_\alpha I_2 \partial_\beta I_1} \begin{pmatrix} \partial_\beta I_2 & -\partial_\beta I_1 \\ -\partial_\alpha I_2 & \partial_\alpha I_1 \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

Ora:

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha I_1 = 0 && l\partial_\alpha I_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha - \beta x^2}} dx \\ &\partial_\beta I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\arccos(-\beta)} \frac{1}{\sqrt{\beta + \cos\phi}} d\phi && \partial_\beta I_2 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}} \frac{x^2}{\sqrt{2\alpha - \beta x^2}} dx. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Infine:

$$\omega_1(\alpha, \beta) = -\frac{\partial_\beta I_2}{\partial_\alpha I_2 \partial_\beta I_1} \qquad \omega_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{\partial_\alpha I_2}. \tag{1.52}$$

1.5.3 Un altro esempio

Considera l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}P_y^2(1 + x^2) + \frac{1}{2}(1 + x^2)y^2. \tag{1.53}$$

a) Risolvi, per separazione di variabili, l'equazione di Hamilton Jacobi per H.

b) Determina la regione dello spazio delle fasi in cui il moto può essere descritto in variabili azione-angolo.

c) Calcola esplicitamente l'espressione dell'Hamiltoniana in termini delle variabili d'azione, e le frequenze dei moti multiperiodici.

d) Considera il moto di dato iniziale

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & y(0) &= 0 \\ P_x(0) &= a & P_y(0) &= 1, \end{aligned} \tag{1.54}$$

con $a \in \mathbb{R}$; trova i valori di a per cui è periodico.

e) Trova il periodo del moto per $a = 1$.

f) Discuti la stabilità della soluzione stazionaria

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0 & y(0) = 0 \\ P_x(0) = 0 & P_y(0) = 0. \end{array} \tag{1.55}$$

Soluzione

a) Cerca una soluzione dell'equazione caratteristica di Hamilton-Jacobi del tipo:

$$W(x, y, \alpha, \beta) = A(x) + B(y). \tag{1.56}$$

Sostituendo:

$$\frac{1}{2}(\partial_x A)^2 + \frac{1}{2}(1 + x^2)\left((\partial_y B)^2 + y^2\right) = \alpha. \tag{1.57}$$

Ottengo la soluzione ponendo $(\partial_y B)^2 + y^2 = \beta$:

$$\begin{array}{l} B(y, \beta) = \pm \int^y dy \sqrt{\beta - y^2} \\ A(x, \alpha, \beta) = \pm \int^x dx \sqrt{2\alpha - \beta - \beta x^2}. \end{array} \tag{1.58}$$

Nota che sono ammissibili solo i valori $\beta \geq 0$ e $\alpha \geq \frac{\beta}{2}$, altrimenti ottieni per A e B quantità immaginarie.

b) La regione dello spazio delle fasi in cui il moto é multiperiodico è data da $\beta > 0$, $\alpha > \frac{\beta}{2}$.

c) Devi calcolare:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\beta}} dy \sqrt{\beta - y^2} \\ I_2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha - \beta}{\beta}}} dx \sqrt{2\alpha - \beta - \beta x^2}. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Ricorda che

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{2h}}{\omega}} dq \sqrt{2h - \omega^2 q^2} = \frac{h}{\omega}. \tag{1.60}$$

Ottieni:

$$I_1 = \frac{\beta}{2}, \qquad I_2 = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \tag{1.61}$$

Dunque la nuova Hamiltoniana è:

$$K = \alpha = \sqrt{2I_1} I_2 + I_1. \tag{1.62}$$

Le frequenze:

$$\begin{array}{l} \omega_1 = \frac{I_2}{\sqrt{2I_1}} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\beta} \\ \omega_2 = \sqrt{2I_1} = \sqrt{\beta}. \end{array} \tag{1.63}$$

d) Sostituendo il valore del dato iniziale in α, β ottieni:

$$\omega_1 = 1 + \frac{a^2}{2}, \ \omega_2 = 1 \tag{1.64}$$

Il moto è periodico se e solo se $a^2 \in \mathbb{Q}$.

e) per $a = 1$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2}$, dunque $T = 3T_1 = 2T_2$. $T_2 = \frac{2\pi}{\omega}_2 = 2\pi$, dunque $T = 4\pi$.

f) Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = P_x & \dot{y} = P_y(1 + x^2) \\ \dot{P}_x = -x\left(P_y^2 + y^2\right) & \dot{P}_y = -y(1 + x^2). \end{array} \tag{1.65}$$

Considera il dato iniziale:

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0 & y(0) = 0 \\ P_x(0) = \varepsilon & P_y(0) = 0, \end{array} \tag{1.66}$$

che è una piccola perturbazione della posizione stazionaria. La soluzione delle equazioni di Hamilton è:

$$\begin{array}{ll} x(t) = -t\varepsilon & y(t) = 0 \\ P_x(t) = \varepsilon & P_y(t) = 0. \end{array} \tag{1.67}$$

Dunque la posizione di equilibio è instabile.

1.6 Teoria delle perturbazioni

Supponi di avere $H(\phi, I) = H_0(I)+\varepsilon H_1(\psi, I)$, dove le variabili $(\psi,\ I)$ sono variabili azione-angolo per l'hamiltoniana cosiddetta imperturbata H_0.
Stai cioè pensando di perturbare con $\varepsilon H_1(\psi, I)$ un'hamiltoniana integrabile H_0, pensando che ε sia un parametro reale piccolo. Per l'hamiltoniana H l variabili d'azione non sono piú costanti del moto (infatti H dipende anche dalle ψ), e il nuovo sistema non sarà in generale integrabile; peró a tempi fissati ti aspetti di compiere un errore di oridine ε considerando la soluzione della hamoltoniana imperturbata (scrivi le equazioni del moto: troverai $\dot{I} = O(\varepsilon)$). Un modo per migliorare questa approssimazione è quello di cercare una trasformazione canonica che porti l'hamiltoniana data in una in cui all'ordine zero non ci sia dipendenza dalle variabili angolari, e la dipendenza da ε sia al secondo ordine, cioè $K(\psi, A) = K_0(A) + O(\varepsilon^2)$.

Come si fa? Conviene cercare una funzione generatrice vicina alla funzione generatrice dell'identità, infatti all'ordine 0 in ε la trasformazione che stiamo cercando non deve operare, perché l'hamiltoniana all'odine 0 è già in variabili azione-angolo, cioè integrabile. Dunque cerchiamo $S(\psi, A) = \psi \cdot A + \varepsilon W(\psi, A)$. La trasfomazione indotta da S è data implicitamente da:

$$\begin{array}{l} I = \partial_\phi S = A + \varepsilon \partial_\phi W(\phi, A) \\ \psi = \partial_A S = \phi + \varepsilon \partial_A W(\phi, A). \end{array} \tag{1.68}$$

Non è esplicita, peró $I = A + O(\varepsilon)$, $\psi = \phi + O(\varepsilon)$. Ma allora possiamo esplicitarla in $(A,\ \psi)$ almeno fino all'ordine ε che è quello che ci interessa:

$$\begin{array}{l} \phi = \psi - \varepsilon \partial_A W(\phi, A) = \psi - \varepsilon \partial_A W(\phi + O(\varepsilon), A) = \psi - \partial_A W(\psi, A) + O(\varepsilon^2) \\ I = A + \varepsilon \partial_\phi W(\psi + O(\varepsilon), A) = A + \varepsilon \partial_\phi W(\psi, A) + O(\varepsilon^2). \end{array} \tag{1.69}$$

La nuova Hamiltoniana sarà:

$$\begin{array}{l} K = H_0(A + \varepsilon \partial_\phi W(\psi, A) + O(\varepsilon^2)) \\ +\varepsilon H_1(A + \varepsilon \partial_\phi W(\psi, A) + O(\varepsilon^2), \psi - \varepsilon \partial_A W(\psi, A) + O(\varepsilon^2)). \end{array} \tag{1.70}$$

Sviluppando fino all'ordine ε:

$$K(\psi, A) = H_0(A) + \varepsilon \left(\partial_A H_0(A) \cdot \partial_\psi W(\psi, A) + H_1(\psi, A)\right) + O(\varepsilon^2). \tag{1.71}$$

Il problema è risolto se riusci a trovare W tale che l'ordine ε sia nullo, cioè:

$$\partial_A H_0(A) \cdot \partial_\psi W(\psi, A) + H_1(\psi, A) = 0. \tag{1.72}$$

Conviene lavorare in serie di Fourier, infatti le variabili ψ sono variabili angolari. Ti ricordo che stiamo lavorando in dimensione maggiore di uno, dunque nelle formule precedenti e seguenti, se d è la dimensione, ψ, A, k sono vettori di dimensione d. La serie di Fourier è definita da:

$$W(\psi, A) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{ik\cdot\psi} \hat{W}(k, A), \tag{1.73}$$

dove $k \cdot \psi = \sum_{j=1}^d k_j \psi_j$, e i coefficienti di Fourier sono dati da:

$$\hat{W}(k, A) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} d\psi_1 \dots d\psi_d e^{-ik\cdot\psi} W(\psi, A), \tag{1.74}$$

dove T^d è il toro d-dimensionale su cui vivono le variabili angolari $\psi_1, \dots \psi_d$.

Per trovare W ti basta dunque trovarne i coefficienti di Fourier; l'equazione per i coefficienti è:

$$i\hat{W}(k,A)\left(\partial_A H_0(A)\cdot k\right) + \hat{H}_1(k,A) = 0. \tag{1.75}$$

Quando puoi risolvere questa equazione lineare per $\hat{W}(k,A)$? Evidentemente ci riesci a meno che $\partial_A H_0(A)\cdot k = 0$ e $\hat{H}_1(k,A) \neq 0$ e riesci a risommare la serie che definisce W. Se H_1 ha solo un numero finito di coefficienti di Fourier possono accadere sostanzialmente tre cose.

a) I valori di k per cui $\partial_A H_0(A)\cdot k = 0$ annullano anche $\hat{H}_1(k,A)$; dunque

$$\hat{W}(k,A) = \begin{cases} i\frac{\hat{H}_1(k,A)}{\partial_A H_0(A)\cdot k} & \text{se} \quad \hat{H}_1(k,A) \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases} \tag{1.76}$$

quindi W l'hai trovata e dunque sei riuscito a portare la perturbazione al secondo ordine; la nuova hamiltoniana all'ordine 0 è $K_0(A) = H_0(A)$, (cioè sono uguali, ma la variabile A non è I...).

b) Termine di media non nullo: come sopra tranne che $\hat{H}_1(0),A) \neq 0$ (qui O dentro H è il vettore nullo in $\mathbb{Z}^d$; palesemente non puoi definire $\hat{W}(0,A)$ perché nell'equazione ha coefficiente 0 davanti; peró $\hat{H}_1(0),A) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d} d\psi W(\psi,A)$ è il valor medio sul toro di H_1, dunque non dipende dalle variabili angolari, puoi cioè incorporarlo dentro H_0:

$$H(\phi,I) = \left(H_0(I) + \varepsilon\hat{H}_1(0,I)\right) + \varepsilon\tilde{H}_1(\phi,I), \tag{1.77}$$

dove $\tilde{H}_1(\phi,I) = H_1(\phi,I) - \hat{H}_1(0),I)$ ha ora media nulla, cioè $\hat{\tilde{H}}_1(0,I) = 0$; ti riduci cioè al caso precedente, peró la nuova hamiltoniana all'ordine 0 nella nupva variabile A è $K_0(A) = H_0(A) + \varepsilon\hat{H}_1(0,A)$;

c) risonanza: per qualche k diverso del vettore nullo, $\partial_A H_0(A)\cdot k = 0$ mentre $\hat{H}_1(k,A) \neq 0$; in tal caso *non puoi* rimuovere la perturbazione di ordine ε per quel particolare valore di k.

1.6.1 Esempi

Considera l'hamiltoniana $H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(q_1^2 + \omega^2 q_2^2\right) + \varepsilon q_1^2 q_2$, con $\omega \neq 0$. Per $\varepsilon = 0$ è intergabile, infatti è la somma delle hamiltoniane di due oscillatori armonici disaccoppiati: $H_0 = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega^2 q_2^2)$. Passa dunque alle variabili azione-angolo separatamente nella coppia di variabili coniugate. Ottieni

$$\begin{array}{ll} q_1 = \sqrt{2I_1}\sin\phi_1 & I_1 = \alpha_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) \\ q_2 = \sqrt{\frac{2I_1}{\omega}}\sin\phi_2 & I_2 = \alpha_1 = \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega^2 q_2^2). \end{array} \tag{1.78}$$

In variabili azione angolo per l'hamiltoniana con $\varepsilon = 0$, tutta l'hamiltoniana assegnata, diventa: $H = H_0 + \varepsilon H_1 = I_1 + \omega I_2 + \varepsilon\left(a\sin^2\phi_1\sin\phi_2\right)$, dove $a(I_1,I_2) = 2\sqrt{\frac{2}{\omega}}I_1 I_2^{\frac{1}{2}}$. Tenta di rimuovere il primo ordine della perturbazione, cerca cioè una funzione $W(\psi,A)$ tale che valga in trasformata di Fourier:

$$i\hat{W}(k,A)\left(\partial_A H_0(A)\cdot k\right) + \hat{H}_1(k,A) = 0. \tag{1.79}$$

Ti serve trovare la trasformata di H_1. La dipendenza angolare è $\sin^2\phi_1\sin\phi_2$. Ora

$$\sin\psi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\psi} - e^{-i\psi}\right). \tag{1.80}$$

Dunque, svolgendo il quadrato e i prodotti:

$$H_1 = \frac{a}{4i}\left(e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2}\right) - \frac{a}{8i}\left(e^{i(2\psi_1+\psi_2)} - e^{-i(2\psi_1+\psi_2)} + e^{-i(2\psi_1-\psi_2)} - e^{i(2\psi_1-\psi_2)}\right). \tag{1.81}$$

Dunque i valori di k per cui la trasformata di Fourier di H_1 non è nulla, sono

$$k = \pm\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}. \tag{1.82}$$

Per controllare se ti trovi nel caso a) o nel caso c) (il caso b) è escluso perché H_1 è a media nulla, cioè la trasformata per $k = (0,0)$ è zero), devi determinare $\partial_A H_0(A) = \binom{1}{\omega}$. Controlla se $k\cdot\partial_A H_0(A) = 0$. Vale $k\cdot\partial_A H_0(A) = k_1 + \omega k_2$, ma allora per poter rimuovere il primo ordine ti basta che $k_1 + \omega k_2 \neq 0$ per i valori di k che hai determinato sopra. Sostituendo: ω, $2+\omega$, $2-\omega$ devono essere diversi da zero, cioè $\omega \neq 0, 2, -2$. In tal caso puoi procedere e ottieni:

$$\begin{aligned} &\hat{W}(\pm(0,1), A_1, A_2) = \tfrac{I_1 I_2^{\frac{1}{2}}}{\omega\sqrt{2\omega}}; \quad \hat{W}(\pm(2,1), A_1, A_2) = -\tfrac{I_1 I_2^{\frac{1}{2}}}{2(2+\omega)\sqrt{2\omega}} \\ &\hat{W}(\pm(2,-1), A_1, A_2) = \tfrac{I_1 I_2^{\frac{1}{2}}}{2(2-\omega)\sqrt{2\omega}}. \end{aligned} \tag{1.83}$$

Chi è la nuova hamiltoniana all'ordine 0? $K_0 = A_1 + \omega A_2$.

Esercizio 1.13 *Considera $H = I_1\omega_1 + \frac{I_2^2\omega_2}{2} + \varepsilon I_1^2 I_2^2 \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2$. Rimuovi la perturbazioe al primo ordine.*

Soluzione
Usando l'espressione esponenziale del seno, si ottiene:

$$\begin{aligned} &\sin^2\psi_1 \sin^2\psi_2 = \\ &\frac{1}{16}\Big(4 + e^{i(2\psi_1-2\psi_2)} + e^{-i(2\psi_1-2\psi_2)} + e^{i(2\psi_1+2\psi_2)} + e^{i(2\psi_1+2\psi_2)} \\ &-2e^{i2\psi_1} - 2e^{-i2\psi_1} - 2e^{i2\psi_2} - 2e^{-i2\psi_2}\Big). \end{aligned} \tag{1.84}$$

Dunque:

$$\hat{H}_1(k_1, k_1, A_1, A_2) = A_1^2 A_2^2 \cdot \begin{cases} \frac{1}{4} & k = (0,0) \\ \frac{1}{16} & k = \pm(2,2),\ \pm(2,-2) \\ -\frac{1}{8} & k = \pm(2,0),\ \pm(0,2) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1.85}$$

La media è nulla, dunque devi portare il termine di media in H_0, cioè l'hamiltoniana imperturbata che devi considerare è

$$\tilde{H}_0 = H = I_1\omega_1 + \frac{I_2^2\omega_2}{2} - \frac{\varepsilon}{4} I_1^2 I_2^2. \tag{1.86}$$

Sotto quali condizioni riesci a rimuovere la perturbazione al primo ordine? Calcola le frequenze $\partial_A H_1 = \binom{\omega_1}{A_2\omega_2}$. Allora deve essere:

$$\omega_1 \pm 2A_2\omega_2 \neq 0, \ \ \omega_1 \neq 0, \ \ A_2\omega_2 \neq 0. \tag{1.87}$$

In tal caso:

$$\hat{W}(\pm(2,-2), A) = \pm i \frac{A_1^2 A_2^2}{32(\omega_1 - A_2\omega_2)},\ \hat{W}(\pm(2,2), A) = \pm i \frac{A_1^2 A_2^2}{32(\omega_1 + A_2\omega_2)}, \tag{1.88}$$

$$\hat{W}(\pm(2,0), A) = \mp i \frac{A_1^2 A_2^2}{16\omega_1},\ \hat{W}(\pm(0,2), A) = \mp i \frac{A_1^2 A_2^2}{16\omega_2}. \tag{1.89}$$

La nuova hamiltonianana all'ordine 0 (che in realtà dipende da ε, ma non dalle variabili angolari) è $K_0 = A_1\omega_1 + \frac{A_2^2\omega_2}{2} - \frac{\varepsilon}{4}A_1^2 A_2^2$.

Che succede nelle risonanze, cioè, ad esempio, se ti interessa il moto nella regione intorno a $A_2 = \frac{2\omega_1}{\omega_2}$? Non puoi rimuovere tutto il primo ordine; in pratica sopravvive un termine di ordine ε che dipende dalle ψ. Operando come sopra, non puoi risolvere l'equazione per i coefficienti di W con $k = \pm(2,-2)$; i corripondenti termini di H_1 sopravvivono , e sono:

$$\frac{A_1^2 A_2^2}{16}\left(e^{i(2\psi_1-2\psi_2)} + e^{-i(2\psi_1-2\psi_2)}\right) = \frac{A_1^2 A_2^2}{8}\cos(2\psi_1 - 2\psi_2). \tag{1.90}$$

L'hamiltoniana che ottieni è:

$$K = A_1\omega_1 + \frac{A_2^2\omega_2}{2} - \frac{\varepsilon}{4}A_1^2 A_2^2 + \varepsilon\frac{A_1^2 A_2^2}{8}\cos(2\psi_1 - 2\psi_2). \tag{1.91}$$