

Esercizi di Meccanica Razionale

AA 1999-2000, corsi Marchioro, Negrini, esercitatore D. Benedetto

2 ottobre 2000

Indice

1	Alcuni esercizi svolti in dettaglio	3
1.1	Problema	3
1.1.1	I gradi di libertà e la scelta delle coordinate	3
1.1.2	Il calcolo dell'energia cinetica	3
1.1.3	Il calcolo dell'energia potenziale	4
1.1.4	La Lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange	4
1.1.5	L'Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton	4
1.1.6	La determinazione degli equilibri	5
1.1.7	La stabilità delle posizioni di equilibrio	6
1.1.8	Le piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili	6
1.1.9	Gli integrali primi e la riduzione dei gradi di libertà	6
1.1.10	La versione Hamiltoniana	7
1.2	Problema	8
1.2.1	La determinazione degli equilibri e la loro stabilità	8
1.2.2	Le piccole oscillazioni intorno all'equilibrio stabile	9
1.2.3	Reazione vincolare	9
1.3	Problema	10
1.3.1	I gradi di libertà e la scelta delle coordinate	10
1.3.2	Il calcolo dell'energia cinetica	11
1.3.3	Il calcolo dell'energia potenziale	11
1.3.4	La Lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange	11
1.3.5	L'Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton	12
1.3.6	La determinazione degli equilibri	13
1.3.7	La stabilità delle posizioni di equilibrio	14
1.3.8	Le piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili	15
1.3.9	Gli integrali primi e la riduzione dei gradi di libertà	15
1.3.10	Il controllo dimensionale	16
1.4	Problema	16
1.4.1	Scelta delle coordinate ed equazioni del moto	16

1.4.2	Posizioni di equilibrio	16
1.4.3	Riduzione dei gradi di libertà e analisi qualitativa	17
1.4.4	La rappresentazione dell'orbita	18
1.4.5	Domande varie	18
1.5	Problema	18
2	Le Lagrangiane e le Hamiltoniane “tipiche”	19

I richiami alla bibliografia non sono ovviamente completi: non sono citati tutti i testi, né i testi in bibliografia sono citati tutte le volte che potrebbe essere utile. Me ne scuso con gli studenti e con gli autori.

Questa versione non è definitiva. Possono esserci errori, anche gravi. La versione più recente, e presumibilmente più corretta, è sul sito <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/meccanica>

1 Alcuni esercizi svolti in dettaglio

Lo scopo di questa sezione è illustrare la parte “standard”, quellache non si può non saper fare, degli esercizi nel formalismo Lagrangiano ed Hamiltoniano.

Quindi per tutti i problemi che seguono provvederò a rispondere alle seguenti domande:

- i) Scrivi le equazioni del moto attraverso la Lagrangiana e l’Hamiltoniana.
- ii) Determina le soluzioni di equilibrio e discutine la stabilità. Calcola le frequenze delle piccole oscillazioni intorno agli equilibri stabili.
- iii) Trova le frequenze ed i modi normali delle piccole oscillazioni intorno agli equilibri stabili.
- iv) Determina eventuali integrali primi.
- v) Riduci i gradi di libertà se possibile.

Si giunge alle risposte attraverso procedimenti che non presentano difficoltà concettuali, tutt’al più calcoli laboriosi.

Alcune domande un pò meno standard potrebbero essere:

- vi) Discuti le condizioni iniziali per cui il moto è limitato.
- vii) Discuti l’esistenza di dati iniziali per cui il moto è periodico
- viii) Determina la reazione vincolare per dei moti particolari (specificati nel testo).

Le domande più difficili sono contrassegnate da un asterisco.

Tutti gli esercizi sono dimensionalmente consistenti, cioè la massa non è mai un numero, ma ha le dimensioni di una massa, e così le lunghezze, i raggi, l’accelerazione di gravità etc.. Questo permette la verifica dei calcoli attraverso l’analisi dimensionale, che può essere utile.

ATTENZIONE: nel caso in cui i parametri del problema non siano fisicamente consistenti, (ad esempio se la massa è 1 o il raggio è 3 o il punto è vincolato a muoversi su una curva $y = x^2$ etc.) l’analisi dimensionale è impossibile, a meno di non reintrodurre le dimensioni fisiche nel testo.

1.1 Problema

Un punto materiale di massa m , indicato con P , si muove senza attrito su una retta orizzontale. Un asta priva di massa e lunga L ha un estremo in P . All’altro estremo è fissato un punto materiale di massa m , indicato con Q . Sul sistema agisce la forza di gravità, nella direzione verticale discendente.

1.1.1 I gradi di libertà e la scelta delle coordinate

Devi capire di quanti parametri hai bisogno per descrivere una generica configurazione del sistema. Per specificare la posizione di P è sufficiente il valore della sua ascissa, che chiamerò x , rispetto ad una origine fissata arbitrariamente. In tal caso, detto y l’asse verticale, le coordinate di P saranno $(x, 0)$. Per specificare la posizione di Q è sufficiente conoscere, ad esempio, l’angolo che l’asta forma con la verticale discendente passante per P , che chiamerò ϕ . Quindi le coordinate di Q saranno $(x + L \sin \phi, -L \cos \phi)$. Il problema ha dunque due gradi di libertà.

1.1.2 Il calcolo dell’energia cinetica

Devo calcolare l’energia cinetica di P e di Q e poi sommarle. Per far ciò devo calcolare le velocità dei due punti in termini delle variabili lagrangiane (x, ϕ) e delle loro derivate rispetto al tempo. Evidentemente la velocità del punto P è $(\dot{x}, 0)$, la velocità di Q è

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x + L \sin \phi \\ -L \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} + \dot{\phi} L \cos \phi \\ \dot{\phi} L \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Quadrando e sommando ottengo:

$$T = \frac{m}{2} (2\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}\dot{x}L \cos \phi + L^2 \dot{\phi}^2).$$

Controllo dimensionale: T deve avere le dimensioni di una energia, cioè massa per lunghezza al quadrato su tempo al quadrato. L'espressione trovata è corretta perché \dot{x} è una velocità, L è una lunghezza e $\dot{\phi}$ ha le dimensioni dell'inverso del tempo.

1.1.3 Il calcolo dell'energia potenziale

Devo sommare i contributi dell'energia potenziale, espressi in variabile lagrangiana, delle forze attive che agiscono sui punti. In questo caso la forza di gravità non ha effetto su P , che è vincolato ad una retta orizzontale. Dunque l'unico contributo all'energia potenziale è quello gravitazionale sul punto Q . L'energia potenziale gravitazionale è data dalla massa per la quota per l'accelerazione di gravità.

Quindi $V = -mgL \cos \phi$.

1.1.4 La Lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange

$$L = T - V = \frac{m}{2}(2\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}\dot{x}L \cos \phi + L^2\dot{\phi}^2) + mgL \cos \phi.$$

Per scrivere le equazioni del moto, devo prima derivare la lagrangiana nelle variabili \dot{x} e $\dot{\phi}$, e calcolare quindi gli *impulsi coniugati* alle variabili x e ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= 2m\dot{x} + mL\dot{\phi} \cos \phi \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= mL^2\dot{\phi} + mL\dot{x} \cos \phi \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ora devo considerare gli impulsi coniugati come funzioni del tempo attraverso le variabili x , ϕ , \dot{x} , $\dot{\phi}$, e scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{\partial L}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Come prima equazione ottengo

$$2m\ddot{x} + mL\ddot{\phi} - mL\dot{\phi}^2 \sin \phi = 0,$$

Come seconda

$$mL^2\ddot{\phi} + mL\ddot{x} \cos \phi - mL\dot{x}\dot{\phi} \sin \phi = -mL\dot{x}\dot{\phi} \sin \phi - mgL \sin \phi,$$

che si può semplificare in:

$$mL^2\ddot{\phi} + mL\ddot{x} \cos \phi = -mgL \sin \phi.$$

Verifica che le equazioni sono dimensionalmente corrette, tenendo presente che g ha le dimensioni di una accelerazione.

1.1.5 L'Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton

Per il calcolo dell'Hamiltoniana si procede come segue. Per prima cosa si definiscono le nuove variabili, che sono gli impulsi coniugati:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + mL\dot{\phi} \cos \phi \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mL^2\dot{\phi} + mL\dot{x} \cos \phi. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Riconosci che p_x ha le dimensioni di una quantità di moto (massa per velocità) e che p_ϕ ha le dimensioni di un momento della quantità di moto (massa per lunghezza per velocità).

Dopo di che si ricavano le espressioni di \dot{x} e $\dot{\phi}$ in termini delle nuove variabili. Per fare questo si deve risolvere il sistema di equazioni lineari 1.4 rispetto alle variabili \dot{x} e $\dot{\phi}$. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{Lp_x - p_\phi \cos \phi}{mL(2 - \cos^2 \phi)} \\ \dot{\phi} &= \frac{-Lp_x \cos \phi + 2p_\phi}{mL^2(2 - \cos^2 \phi)}\end{aligned}\quad (1.5)$$

A questo punto l'Hamiltoniana è data da

$$H(p_x, p_\phi, x, \phi) = p_x \dot{x} + p_\phi \dot{\phi} - L(\dot{x}, \dot{\phi}, x, \phi),$$

dove bisogna sostituire a \dot{x} e $\dot{\phi}$ i valori delle espressioni 1.5. Il lettore completi i calcoli (per una strada leggermente più veloce vedi sezione 2).

L'espressione dell'Hamiltoniana è:

$$H = \frac{1}{2mL^2(2 - \cos^2 \phi)}(p_x^2 L^2 - 2p_x p_\phi L \cos \phi + 2p_\phi^2) - mgL \cos \phi.$$

Il lettore verifichi che tutti i termini hanno le dimensioni di una energia.

Le equazioni del moto in formalismo hamiltoniano sono

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi}.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{Lp_x - p_\phi \cos \phi}{mL(2 - \cos^2 \phi)} \\ \dot{\phi} &= \frac{-Lp_x \cos \phi + 2p_\phi}{mL^2(2 - \cos^2 \phi)} \\ \dot{p}_x &= 0 \\ \dot{p}_\phi &= -mgL \sin \theta - 2\frac{\sin \phi \cos \phi}{mL^2(2 - \cos^2 \phi)^2}(p_x^2 L^2 - 2p_x p_\phi L \cos \phi + 2p_\phi^2) + \frac{\sin \phi p_x p_\phi}{mL(2 - \cos^2 \phi)}.\end{aligned}\quad (1.7)$$

1.1.6 La determinazione degli equilibri

Astrattamente, le posizioni di equilibrio in formalismo lagrangiano si ottengono dalle equazioni trovando i valori di $x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}$ che risolvono identicamente le equazioni. Ovviamente, essendo il sistema di partenza meccanico, deve essere $(\dot{x}, \dot{\phi}) = (0, 0)$. Sostituendo questi valori nelle equazioni, le posizioni di equilibrio si ottengono cercando i valori di x e ϕ per cui \ddot{x} e $\ddot{\phi}$ sono nulli. E' facile rendersi conto che ciò accade se e solo se

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x, \phi)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial V(x, \phi)}{\partial \phi} &= 0.\end{aligned}\quad (1.8)$$

In definitiva le posizioni di equilibrio si ottengono annullando il gradiente, rispetto alle coordinate lagrangiane, dell'energia potenziale. In questo caso V non dipende da x , dunque la condizione si riduce a $\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = mgL \sin \phi = 0$, che ha come soluzioni $\phi = 0, \pi$. (Trascuro i multipli di 2π perché fisicamente le posizioni $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, etc.$ sono indistinguibili). Quante sono le posizioni di equilibrio? Ovviamente infinite! Infatti, qualunque sia \bar{x} , le posizioni $(x, \phi) = (\bar{x}, 0)$ e $(x, \phi) = (\bar{x}, \pi)$ sono di equilibrio: l'asta è verticale e nessuna forza attiva la sposta se la velocità iniziale è nulla.

1.1.7 La stabilità delle posizioni di equilibrio

I punti di minimo stretto dell'energia potenziale sono punti di equilibrio stabili, i punti non di minimo (punti di sella e punti di massimo) sono punti di equilibrio instabili.

È abbastanza evidente che quando $(x, \phi) = (\bar{x}, \pi)$, essendo l'asta verticale ma con l'estremo Q in alto rispetto a P , la posizione è instabile. Infatti l'energia potenziale $V(x, \phi) = -mg \cos \phi$ ha un massimo nella variabile ϕ quando $\phi = \pi$. V non dipende da x , ma questo implica solo che il massimo di V come funzione di due variabili ha un massimo non stretto, nel senso che è raggiunto qualunque sia x .

Le altre posizioni $(x, \phi) = (\bar{x}, 0)$ corrispondono al minimo di V nella variabile ϕ . In questo caso però il minimo non è stretto, infatti qualunque sia \bar{x} , l'energia potenziale assume il valore di minimo. Questo suggerisce che la posizione sia instabile. Infatti consideriamo un dato iniziale arbitrariamente vicino, per esempio $(x_0, \phi_0, \dot{x}_0, \dot{\phi}_0) = (\bar{x}, 0, \varepsilon, 0)$. La prima equazione di Lagrange mi dice che l'impulso di conserva (x è ciclica). Dunque, per tutti i tempi:

$$2\dot{x} + L\dot{\phi} \cos \phi = 2\varepsilon.$$

Fisicamente, p_x è la quantità di moto totale (verificare!), ovvero la derivata rispetto al tempo della velocità del baricentro. Ma allora l'equazione appena scritta afferma che il baricentro compie un moto rettilineo uniforme. Quindi se aspetto un tempo sufficiente, il baricentro sarà arbitrariamente lontano dalla posizione iniziale che era \bar{x} . Più formalmente, integrando nel tempo l'equazione appena scritta, e ricordandomi che $\dot{\phi} \cos \phi = -\frac{d}{dt} \sin \phi(t)$, ottengo

$$x(t) = \bar{x} + \varepsilon t + \frac{L}{2} \sin(\phi(t)).$$

Ma allora $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \pm\infty$ (a seconda del segno di ε), infatti qualunque sia la legge oraria per $\phi(t)$, la funzione $\sin(\phi(t))$ è limitata.

1.1.8 Le piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili

Non ci sono posizioni di equilibrio stabili, quindi non ha senso parlare di piccole oscillazioni del moto nelle due variabili. Si potranno considerare le piccole oscillazioni del moto unidimensionale al quale posso ridurre il moto per la conservazione della quantità di moto.

1.1.9 Gli integrali primi e la riduzione dei gradi di libertà

La Lagrangiana non dipende dal tempo, dunque l'energia meccanica $E = T + V$ si conserva.

Inoltre, come già visto, l'equazione di Lagrange relativa ad x , afferma che

$$\frac{d}{dt} p_x = \frac{d}{dt} (2m\dot{x} + mL\dot{\phi} \cos \phi) = 0.$$

Infatti la variabile x è *ciclica*, cioè L non dipende da x . Quindi p_x , che nel seguito indico con P , si conserva.

Avendo a disposizione due integrali primi per un problema a due gradi di libertà, posso ridurre ad uno i gradi di libertà e portare il moto alle quadrature (cioè scrivere, almeno in forma implicita, la soluzione delle equazioni del moto).

Si procede così: scrivo l'energia meccanica, che è una quantità conservata:

$$E = \frac{m}{2} (2\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}\dot{x}L \cos \phi + L^2\dot{\phi}^2) - mgL \cos \phi$$

Usando la relazione

$$P = 2m\dot{x} + mL\dot{\phi} \cos \phi,$$

ricavo

$$\dot{x} = \frac{P}{2m} - \frac{L}{2} \dot{\phi} \cos \phi. \quad (1.9)$$

Sostituisco il valore trovato nell'espressione per E :

$$E = \frac{m}{2} \left(L^2 \dot{\phi}^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \phi \right) + \frac{P^2}{2m^2} \right) - mg \cos \phi.$$

Poiché E si conserva anche dopo aver sostituito a \dot{x} la sua espressione in termini di $\dot{\phi}$ e dell'altro integrale primo del moto, dall'espressione di E posso ottenere la formula di quadratura attraverso il solito procedimento: ricavo $\dot{\phi}$ in termini di E e ϕ e integro.

$$\dot{\phi} = \pm 2 \sqrt{\frac{E - \frac{P^2}{4m} + mgL \cos \phi}{2 - \cos^2 \phi}}, \quad (1.10)$$

$$t = \pm \frac{1}{2} \int^{\phi} d\phi \sqrt{\frac{2 - \cos^2 \phi}{E - \frac{P^2}{4m} + mgL \cos \phi}}. \quad (1.11)$$

Questa espressioni differiscono da quelle tipiche dei moti unidimensionale solo per la presenza del fattore $2 - \cos^2 \phi$, che comunque è sempre positivo. Dunque per l'analisi qualitativa del moto limitata alla variabile ϕ si procede come sempre.

In particolare, se l'energia meccanica e l'impulso P sono tali che

- a) $E - \frac{P^2}{4m} = -mgL$: $\phi(t) = 0$ (equilibrio STABILE per il moto nella sola variabile ϕ)
- b) $-mgL < E - \frac{P^2}{4m} < mgL$: il moto in ϕ è periodico.
- c) $E - \frac{P^2}{4m} = mgL$: o $\phi(t) = \pi$ (equilibrio INSTABILE), oppure ϕ compie un moto a meta asintotica.
- d) $E - \frac{P^2}{4m} > mgL$: ϕ compie periodicamente tutta la rotazione tra 0 e 2π .

Domande: Perché non è possibile che $E - \frac{P^2}{4m} < -mgL$? Scrivi il periodo nei casi b) e d). (*) Calcola il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile $\phi = 0$ e confrontalo con in periodo delle piccole oscillazioni che avresti nel caso che l'altro estremo dell'asta fosse fisso (risposta: è $\sqrt{2}$ volte più grande).

Osservazione: Ai fini dell'analisi qualitativa, limitata alla variabile ϕ , potevo sostituire $E - \frac{P^2}{4m}$ con E , infatti $\frac{P^2}{4m}$ è costante. L'ho lasciato com era per non perdere traccia dell'energia meccanica del sistema nelle due variabili.

Una volta noto, attraverso la formula di quadratura 1.11, il moto nella variabile ϕ , l'equazione 1.9 mi dice come è il moto nella variabile x . Infatti, integrando rispetto al tempo:

$$x(t) = x(0) + \frac{P}{2m}t + \frac{L}{2}(\sin(\phi(t)) - \sin(\phi(0))).$$

A questo punto si può rispondere anche ad altre eventuali domande:

- a) Per quali valori iniziali il moto è limitato?
- b) Trova almeno un moto periodico.
- c) È possibile che l'asta rimanga verticale per tutti i tempi? In tal caso il sistema si può muovere? E che moto farà?

Risposte:

- a) Se e solo se $P = 0$.
- b) Il moto è periodico se $P = 0$ e $E \neq \pm mgL$.
- c) Sì, sì, rettilineo uniforme.

1.1.10 La versione Hamiltoniana

Nelle equazioni di Hamilton che ho già scritto, c'è già la riduzione del grado di libertà. Infatti le equazioni per p_x e x mi dicono che p_x si conserva (x è ciclica) e che la derivata rispetto al tempo di x dipende solo dalla costante p_x e dal moto nella variabile ϕ . Le equazioni per ϕ dipendono solo dalla costante p_x . Ma allora posso pensare direttamente ad $H(p_x, p_\phi, \phi)$ come ad una Hamiltoniana ad un grado di libertà (ϕ), con p_x parametro.

Potrei a questo punto fare la trasformazione inversa nelle sole variabili p_ϕ, ϕ per riottenere la lagrangiana unidimensionale. In realtà si può procedere all'analisi qualitativa del moto in ϕ e ottenere la formula di quadratura,

direttamente nel formalismo Hamiltoniano. Infatti la stessa H è un integrale primo del moto (si conserva perché non dipende dal tempo, e infatti coincide con l'energia meccanica scritta in variabili hamiltoniane). Ma allora dall'espressione di H posso ricavare p_ϕ in termini di ϕ , e sostituendo tale espressione nell'equazione per $\dot{\phi}$ ottenere finalmente $\dot{\phi}$ in funzione degli integrali primi e della sola coordinata ϕ . Per esercizio verifica che ottieni gli stessi risultati della sezione precedente.

1.2 Problema

Un punto materiale di massa m , indicato con P , si muove senza attrito su una retta orizzontale. Un'asta priva di massa e lunga L ha un estremo in P . All'altro estremo è fissato un punto materiale di massa m , indicato con Q . Sul sistema agisce la forza di gravità, nella direzione verticale discendente; inoltre una molla di costante elastica k lega il punto materiale P ad un punto fisso O della retta.

Evidentemente questo problema differisce dal precedente solo per la presenza della molla. Dunque per la Lagrangiana e l'Hamiltoniana devo solo aggiungere il contributo dell'energia potenziale della molla, che è $\frac{1}{2}kx^2$.

Quindi:

$$L = \frac{m}{2}(2\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}\dot{x}L \cos \phi + L^2\dot{\phi}^2) + mgL \cos \phi - \frac{1}{2}kx^2.$$

$$H = \frac{1}{2mL^2(2 - \cos^2 \phi)}(p_x^2 L^2 - 2p_x p_\phi L \cos \phi + 2p_\phi^2) - mgL \cos \phi + \frac{1}{2}kx^2.$$

La presenza di questo ulteriore termine ha come conseguenza che il problema non è più invariante per traslazioni (e infatti x in questo caso non è ciclica).

1.2.1 La determinazione degli equilibri e la loro stabilità

Il gradiente dell'energia è

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= kx \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= mgL \sin \phi, \end{aligned} \tag{1.12}$$

che è nullo se e solo se $x = 0$ e $\phi = 0, \pi$. Le posizioni di equilibrio sono dunque

$$\begin{aligned} (1) \quad (x, \phi) &= (0, 0) \\ (2) \quad (x, \phi) &= (0, \pi). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Dal fatto che V sia la somma di due funzioni una dipendente solo da x e l'altra dipendente solo da ϕ , risulta evidente che (1) è il minimo assoluto dell'energia potenziale e (2) è un punto di sella. Dunque (1) è stabile e (2) è instabile. In ogni caso, procedo al calcolo della matrice Hessiana, che in questo caso chiamo W :

$$W(x, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V(x, \phi)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V(x, \phi)}{\partial x \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 V(x, \phi)}{\partial x \partial \phi} & \frac{\partial^2 V(x, \phi)}{\partial \phi^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgL \cos \phi \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

A questo punto la calcolo nelle posizioni di equilibrio e ne determino gli autovalori. Nel caso (1)

$$W = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

con autovalori k e mgL , entrambi positivi, dunque il punto è di minimo e quindi l'equilibrio è stabile. Nel caso (2)

$$W = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -mgL \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

con autovalori k e $-mgL$, uno positivo e uno negativo, dunque il punto è di sella e quindi l'equilibrio è instabile.

1.2.2 Le piccole oscillazioni intorno all'equilibrio stabile

(1) è la sola posizione di equilibrio stabile. Per procedere nel calcolo della frequenza delle piccole oscillazioni e dei modi normali devo considerare l'approssimazione quadratica dell'energia cinetica e dell'energia potenziale (vedi sezione 2).

Per l'energia cinetica è sufficiente calcolare la matrice cinetica, nella posizione di equilibrio (0,0). Chi è la matrice cinetica? È la matrice attraverso la quale esprimi l'energia cinetica. Puoi riscrivere l'energia cinetica come

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2m & Lm \cos \phi \\ Lm \cos \phi & L^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}.$$

La matrice cinetica che chiamo T (da non confondere con il T con cui precedentemente ho espresso il valore dell'energia cinetica), calcolata nella posizione di equilibrio è

$$T = \begin{pmatrix} 2m & -mL \\ -mL & mL^2 \end{pmatrix}.$$

Per l'energia potenziale è sufficiente calcolare la matrice Hessiana W nella posizione di equilibrio. Ho già svolto questo conto.

Il problema agli autovalori risolto dalle frequenze delle piccole oscillazioni è

$$\det(\omega^2 T(0,0) - W(0,0)) = 0, \quad (1.17)$$

ovvero

$$\det \begin{pmatrix} 2m\omega^2 - k & -mL\omega^2 \\ -mL\omega^2 & \omega^2 mL^2 - mgL \end{pmatrix} = 0, \quad (1.18)$$

che è l'equazione:

$$m^2 L^2 \omega^4 - \omega^2 (2m^2 g + kmL^2) + kmgL = 0,$$

che ha soluzioni:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{g}{L} + \frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{g^2}{L^2} + \frac{k^2}{4m^2}}.$$

Entrambi i valori sono positivi, come deve essere. Quindi ho trovato le frequenze.

Verifica che ω^2 ha le dimensioni fisiche del quadrato di una frequenza, cioè del quadrato dell'inverso del tempo. Per il calcolo dei corrispondenti autovettori, devo considerare i due sistemi:

$$\begin{pmatrix} 2m\omega_{\pm}^2 - k & -mL\omega_{\pm}^2 \\ -mL\omega_{\pm}^2 & \omega_{\pm}^2 mL^2 - mgL \end{pmatrix} \mathbf{z}_{\pm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

uno per ogni scelta di ω^2 . Il determinante della matrice è 0, quindi i vettori \mathbf{z}_{\pm} che verificano il sistema sono della forma:

$$\text{const.} \begin{pmatrix} mL\omega_{\pm}^2 \\ 2m\omega_{\pm}^2 - k \end{pmatrix}.$$

Osservo che per la scelta + entrambi i valori sono positivi, quindi l'oscillazione di questo modo normale, che è quello a frequenza più alta, prevede che x e ϕ abbiano lo stesso segno. Per la scelta -, il termine $2m\omega_{\pm}^2 - k$ è negativo. Dunque per questo modo normale di oscillazione, quando x è positivo ϕ è negativo e viceversa.

1.2.3 Reazione vincolare

Calcolare la reazione dei vincoli su P e su Q nella configurazione $x = L$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\dot{x} = 0$ e $\dot{\phi} = 0$.

La teoria generale dei moti vincolati afferma che lungo il moto la massa per l'accelerazione (in coordinate cartesiane) di un punto uguaglia le forze attive più le reazioni vincolari. Nel nostro caso:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{pmatrix} = \mathbf{F}_P + \mathbf{R}_P,$$

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_Q \\ \ddot{y}_Q \end{pmatrix} = \mathbf{F}_Q + \mathbf{R}_Q,$$

dove \mathbf{F}_P è la risultante delle forze attive su P , \mathbf{F}_Q è la risultante delle forze attive su Q , e R_P e R_Q sono le reazioni che i vincoli esercitano rispettivamente su P e su Q . Per trovare le espressioni di R_P e R_Q ho bisogno delle espressioni delle risultanti delle forze attive e delle accelerazioni in termini delle coordinate lagrangiane.

Procedo con il calcolo delle forze attive. Sul punto P agiscono due forze: la forza di gravità che è $\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ e la forza di richiamo della molla, che è $\begin{pmatrix} -kx \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque $F_P = \begin{pmatrix} -kx \\ -mg \end{pmatrix}$. Analogamente per Q : $F_Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$. Per il calcolo delle accelerazioni devo solo derivare rispetto al tempo le espressioni per le velocità che ho già trovato quando ho calcolato l'energia cinetica. Allora:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_P &= \ddot{x} \\ \ddot{y}_P &= 0 \\ \ddot{x}_Q &= \ddot{x} + L\ddot{\phi} \cos \phi - L\dot{\phi}^2 \sin \phi \\ \ddot{y}_Q &= L\ddot{\phi} \sin \phi + L\dot{\phi}^2 \cos \phi \end{aligned} \quad (1.20)$$

A questo punto sostituisco a \ddot{x} e $\ddot{\phi}$ le loro espressioni in termini di \dot{x} , $\dot{\phi}$, x , ϕ , che ottengo dalle equazioni del moto, che sono

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x} + mL\ddot{\phi} - mL\dot{\phi}^2 \sin \phi &= -kx \\ mL^2\ddot{\phi} + mL\dot{x} \cos \phi &= -mgL \sin \phi. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Risolvendo questo sistema in \ddot{x} e $\ddot{\phi}$ ottieni:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{2 - \cos^2 \phi} (\dot{\phi}^2 \sin \phi - \frac{k}{m}x + g \sin \phi \cos \phi) \\ \ddot{\phi} &= \frac{1}{L(2 - \cos^2 \phi)} (-L\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + \frac{k}{m}x \cos \phi - 2g \sin \phi) \end{aligned} \quad (1.22)$$

A questo punto puoi ottenere le espressioni per le reazioni vincolari. Faccio notare che le reazioni vincolari sono forze che dipendono dalla velocità.

Nel caso particolare assegnato, essendo $\sin \phi = 1$, $\cos \phi = 0$ e $\dot{\phi} = 0$, le espressioni precedenti sono particolarmente semplici:

$$\begin{aligned} m\ddot{P} &= \begin{pmatrix} -\frac{kL}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kL \\ -mg \end{pmatrix} + R_P \\ m\ddot{Q} &= \begin{pmatrix} -\frac{kL}{2} \\ -gm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + R_Q. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Dunque la reazione vincolare su P è mg sull'asse verticale e $\frac{kL}{2}$ su quello orizzontale; la reazione su Q è $\frac{kL}{2}$ sull'asse orizzontale e nulla sull'asse verticale. Dai l'interpretazione fisica di questo fatto.

1.3 Problema

Un punto materiale di massa M è vincolato a muoversi senza attrito su una guida circolare verticale di raggio R e centro O . Un'asta di massa trascurabile, lunga L , è fissata al punto materiale ad un estremo.

- i) Scrivi le equazioni del moto attraverso la Lagrangiana e l'Hamiltoniana
- ii) Determina eventuali integrali primi.
- iii) Determina le soluzioni di equilibrio e discutine la stabilità.
- iv) Riduci i gradi di libertà se possibile.

1.3.1 I gradi di libertà e la scelta delle coordinate

Devi capire di quanti parametri hai bisogno per descrivere una generica configurazione del sistema.

Per prima cosa bisogna capire dov'è il punto di massa M , che chiamerò P . Le sue due coordinate non sono indipendenti, infatti $x^2 + y^2 = R^2$. La scelta più ragionevole è usare l'angolo al centro che P forma con l'asse verticale discendente, che chiamerò θ . Dunque

$$\begin{aligned}x_P &= R \sin \theta \\y_P &= -R \cos \theta.\end{aligned}\tag{1.24}$$

Nota la posizione di P , per specificare la posizione del punto di massa m , che chiamerò Q , mi serve solo un'altra coordinata, per esempio l'angolo ϕ che l'asta forma con la verticale discendente per il punto P . Infatti

$$\begin{aligned}x_Q &= x_P + L \sin \phi = R \sin \theta + L \sin \phi \\y_Q &= y_P - L \cos \phi = -R \cos \theta - L \cos \phi\end{aligned}\tag{1.25}$$

1.3.2 Il calcolo dell'energia cinetica

Individuate le coordinate, per il calcolo della Lagrangiana è necessario calcolare l'energia cinetica e l'energia potenziale in termini delle coordinate che hai scelto.

L'energia cinetica del sistema è la somma delle energie cinetiche di tutte le masse in gioco, in questo caso del punto P e del punto Q . In coordinate cartesiane:

$$T = \frac{M}{2}(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}_Q^2 + \dot{y}_Q^2).$$

Per scrivere T in nelle coordinate lagrangiane, devo calcolare le velocità. Per il punto P :

$$\begin{aligned}\dot{x}_P &= R\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_P &= R\dot{\theta} \sin \theta.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Quindi la sua energia cinetica è $\frac{M}{2}R^2\dot{\theta}^2$.

Per il punto Q :

$$\begin{aligned}\dot{x}_Q &= R\dot{\theta} \cos \theta + L\dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{y}_Q &= R\dot{\theta} \sin \theta + L\dot{\phi} \sin \phi.\end{aligned}\tag{1.27}$$

Quindi la sua energia cinetica è : $\frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + 2RL\dot{\theta}\dot{\phi}(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi) + L^2\dot{\phi}^2)$. L'energia cinetica totale è:

$$T = \frac{1}{2}(M + m)R^2\dot{\theta}^2 + mRL\dot{\theta}\dot{\phi}(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2.$$

1.3.3 Il calcolo dell'energia potenziale

Per calcolare l'energia potenziale è necessario individuare tutte le forze attive che agiscono sulle masse. Su P , l'unica forza attiva è la forza di gravità. L'energia potenziale di una massa M ad una quota y è Mgy . Dunque l'energia potenziale per le forze che agiscono su P è: $V_P = Mgy_P = -MgR \cos \theta$. L'energia potenziale per le forze che agiscono su Q è: $V_Q = mgy_Q = -mgR \cos \theta - mgL \cos \phi$.

In definitiva l'energia potenziale è :

$$V = -(M + m)gR \cos \theta - mgL \cos \phi.$$

1.3.4 La Lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange

La Lagrangiana è $L = T - V$, dunque:

$$L = \frac{1}{2}(M + m)R^2\dot{\theta}^2 + mRL\dot{\theta}\dot{\phi}(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2 + (M + m)gR \cos \theta + mgL \cos \phi.\tag{1.28}$$

Per scrivere le equazioni del moto, devo prima derivare la lagrangiana nelle variabili $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$, e calcolare quindi gli *impulsi coniugati* alle variabili $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= (M + m)R^2\dot{\theta} + mRL\dot{\phi}(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= mL^2\dot{\phi} + mRL\dot{\theta}(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi).\end{aligned}\quad (1.29)$$

Ora devo considerare gli impulsi coniugati come funzioni del tempo attraverso le variabili θ , ϕ , $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, e scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{\partial L}{\partial \phi}.\end{aligned}\quad (1.30)$$

Come prima equazione ottengo

$$\begin{aligned}(M + m)R^2\ddot{\theta} + mRL\ddot{\phi}(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi) + mRL\dot{\phi}(\cos \theta \sin \phi - \sin \theta \cos \phi) + \\ + mRL\dot{\phi}^2(\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi) = mRL\dot{\theta}(\cos \theta \sin \phi - \sin \theta \cos \phi) + (M + m)gR \sin \theta.\end{aligned}\quad (1.31)$$

Come seconda equazione ottengo

$$\begin{aligned}mL^2\ddot{\phi} + mRL\ddot{\theta}(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi) + mRL\dot{\theta}^2(\cos \theta \sin \phi - \sin \theta \cos \phi) + \\ + mRL\dot{\theta}\dot{\phi}(\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi) = mRL\dot{\phi}(\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi) + mgL \sin \phi.\end{aligned}\quad (1.32)$$

Nota bene. La derivata rispetto al tempo dei momenti coniugati ha vari termini: termini lineari nelle derivate seconde rispetto al tempo, e termini quadratici nelle derivate prime rispetto al tempo. Per Lagrangiane “naturali” non ci posso essere termini lineari nelle derivate prime (vedi sezione 2, esercizio 2.1). Nei membri di destra delle equazioni, non ci sono solo le derivate dell’energia potenziale con il segno cambiato, ma anche le derivate rispetto alle variabili della parte cinetica.

1.3.5 L’Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton

Per il calcolo dell’Hamiltoniana si procede come segue. Per prima cosa si definiscono le nuove variabili, che sono gli impulsi coniugati:

$$\begin{aligned}p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (M + m)R^2\dot{\theta} + mRL\dot{\phi}(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi) \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mL^2\dot{\phi} + mRL\dot{\theta}(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi).\end{aligned}\quad (1.33)$$

Dopo di che, si ricavano le espressioni di $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$ in termini delle nuove variabili. Per fare questo si deve risolvere il sistema di equazioni lineare 1.33 rispetto alle variabili $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{Lp_\theta - Rp_\phi(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi)}{LR^2(M + m - m(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi)^2)} \\ \dot{\phi} &= \frac{-mLp_\theta(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi) + (M + m)Rp_\phi}{mL^2R(M + m - m(\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi)^2)}\end{aligned}\quad (1.34)$$

A questo punto l’Hamiltoniana è data da

$$H(p_\theta, p_\phi, \theta, \phi) = p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - L(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \theta, \phi),$$

dove bisogna sostituire a $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$ i valori delle espressioni 1.34. Il lettore completi i calcoli.

Una strada leggermente più veloce è la seguente (vedi sezione 2). Esplicito l’energia cinetica nella Lagrangiana come forma quadratica.

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} T(\theta, \phi) \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} - V(\theta, \phi),$$

dove T è la *matrice cinetica*

$$T(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} (M+m)R^2 & mL(\sin\theta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi) \\ mL(\sin\theta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi) & mL^2 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

A questo punto l'Hamiltoniana è data da:

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\phi \end{pmatrix} T^{-1}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\phi \end{pmatrix} + V(\theta, \phi),$$

dove T^{-1} è l'inversa di T . Il calcolo dell'inversa della matrice è assolutamente standard. In realtà l'ho già calcolata prima, quando ho trovato $(\dot{\theta}, \dot{\phi})$ in funzione di (p_θ, p_ϕ) . Infatti

$$\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\phi \end{pmatrix} = T(\theta, \phi) \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix},$$

quindi

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = T^{-1}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\phi \end{pmatrix}.$$

In definitiva:

$$T^{-1}(\theta, \phi) = \frac{1}{L^2 R^2 (M+m - m(\sin\theta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi)^2)} \begin{pmatrix} L^2 & -RL(\sin\theta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi) \\ -RL(\sin\theta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi) & (M+m)R^2 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Dunque l'Hamiltoniana è:

$$H = \frac{1}{2L^2 R^2 (M+m - m(\sin\theta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi)^2)} (L^2 p_\theta^2 - 2RL(\sin\theta \sin\phi + \cos\theta \cos\phi) p_\theta p_\phi + (M+m)R^2 p_\phi^2) + (M+m)gR \cos\theta - mgL \cos\phi. \quad (1.37)$$

Le equazioni del moto in formalismo hamiltoniano sono

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Il lettore completi i calcoli.

1.3.6 La determinazione degli equilibri

Astrattamente, le posizioni di equilibrio in formalismo lagrangiano si ottengono dalle equazioni trovando i valori di $\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ che risolvono identicamente le equazioni. Ovviamente, essendo il sistema di partenza meccanico, deve essere $(\dot{\theta}, \dot{\phi}) = (0, 0)$. Sostituendo questi valori nelle equazioni, le posizioni di equilibrio si ottengono cercando i valori di θ e ϕ per cui $\ddot{\theta}$ e $\ddot{\phi}$ sono nulli. E' facile rendersi conto che ciò accade se e solo se

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\theta, \phi)}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial V(\theta, \phi)}{\partial \phi} &= 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

In definitiva le posizioni di equilibrio si ottengono annullando il gradiente, rispetto alle coordinate lagrangiane, dell'energia potenziale. In questo caso:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(\theta, \phi)}{\partial \theta} &= (M + m)gR \sin \theta = 0 \\ \frac{\partial V(\theta, \phi)}{\partial \phi} &= mgL \sin \phi = 0.\end{aligned}\tag{1.40}$$

Le soluzioni sono $\theta = 0, \pi$ e $\phi = 0, \pi$. Dunque le posizioni di equilibrio sono:

$$\begin{aligned}(1) \quad &(\theta, \phi) = (0, 0) \\ (2) \quad &(\theta, \phi) = (0, \pi) \\ (3) \quad &(\theta, \phi) = (\pi, 0) \\ (4) \quad &(\theta, \phi) = (\pi, \pi).\end{aligned}\tag{1.41}$$

NB: il sistema è fisicamente periodico, nel senso che la posizione $\theta = 2\pi$ è la stessa di $\theta = 0$ e così via, quindi mi limito a considerare i valori tra 0 e 2π .

1.3.7 La stabilità delle posizioni di equilibrio

I punti di minimo dell'energia potenziale sono punti di equilibrio stabili, i punti non di minimo (punti di sella e punti di massimo) sono punti di equilibrio instabili.

Un modo possibile per determinare se un punto critico di V (cioè un punto in cui ∇V è nullo) è di minimo oppure no, è quello di calcolare la matrice Hessiana e determinarne il segno degli autovalori.

Procedo al calcolo della matrice Hessiana, che in questo caso chiamo W per non confonderla con H con cui ho indicato l'Hamiltoniana.

$$W(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 V(\theta, \phi)}{\partial \theta \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 V(\theta, \phi)}{\partial \theta \partial \phi} & \frac{\partial^2 V(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M + m)g \cos \theta & 0 \\ 0 & mg \cos \phi \end{pmatrix}.\tag{1.42}$$

A questo punto la calcolo nelle posizioni di equilibrio e ne determino gli autovalori.

Caso (1):

$$W = \begin{pmatrix} (M + m)g & 0 \\ 0 & mg \end{pmatrix},\tag{1.43}$$

con autovalori $(M + m)g$ e mg , entrambi positivi, dunque il punto è di minimo e quindi l'equilibrio è stabile.

Caso (2):

$$W = \begin{pmatrix} (M + m)g & 0 \\ 0 & -mg \end{pmatrix},$$

con autovalori $(M + m)g$ e $-mg$, uno negativo e uno positivo, dunque il punto è di sella e quindi l'equilibrio è instabile.

Caso (3):

$$W = \begin{pmatrix} -(M + m)g & 0 \\ 0 & mg \end{pmatrix},$$

con autovalori $-(M + m)g$ e mg , uno negativo e uno positivo, dunque il punto è di sella e quindi l'equilibrio è instabile.

Caso (4):

$$W = \begin{pmatrix} -(M + m)g & 0 \\ 0 & -mg \end{pmatrix},$$

con autovalori $-(M + m)g$ e $-mg$, entrambi negativi, dunque il punto è di massimo e quindi l'equilibrio è instabile.

1.3.8 Le piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili

C'è una sola posizione di equilibrio stabile, è la (1). Per calcolare il moto delle piccole oscillazioni si può procedere scrivendo per prima cosa la Lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio. Bisogna scrivere l'approssimazione al secondo ordine dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. Per l'energia cinetica è sufficiente calcolare la matrice cinetica, definita nell'equazione 1.35, nella posizione di equilibrio $(0, 0)$. Per l'energia potenziale è sufficiente calcolare la matrice Hessiana W nella posizione di equilibrio. Ho già svolto questo conto nell'equazione 1.43. In definitiva la Lagrangiana delle piccole oscillazioni è data da

$$L_{po} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M+m)R^2 & mRL \\ mRL & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M+m)g & 0 \\ 0 & mg \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Il problema agli autovettori da risolvere è

$$\det(\omega^2 T(0,0) - W(0,0)) = 0, \quad (1.45)$$

ovvero

$$\det \begin{pmatrix} \omega^2(M+m)R^2 - (M+m)g & \omega^2 mRL \\ \omega^2 mRL & \omega^2 mL^2 - mg \end{pmatrix} = 0. \quad (1.46)$$

Il calcolo è un pò complicato ma non presenta nessuna difficoltà concettuale. Per diminuire la fatica, conviene ricordarsi che il determinante è una funzione lineare delle singole righe. In particolare se moltiplico una sola riga per un numero anche il determinante sarà moltiplicato per lo stesso numero. Ma allora mi conviene dividere per $(M+m)R^2$ la prima riga e per mL^2 la seconda. Ovviamente i valori di ω^2 non cambiano. Introduco anche i parametri $\alpha = \frac{R}{L}$, $\nu^2 = \frac{g}{R^2}$ e $\mu = \frac{m}{M+m}$. L'equazione agli autovalori diventa:

$$\det \begin{pmatrix} \omega^2 - \nu^2 & \omega^2 \frac{\mu}{\alpha} \\ \omega^2 \alpha & \omega^2 - \nu^2 \alpha^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.47)$$

Quindi:

$$(1 - \mu)\omega^4 - \nu^2(1 + \alpha^2)\omega^2 + \alpha^2\nu^4 = 0,$$

che ha le due soluzioni

$$\omega_{\pm}^2 = \nu^2 \frac{1 + \alpha^2 \pm \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 4\alpha^2 \mu}}{2(1 - \mu)}.$$

Tenedo presente che $\mu < 1$, si riconosce che $\omega^2 > 0$ in entrambi i casi. Per il calcolo dei corrispondenti autovettori, dovrei considerare i due sistemi:

$$\begin{pmatrix} \omega_{\pm}^2 - \nu^2 & \omega_{\pm}^2 \frac{\mu}{\alpha} \\ \omega_{\pm}^2 \alpha & \omega_{\pm}^2 - \nu^2 \alpha^2 \end{pmatrix} \mathbf{z}_{\pm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

dove le incognite sono i due vettori \mathbf{z}_{\pm} . Il determinante della matrice è nullo, dunque per determinare il vettore mi basta considerare, ad esempio, la seconda riga. Non normalizzando, posso scegliere:

$$\mathbf{z}_{\pm} = \begin{pmatrix} \alpha\nu^2 - \omega_{\pm}^2 \\ \alpha\omega_{\pm}^2 \end{pmatrix}.$$

che sono i modi normali di oscillazione.

1.3.9 Gli integrali primi e la riduzione dei gradi di libertà

La Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, dunque l'energia meccanica si conserva. D'altra parte non ci sono variabili cicliche, né evidenti simmetrie del problema. Non avendo a disposizione altri integrali primi non posso procedere alla riduzione dei gradi di libertà.

1.3.10 Il controllo dimensionale

Il problema assegnato è formulato in modo dimensionalmente consistente, infatti R e L sono due lunghezze, M e m sono due masse e g è l'accelerazione di gravità che ha dimensioni fisiche $[L/T^2]$ (lunghezza diviso tempo a quadrato). Quindi anche i calcoli che avete fatto devono essere coerenti nelle dimensioni fisiche. Si può verificare che l'energia cinetica e l'energia potenziale hanno effettivamente le dimensioni fisiche di un'energia, etc. . In particolare le frequenze delle piccole oscillazioni sono delle frequenze. Infatti i parametri μ e α sono adimensionali, mentre il parametro ν^2 ha le dimensioni di $[g/R^2] = [1/T^2]$, cioè di una frequenza al quadrato.

1.4 Problema

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di equazione $z = -\sqrt{l^2 + x^2 + y^2}$. Il punto è all'estremo di una molla di costante elastica k , che ha l'altro estremo fissato nell'origine. Sul punto agisce anche la forza di gravità, verso la direzione negativa dell'asse delle z .

Questo esercizio è uno delle infinite varianti del moto centrale. Infatti la superficie su cui è vincolato a muoversi il punto è invariante per rotazioni intorno all'asse z , e lo stesso invariante sono i due campi di forza. Ovviamente tale invarianza implicherà la conservazione del momento della quantità di moto.

1.4.1 Scelta delle coordinate ed equazioni del moto

L'invarianza per rotazioni intorno all'asse z suggerisce di utilizzare coordinate polari. Sia r la distanza dall'origine della proiezione del punto sul piano (x, y) , cioè $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sia ϕ l'angolo che la congiungente dell'origine con la proiezione forma con l'asse delle x nella direzione positiva. Con queste due coordinate posso descrivere il sistema: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = -\sqrt{l^2 + r^2}$. Il calcolo delle velocità dà:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{z} &= -\frac{r \dot{r}}{\sqrt{l^2 + r^2}}\end{aligned}\tag{1.49}$$

Il calcolo dell'energia cinetica dà:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \frac{l^2 + 2r^2}{l^2 + r^2} + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2.$$

L'energia potenziale ha due contributi: la forza di gravità che dà il contributo $-mg\sqrt{l^2 + r^2}$ e la molla che dà il contributo $\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}k(l^2 + 2r^2)$. Elimino il termine l^2 perchè non contribuisce alla determinazione del moto. In sintesi la lagrangiana è:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \frac{l^2 + 2r^2}{l^2 + r^2} + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 + mg\sqrt{l^2 + r^2} - kr^2.$$

L'Hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2m} p_r^2 \frac{l^2 + r^2}{l^2 + 2r^2} + \frac{1}{2mr^2} p_\phi^2 - mg\sqrt{l^2 + r^2} + kr^2.$$

Il lettore proceda al calcolo delle equazioni del moto.

1.4.2 Posizioni di equilibrio

La derivata dell'energia potenziale, che dipende solo da r , è $\frac{\partial V}{\partial r} = -mgr \frac{1}{\sqrt{l^2 + r^2}} + 2kr$. Dunque $r = 0$ è un equilibrio, qualunque sia ϕ . Altri equilibri esistono se e solo se: $\sqrt{l^2 + r^2} = \frac{mg}{2k}$. Quindi $r^2 = l^2 \left(\left(\frac{mg}{2kl} \right)^2 - 1 \right)$. L'equilibrio esiste se e solo se $\frac{mg}{2kl} \geq 1$. Ovviamente solo il valore positivo di r è accettabile, in quanto r è una variabile positiva. Sia $\bar{r} = l \sqrt{\left(\left(\frac{mg}{2kl} \right)^2 - 1 \right)}$ quando esiste reale.

Quante sono le posizioni di equilibrio? Il potenziale non dipende da ϕ , quindi qualunque sia $\bar{\phi}$ ($0, \bar{\phi}$) e $(\bar{r}, \bar{\phi})$ sono posizioni di equilibrio. D'altra parte se $r = 0$, qualunque sia $\bar{\phi}$ fisicamente ($0, \bar{\phi}$) è l'origine del piano. Dunque

se $\frac{mg}{2kl} \leq 1$ c'è solo una posizione di equilibrio, l'origine del piano; se $\frac{mg}{2kl} > 1$ esistono altre infinite posizioni di equilibrio a distanza \bar{r} dall'origine.

Sviluppano con Taylor al secondo ordine V intorno a 0 si ottiene $V(r) = -mgl^2 + kr^2 \left(1 - \frac{mg}{2kl}\right)$. Dunque è stabile se $\frac{mg}{2kl} < 1$ ed è instabile se $\frac{mg}{2kl} > 1$. Considerando anche i termini r^4 si ottiene che il l'origine è stabile anche per $\frac{mg}{2kl} = 1$.

Le altre infinite posizioni di equilibrio, quando esistono, sono instabili pur essendo dei minimi per V considerato nella sola variabile r . Infatti come funzione di (r, ϕ) , sono dei minimi non stretti. La conservazione del momento della quantità di moto permette di costruire dati iniziali arbitrariamente vicini all'equilibrio che si allontanano. Per esercizio dai la dimostrazione di questo fatto usando il metodo utilizzato nel problema 1.1.

Per $\frac{mg}{2kl} < 1$ posso calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni. Però se procedo come sempre mi accorgo che la matrice cinetica nel punto di equilibrio vale

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

che è solo semidefinita positiva, avendo un autovalore nullo. D'altra parte la matrice Hessiana è

$$\begin{pmatrix} k\left(1 - \frac{mk}{2kl}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

Quindi si trova un valore di una sola frequenza che è $\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{2l}}$. Dov'è finita l'altra? Perché il problema è degenerare? Come si procedere correttamente?

Il fatto è che l'uso delle coordinate polare è regolare solo per $r > 0$. In questo caso siamo in $r = 0$, dunque per procedere correttamente, bisogna riscrivere la Lagrangiana in altre coordinate, per esempi (x, y) , e studiare le piccole oscillazioni in $(0, 0)$. Il lettore proceda nel calcolo e verifichi che tutte e due frequenze di oscillazione sono uguali a $\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{2l}}$, e che ogni direzione (x, y) è una direzione normale di oscillazione. Inoltre provi per esercizio che le orbite delle piccole oscillazioni sono ellissi con il centro nell'origine.

1.4.3 Riduzione dei gradi di libertà e analisi qualitativa

L'invarianza per rotazioni ha come conseguenza che la variabile ϕ è ciclica. Dunque il momento coniugato si conserva: $P = p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ è un integrale primo del moto. Sostituendolo nell'espressione dell'energia meccanica si ottiene:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \frac{l^2 + 2r^2}{l^2 + r^2} + \frac{1}{2mr^2}P^2 - mg\sqrt{l^2 + r^2} + kr^2.$$

Indico con $V_e = +\frac{1}{2mr^2}P^2 - mg\sqrt{l^2 + r^2} + kr^2$, l'energia potenziale efficace. La derivata di V_e è:

$$V_e' = -\frac{P^2}{mr^3} - r \frac{mg}{\sqrt{l^2 + r^2}} + 2kr.$$

Come spesso accade la soluzione esplicita di $V_e'(r) = 0$ non sembra essere possibile esplicitamente (esce un'equazione in r^8 , r^4 e r^2). Bisogna tentare di capire qualitativamente se esistono soluzioni. L'equazione è:

$$\frac{P^2}{mr^4} = k - \frac{mg}{\sqrt{l^2 + r^2}}.$$

Disegnando il grafico delle due funzioni si capisce che esiste sempre una posizione di equilibrio. Inoltre è unica perché la funzione a sinistra è decrescente e la funzione a destra è crescente.

Disegnando il grafico dell'energia potenziale efficace si vede che l'equilibrio è un minimo, quindi è stabile.

Il lettore completi l'esercizio scrivendo le formule di quadratura per il moto complessivo, e discuta qualitativamente il moto.

1.4.4 La rappresentazione dell'orbita

Come in tutti i casi di potenziali centrali, può essere utile determinare l'orbita nelle variabili (r, ϕ) , cioè la funzione $r(\phi)$.

Si procede nel modo seguente. Dalla relazione $\dot{\phi} = \frac{P}{mr^2}$ si scopre che la funzione $t \rightarrow \phi$ è strettamente monotona (crescente se P è positivo). Ma allora: $\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \phi} \dot{\phi}$. Quindi

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = \frac{mr^2}{P} \dot{r} = \pm \frac{mr^2}{P} \sqrt{\frac{2}{m} \frac{l^2 + r^2}{l^2 + 2r^2} (E - V_e(r))}.$$

Da cui si ottiene l'espressione implicita per l'orbita:

$$\phi = \pm \int^r dr \frac{P}{mr^2} \sqrt{\frac{m}{2} \frac{l^2 + 2r^2}{l^2 + r^2} \frac{1}{\sqrt{E - V_e(r)}}}.$$

1.4.5 Domande varie

- Trova almeno due famiglie di moti periodici.
 - Determina le condizioni iniziali tali che il punto passi per $r = 0$.
 - Studia qualitativamente il moto per i dati iniziali tali che $\dot{\phi}_0 = 0$.
 - (**) Scrivere le equazioni del moto nel caso in cui sul punto materiale agisca una forza di attrito proporzionale alla velocità e diretta nel verso opposto della velocità stessa. Provare che l'energia meccanica decresce. Decresce anche il momento della quantità di moto?

Studiare il limite di $r(t)$ per $t \rightarrow +\infty$ al variare dei dati iniziali.

1.5 Problema

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di un toro, di equazione parametrica

$$\begin{aligned} x &= (L + R \sin \theta) \cos \phi \\ y &= (L + R \sin \theta) \sin \phi \\ z &= R \cos \theta, \end{aligned} \tag{1.52}$$

con $R < L$. La superficie assegnata è un toro in \mathbb{R}^3 .

Caso 1 La forza di gravità agisce lungo l'asse delle z nella direzione discendente.

Caso 2 La forza di gravità agisce lungo l'asse delle x nella direzione decrescente.

Caso 3 La forza di gravità è trascurabile.

Per tutti e tre i casi:

- Scrivi le equazioni del moto.
- Determina eventuali integrali primi.
- Determina le soluzioni di equilibrio e discutine la stabilità.
- Riduci i gradi di libertà se possibile e analizza qualitativamente il moto.
- Nei casi 1) e 3) si considerino i moti di momento della quantità di moto non nullo. Si provi che tra essi, in entrambi i casi, esistono due moti periodici distinti. Si trovi inoltre almeno un'altra famiglia di dati iniziali per cui il moto è periodico.
- Nel caso 1) si consideri il moto periodico di momento assegnato e si calcoli la reazione del vincolo durante il moto.

2 Le Lagrangiane e le Hamiltoniane “tipiche”

Una Lagrangiana che si ottiene da un sistema fisico conservativo in un sistema di riferimento inerziale, con forze puramente posizionali e vincoli perfetti bilateri è sempre del tipo

$$L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot T(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} - V(\mathbf{x}),$$

dove $T(\mathbf{x})$ è una matrice simmetrica e definita positiva, e \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ sono in \mathbb{R}^n . Le equazioni del moto si possono sinteticamente scrivere come

$$\frac{d}{dt}(T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}) = -\nabla V(\mathbf{x}).$$

Esercizio 2.1 Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ una funzione regolare da \mathbb{R}^k in \mathbb{R}^n , con $k < n$. Sto pensando che \mathbf{x} sono le coordinate cartesiane e che \mathbf{q} siano le coordinate lagrangiane necessarie per descrivere i vincoli che deve soddisfare \mathbf{x} . Assumo inoltre che le \mathbf{q} siano delle buone coordinate, cioè la matrice $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}$ abbia sempre rango massimo (in questo caso k).

Prova che

a)

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}},$$

(ovviamente è un prodotto righe per colonne).

b)

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

dove la matrice cinetica è data da

$$T(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^t \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}},$$

(t indica la matrice trasposta).

c) La matrice T è simmetrica e definita positiva.

Esercizio 2.2 Verifica che data una forma quadratica in \mathbb{R}^n $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot A \mathbf{x}$, vale $\nabla f(\mathbf{x}) = A \mathbf{x}$.

Il passaggio all'Hamiltoniana è semplice. Infatti il vettore degli impulsi coniugati è dato da:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = T(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}},$$

ed essendo T definita positiva, in particolare è invertibile. Dunque

$$\dot{\mathbf{x}} = T(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{p}.$$

Ma allora l'Hamiltoniana è data da:

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot T(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} + V(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \cdot T(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{p} - \frac{1}{2} (T(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{p}) \cdot T(\mathbf{x}) T(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{p} + V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot T(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{p} + V(\mathbf{x}).$$

Quindi per il calcolo dell'Hamiltoniana è sufficiente calcolare l'inversa della matrice T .

Esercizio 2.3 Verifica che data una Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot S(\mathbf{x}) \mathbf{p} + V(\mathbf{x}),$$

dove S è una matrice simmetrica e definita positiva, la corrispondente lagrangiana è data da

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot S(\mathbf{x})^{-1} \dot{\mathbf{x}} - V(\mathbf{x}).$$

Esercizio 2.4 Verifica che data una Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot S(\mathbf{x}) \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) + V(x),$$

dove $S(\mathbf{x})$ è una matrice simmetrica e definita positiva, e $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ è un vettore, la corrispondente lagrangiana è data da

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{b}(\mathbf{x})) \cdot S(\mathbf{x})^{-1} (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{b}(\mathbf{x})) - V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot S(\mathbf{x})^{-1} \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}} \cdot S(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{b}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot S(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{b} - V(\mathbf{x}).$$

Le equazioni del moto delle piccole oscillazioni intorno da una posizione di equilibrio stabile, si trovano linearizzando le equazioni del moto. Questo corrisponde a considerare l'approssimazione quadratica della lagrangiana intorno alla posizione di equilibrio.

Per Lagrangiane naturali del tipo $L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot T(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} - V(\mathbf{x})$ è molto semplice. Supponiamo che $\bar{\mathbf{x}}$ sia la posizione di equilibrio. Per prima cosa scrivo l'approssimazione quadratica dell'energia potenziale. La formula di Taylor in più variabili mi dice che

$$V(\mathbf{x}) = V(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla V(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot W(\bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + o(|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|^2).$$

Ora $V(\bar{\mathbf{x}})$ è un valore costante, dunque posso non scriverlo nella lagrangiana delle piccole oscillazioni. Il termine al primo ordine è nullo. Infatti $\bar{\mathbf{x}}$ è una posizione di equilibrio, dunque il gradiente dell'energia potenziale è nullo. Il primo termine significativo è il termine quadratico $\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot W(\bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$, dove con $W(\bar{\mathbf{x}})$ ho indicato la matrice hessiana di V calcolata nel punto di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$. I termini successivi sono di ordine superiore, quindi li trascuro.

La variabile che compirà in questo caso è $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$, che infatti descrive la posizione rispetto all'equilibrio. In termini di \mathbf{y} l'approssimazione quadratica dell'energia potenziale è $\frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot W(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{y}$. L'energia cinetica nella variabile \mathbf{y} è $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}} \cdot T(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y}) \dot{\mathbf{y}}$, infatti $\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{x}}$. Sviluppando T in \mathbf{y} : $T(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y}) = T(\bar{\mathbf{x}}) + o(|\mathbf{y}|)$. Ma allora mi interessa solo l'ordine zero, infatti devo moltiplicare T per \mathbf{y} due volte, quindi il termine è già almeno del secondo ordine.

In definitiva:

$$L_{po} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}} \cdot T(\bar{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot W(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{y}.$$

Esercizio 2.5 Calcola l'Hamiltoniana delle piccole oscillazioni.