Esercizi di Meccanica Razionale

AA 1999-2000, corsi Marchioro, Negrini, esercitatore D. Benedetto

2 ottobre 2000

Indice

Nella seconda parte (sezione 1) esercizi sui moti in piú dimensioni.

Gli esercizi della sezione 1 sono classificati approssimativamente per argomento:

L formalismo lagrangiano

S stabiltà

PO piccole oscillazioni

RU riduzione dei gradi di libertà

N teorema di Noether

CR corpi rigidi

H formalismo hamiltoniano

TC trasformazioni canoniche

HJ Hamilton-Jacobi

AA variabili azione-angolo

P perturbazioni di sistemi integrabili

I richiami alla bibliografia non sono ovviamente completi: non sono citati tutti i testi, né i testi in bibliografia sono citati tutte le volte che potrebbe essere utile. Me ne scuso con gli studenti e con gli autori.

Questa versione non è definitiva. Possono esserci errori, anche gravi. La versione più recente, e presumibilmente più corretta, è sul sito http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/meccanica

1 Alcuni compiti d'esame

1.0.1 L,S,PO: Compito di Meccanica, febbraio '97

Un'asta omogenea di estremi A e B, massa M, e lunghezza l, é vincolata a muoversi su di un piano verticale π. Il suo estremo A è vincolato a muoversi su di una retta orizzontale $r \subset \pi$. Inoltre, π ruota con velocità angolare costante ω intorno all'asse verticale s, ortogonale a r nel punto fisso O.

Il punto A dell'asta è richiamato dal punto O da una molla ideale di costante elastica k.

Si introducano le coordinate lagrangiane $\rho =$ distanza di A da O, e $\theta =$ angolo tra la direzione dell'asta e la direzione dell'asse s.

1) Si scriva la Lagrangiana, e, considerando trascurabili gli effetti gravitazionali, e si determinino, conseguentemente, eventuali quantità conservate.

Sempre nell'approssimazione di cui al punto 1:

2) si determinino le soluzioni di equilibrio, al variare del parametro $h = \frac{k}{M\omega^2}$;

3) si discuta la stabilità delle soluzioni di equilibrio al variare di h;

4) nel caso $h > 1$ si calcolino le frequenze e i modi normali delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabile.

Soluzione nella sezione 2.0.1

1.0.2 L,S,PO: Primo compito di esonero, a.a. 93-94.

Nel piano verticale, si fissi un sistema di riferimento inerziale $(0, x, y)$, con asse y orientato lungo la retta verticale ascendente. Attorno al punto fisso O é libera di ruotare un'asta illimitata (senza peso). Sia s la coordinata sull'asta, scelta positiva alla destra di O, e sia θ l'angolo (contato in vero antiorario) che l'asta forma con l'asse x. Sull'asta, in $s = a, a > 0$, é fissato un punto P_1 di massa m_1. Inoltre, sull'asta, è libero di scorrere un secondo punto materiale P_2, di massa m_2. P_2 è richiamato da P_1, con una forza elastica $F = -k(P_2 - P_1), k > 0$.

Prima domanda. Si scriva la lagrangiana del sistema.

Seconda domanda. Detto $\alpha = ak\frac{(m_1+m_2)}{gm_2^2}$, discutere, al variare di questo parametro, le soluzioni stazionarie del sistema Lagrangiano, determinandone, per $\alpha \neq 1$, le relative proprietà di stabilità.

Terza domanda. Si determinino le frequenze delle "piccole oscillazioni" attorno alle posizioni di equilibrio stabili.

Quarta domanda. Si consideri ora il seguente problema: l'asta gira con frequenza angolare costante ω attorno ad O. Si discuta il corrispondente problema ad un grado di libertà .

Soluzione nella sezione 2.0.2

1.0.3 CR,L,S Compito di Meccanica Razionale, 6/6/'96, I^o appello, sess. estiva.

Una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio R e massa M_1 ruota con velocità angolare costante ω in un piano verticale, intorno al suo centro O. Sul suo bordo interno rotola senza strisciare un disco $\mathcal{D}$ di raggio $r < R$ e massa M. Il centro G di tale disco é richiamato da una molla elastica di costante $k > 0$, da un punto materiale Q di massa m, libero di scorrere sull'asse verticale passante per O.

Indica con $\psi = \omega t$ e ϕ gli angoli di rotazione propria di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ rispettivamente, con θ l'angolo che OG forma con la direzione postitiva dell'asse orizzontale, e con y la quota del punto Q rispetto a O:

1) scrivi la condizione di puro rotolamento in termini di $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, e dimostra che è un vincolo olonomo;

2) scrivi la Lagrangiana del sistema nelle variabili lagrangiane θ, y;

3) determina le soluzioni stazionare del relativo sistema di Lagrange, al variare del parametro adimensionale $\lambda = \frac{(M+m)g}{(R-r)k}$;

4) discuti la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di λ;

5) determina le condizioni iniziali sul moto del baricentro G del disco $\mathcal{D}$ a cui corrispondono solo moti armonici del punto Q.

Soluzione nella sezione 2.0.3

1.0.4 CR,L,S Compito di Meccanica Razionale, sess. estiva (Pulvirenti)

Si consideri un sistema di riferimento piano inerziale di origine O e assi (x, y), l'asse y essendo scelto allineato con la verticale ascendente. Un disco omogeneo, di raggio R, centro G, e massa totale M, rotola senza strisciare (cioé puro rotolamento) lungo l'asse y. Lungo un diametro del disco - di estremi A, B- è libero di scorrere senza attrito un punto materiale di massa m. Tale punto è inoltre richiamato dal centro del disco tramite una molla ideale di costante elastica k $(k > 0)$. Nell'istante iniziale il centro del disco si trova sull'asse x, il diametro A, B è collineare all'asse x e $x_A < x_G < x_B$.

Si consideri un sistema solidale (ξ, η) di assi incentrati in G, l'asse ξ orientato come AB. Si assumano come parametri Lagrangiani l'angolo ϕ (contato in senso antiorario) che l'asse solidale ξ forma con l'asse delle x e l'ascissa ξ del punto P.

1^a **domanda.** Si scriva la Lagrangiana del sistema.

2^a **domanda.** Si determinino le eventuali configurazioni di equilibrio.

3^a **domanda.** Si discuta la stabilità delle soluzioni di equilibrio determinate al punto 2.

4^a **domanda.** Si consideri ora un diverso problema, e cioé si consideri il punto P **fissato** nel centro. Descrivere il moto del sistema.

Soluzione nella sezione 2.0.4

1.0.5 CR,L,S Compito sessione estiva a.a. 93-94

In un piano orizzontale sono poste due aste A_1B_1 e A_2B_2 di rispettive masse M_1 ed M_2 (distribuzione di massa omogenea) e lunghezze L_1 ed L_2. Le aste sono libere di ruotare attorno ai rispettivi baricentri G_1 e G_2, fissi nel piano, con $|G_1G_2| = l > 0$.

Sia P un punto appartenente all'asta A_1B_1, giacente tra G_1 e A_1, Q un punto appartenente all'asta A_2B_2, giacente tra G_2 e A_2, $|G_1P| = |G_2Q| = r > 0$. Tra i punti P e Q agisce una molla ideale, di costante elastica $k > 0$. Si richiede:

1) scrivere la Lagrangiana del sistema;

2) determinare gli equilibri;

3) discutere la stabilità degli equilibri al variare del parametro $\alpha = \frac{l}{2r}$ in $\mathbb{R}_+ - \{1\}$;

4) considerato il sistema corrispondente a $l = 0$, si discuta il corrispondente sistema lagrangiano, mostrando che è riconducibile ad un sistema ad un grado di libertà.

Soluzione nella sezione 2.0.5

1.0.6 CR,L,S,PO: Compito di Meccanica Razionale del 6.10.94

In un piano verticale si adotta un sistema di riferimento inerziale (O, x, y), con O fisso, asse y orientato lungo la verticale ascendente. Sull'asse y è libero di scorrere senza attrito il punto P di massa m. Un'asta di estremi A, B, massa M, lunghezza $2L$ è libera di ruotare, senza attrito, attorno al suo punto medio, fissato in O. Il punto estremo A (risp. B) è richiamato dal punto P, tramite una molla elastica ideale, di costante k_1 (risp. k_2). Si assuma $a = k_1 - k_2 > 0$.

(I). Si scriva la Lagrangiana del sistema e si determinino le configurazioni di equilibrio al variare del parametro $\alpha := \frac{mg}{aL} \in (0, \infty)$.

(II). Si discuta la stabilità degli equilibri al variare del parametro α in $\mathbb{R}^+ - \{1\}$.

(III). Si studi il sistema Lagrangiano ottenuto per linearizzazione attorno alla posizione di equilibrio che è stabile per ogni α, nell'intervallo predetto.

(IV). Si assuma **ora** $a = 0$. Si determinino i moti del corrispondente sistema lagrangiano.

Soluzione nella sezione 2.0.6

1.0.7 CR,L,S,PO Compito del 20.6.94 (Marchioro)

Una sbarra rigida omogena pesante OH di lunghezza L e massa M è posta in un piano verticale ed è libera di ruotare senza attrito attorno al suo estremo O. Per l'altro estremo H passa una guida di massa trascurabile ortogonale alla sbarra. Lungo tale guida si muove senza attrito un punto materiale pesante P di massa m. Esso è soggetto oltre al peso ad una forza elastica $F = -k\,OP$, $k > 0$.

Scegliamo come variabili lagrangiane l'angolo θ che la sbarra forma con la verticale discendente e l'ascissa x del punto P lungo la guida.

1) Scrivere le equazioni del moto del sistema.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilità.

3) Studiare le piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

Soluzione nella sezione 2.0.7

1.0.8 CR,L,S,PO: Compito del 11.7.94 (Marchioro)

In un piano orizzontale si muovono due sbarrette omogenee di lunghezza L e massa M di estremi rispettivamente A, B, e B, C, incernierate tra loro in B ma libere di ruotare senza attrito. Gli estremi A e C sono obbligati a scorrere senza attrito lungo un asse fisso x. Su A agisce una forza $F_1 = -kH_1A$, su C una forza $F_2 = -kH_2C$ ($k > 0$), ove H_1 e H_2 sono punti dell'asse x di ascisse rispettivamente $-\frac{L}{2}$ e $\frac{L}{2}$. Scegliamo come variabili lagrangiane l'ascissa di B x_B, e l'angolo θ che AB forma con l'asse x.

1) Trovare le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

3) Scrivere le piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Trovare se esistono condizioni iniziali per cui il moto sia armonico con frequenza ω non solo per piccole oscillazioni ma anche per oscillazioni finite.

Soluzione nella sezione 2.0.8

1.0.9 CR,L,S,PO Esonero di Meccanica Razionale del 14-5-90

Un disco omogeneo pesante di massa M e raggio R è vincolato in un piano verticale a rotolare senza strisciare su una guida orizzontale Oy. Un punto materiale di massa m è vincolato senza attrito al suo bordo. Sul centro Ω del disco agisce la forza $-kO\Omega$ ($k \geq 0$).

1) Determinare gli equilibri e la loro stabilità, (per $k > 0$).

2) Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange studiando, per $k > 0$, le piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile. Si calcolino le frequenze proprie e i modi normali.

3) Per $k = 0$ si determinino 2 integrali primi del moto.

4) (facoltativo) Per $k = 0$ determinare i moti tali che la quota del punto materiale rimanga costante nel tempo.

Soluzione nella sezione 2.0.9

1.0.10 CR,LS,PO Esonero di Meccanica Razionale del 14-5-90

Un disco omogeneo pesante di massa M e raggio R è vincolato in un piano verticale a rotolare senza strisciare su una guida orizzontale Oy. Un punto materiale di massa m è vincolato senza attrito al suo bordo. Sul centro Ω del disco agisce la forza $-kO\Omega$ ($k \geq 0$).

1) Determinare gli equilibri e la loro stabilità, (per $k > 0$).

2) Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange studiando, per $k > 0$, le piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile. Si calcolino le frequenze proprie e i modi normali.

3) Per $k = 0$ si determinino 2 integrali primi del moto.

4) (facoltativo) Per $k = 0$ determinare i moti tali che la quota del punto materiale rimanga costante nel tempo.

Soluzione nella sezione 2.0.10

1.0.11 L,RU Compito di Meccanica del 23.2.1995

Un punto materiale pesante è vincolato senza attrito alla superficie di rotazione d'asse verticale z, descritta in coordinate cilindriche dall'equazione $\rho^2 = (1 + a\cos z)$, con $0 < z < 2\pi$, a costante positiva minore di 1.

a) Dimostra che il corrispondente sistema lagrangiano è integrabile.

b) Dimostra che esistono condizioni iniziali tali che il punto si muova mantenendo la quota costante. Descrivi tali moti.

Soluzione nella sezione 2.0.11

1.0.12 L,RU,N: Primo compito di esonero, a.a.94-95.

Si consideri la funzione Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + {q_1}^2 + {q_2}^2 - ({q_1}^2 + {q_2}^2)^3. \tag{1.1}$$

1) Sfruttando la simmetria della Lagrangiana dimostrare che esiste un integrale primo del corrispondente sistema di Lagrange, distinto dall'integrale primo dell'energia. Detto I tale integrale primo, si consideri il sistema di Lagrange ristretto sui livelli $I = c, c \in R \setminus \{0\}$. Si dimostri che tale restrizione è ancora un sistema Lagrangiano, ad un grado di libertà, e si scriva la corrispondente Lagrangiana $L^{(c)}$. Si studino quindi le orbite al variare di c.
2) Si considerino per il sistema di Lagrangiana L le condizioni iniziali:

$$\begin{array}{l} \alpha q_1(0) + \beta q_2(0) = 0 \\ \alpha \dot{q}_1(0) + \beta \dot{q}_2(0) = 0 \end{array} \tag{1.2}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2, \beta \neq 0$.

Si studino i corrispondenti moti, individuando in particolare, se esistono, moti a meta asintotica.

Soluzione nella sezione 2.0.12

1.0.13 CR,L,RU: Compito di Meccanica Razionale del 26.2.96

Un disco rigido di massa M e raggio R è libero di scorrere senza attrito su di un piano orizzontale fisso. Sul bordo del disco puó scorrere, ancora senza attrito, un punto materiale di massa m.

Si richiede di determinare il moto del sistema.

Soluzione nella sezione 2.0.13

1.0.14 CR,L,S,RU Compito sessione estiva a.a. 93-94

In un piano orizzontale sono poste due aste A_1B_1 e A_2B_2 di rispettive masse M_1 ed M_2 (distribuzione di massa omogenea) e lunghezze L_1 ed L_2. Le aste sono libere di ruotare attorno ai rispettivi baricentri G_1 e G_2, fissi nel piano, con $|G_1G_2| = l > 0$.

Sia P un punto appartenente all'asta A_1B_1, giacente tra G_1 e A_1, Q un punto appartenente all'asta A_2B_2, giacente tra G_2 e A_2, $|G_1P| = |G_2Q| = r > 0$. Tra i punti P e Q agisce una molla ideale, di costante elastica $k > 0$. Si richiede:

1) scrivere la Lagrangiana del sistema;

2) determinare gli equilibri;

3) discutere la stabilità degli equilibri al variare del parametro $\alpha = \frac{l}{2r}$ in $\mathbb{R}_+ - \{1\}$;

4) considerato il sistema corrispondente a $l = 0$, si discuta il corrispondente sistema lagrangiano, mostrando che è riconducibile ad un sistema ad un grado di libertà.

Soluzione nella sezione 2.0.14

1.0.15 L,S,H Secondo appello Meccanica Razionale a.a. 93-94.

Si consideri in un piano orizzontale un punto materiale P, di massa m. Il punto è richiamato, tramite una molla ideale di costante elastica k_1, $(k_1 > 0)$, dal punto fisso O. Inoltre, a distanza l da O é posto il centro di un cerchio, di raggio R. Il cerchio è fisso. Sul cerchio è libero di scorrere senza attrito un punto materiale Q di massa M. I punti P e Q interagiscono tramite una molla ideale di costante elastica k_2, $(k_2 > 0)$.
I^o. Si scriva la Lagrangiana del sistema e si determinino le soluzioni stazionarie del corrispondente sistema di Lagrange.
II^o. Si discuta la stabilità delle soluzioni di equilibrio trovate al punto I^o, determinando le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.
III^o. Si consideri il caso: $l = 0$. Si dimostri che il sistema Lagrangiano ha un integrale primo indipendente dall'energia. Si scriva la funzione di Hamilton del sistema corrispondente al valore nullo di detto integrale primo, usando come coordinata spaziale indipendente la differenza delle anomalie angolari di P e di Q.
IV^o. Si consideri il caso limite in cui $m|OP|^2$ è trascurabile rispetto a MR^2; si valuti quindi in questa approssimazione la funzione di Hamilton a partire da quella determinata nel punto precedente, e si dimostri che il corrispondente sistema Hamiltoniano è integrabile.

Soluzione nella sezione 2.0.15

1.0.16 L,S,N

Si consideri un punto materiale di massa m soggetto ad un campo di forze di energia potenziale $V(x, y, z)$ soddisfacente il seguente requisito: il potenziale è invariante rispetto al gruppo di diffeomorfismi:

$$h_\tau(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau & 0 \\ \sin\tau & \cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha\tau \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Prima domanda. Si trovi l'integrale primo corrispondente alla simmetria dell'energia potenziale e si determini un sistema di coordinate adattato (r, θ, z).

Seconda domanda. Usando la simmetria del sistema si riduca di uno il numero dei gradi di libertà, considerando quindi una opportuna Lagrangiana ridotta. Determinare gli equilibri di tale Lagrangiana ridotta e darne una interpretazione in termini delle coordinate (r, θ, z).

Terza domanda. Si studi la stabilità degli equilibri nel caso particolare:

$$V(r, \theta, z) = \frac{1}{r^2(\cos^2(\alpha\theta - z) - \sin^2(\alpha\theta - z))}. \tag{1.4}$$

Soluzione nella sezione 2.0.16

1.0.17 L,RU,H,HJ,AA Compito di Meccanica Razionale, 9/7/'96, II^o appello, sess. estiva

Un punto materiale di massa unitaria è vincolato a muoversi sulla superficie di rotazione di equazione $z = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho}$, dove $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Sul punto agisce una forza costante, di intesità unitaria, diretta verso la direzione negativa dell'asse z.

1) Scrivi la Lagrangiana e l'Hamiltoniana del sistema.

2) Determina gli integrali primi del moto.

3) Determina le condizioni sui dati iniziali per cui il moto esiste per tutti i tempi, per cui si hanno orbite limitate, per cui si hanno orbite illimitate.

4) Considera un'orbita illimitata. È finito l'angolo $\lim_{t\to+\infty} \theta(t) - \lim_{t\to-\infty} \theta(t)$? ($\theta(t)$ è l'angolo che la congiungente tra il punto materiale e l'asse delle z forma con un asse orizzontale fisso).

5) Risolvi il moto per quadrature mediante la soluzione dell'equazione di Hamilton -Jacobi.

6) Determina la regione dello spazio delle fasi in cui il moto si puó descrivere in variabili azione-angolo e determina le variabili d'azione.

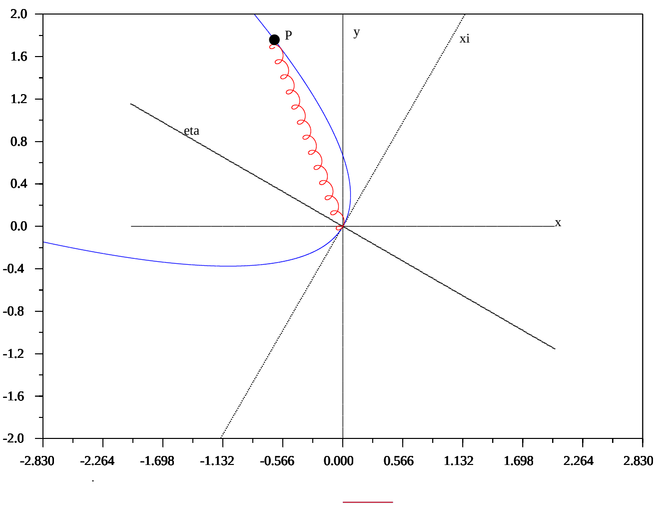
Soluzione nella sezione 2.0.18

1.0.18 CR,L,RU,H,HJ Compito di Meccanica Razionale, 24/9/'96, I^o appello, sess. autunnale

Si consideri, in un piano fisso orizzontale, una guida $\mathcal{G}$, liscia, a forma di arco di parabola, libera di ruotare senza attrito attorno al suo vertice O, fissato sul piano. Sia I il suo momento di inerzia rispetto ad O. In un sistema di coordinate cartesiane $(O,\, \xi,\, \eta)$, solidale con la guida, essa è rappresentata dall'equazione $\eta = a\xi^2$, $a > 0$, $|\xi| \leq r$, $r > 0$.

Un punto materiale P di massa m, è libero di scorrere senza attrito sulla guida $\mathcal{G}$. Il punto P é richiamato da O per il tramite di una molla elastica di costante $k > 0$.

Si denoti con θ l'angolo che la direzione tangente in O alla guida forma con una direzione fissa del piano (vedi figura). **1)** Si scriva la Lagrangiana del sistema, riconoscendone le eventuali simmetrie ed i conseguenti integrali



primi.
2) Dopo aver riconosciuto l'esistenza di un integrale primo J (ulteriore rispetto all'energia), si analizzino i moti del sistema unidimensionale che si ottiene fissando il valore di J.
3) Si determinino delle condizioni sui dati iniziali per cui il moto del sistema composto dalla guida e dal punto materiale sia periodico.
4) Si scriva l' Hamiltoniana e si discuta l'equazione di Hamilton-Jacobi, con il metodo di separazione delle variabili.

Soluzione nella sezione 2.0.18

1.0.19 CR,L,RU,H,HJ,AA Compito di Meccanica Razionale, 8/10/'96, II^o appello, sess. autunnale

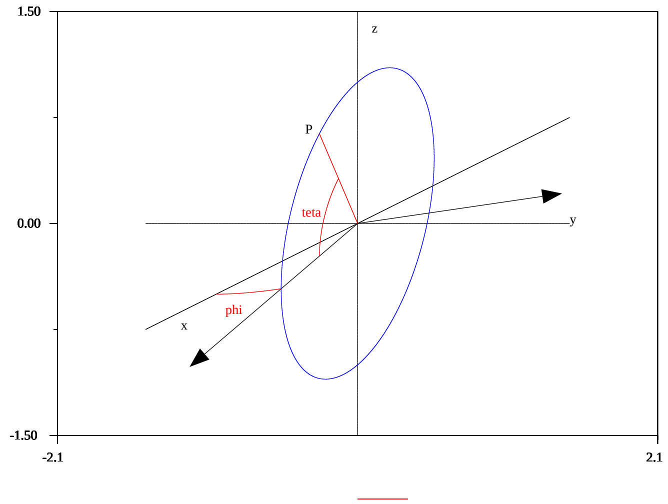
Considera una terna di riferimento inerziale $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Un disco rigido di massa M e raggio R, e' vincolato ad avere il centro in O. L'asse $\mathbf{u}$, passante per O ed ortogonale al disco, è vincolato a muoversi sul piano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, ed inoltre il disco è libero di ruotare intorno a tale asse $\mathbf{u}$.

Sul bordo del disco è fissato un punto materiale P di massa m, che è richiamato dall'asse $\mathbf{z}$ da una molla di costante elastica k.

Considera il sistema in assenza della forza di gravità.

1) Individua i gradi di libertà del sistema e scrivi la Lagrangiana e l'Hamiltoniana.

2) Determina simmetrie ed integrali primi, e riduci lo studio del moto del sistema ad un problema ad un grado di libertà.



3) Studia qualitativamente il moto unidimensionale che hai ottenuto, ed in particolare analizza la stabilità delle soluzioni stazionarie, al variare dei parametri.

4) Risolvi il problema con il metodo di Hamilton-Jacobi e determina la regione dello spazio delle fasi nella quale il moto puó essere descritto in variabili azione-angolo.

Soluzione nella sezione 2.0.19

1.0.20 TC: Compito di Meccanica del 23.2.1995

Si consideri la trasformazione $S_\beta : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{l} Q = -\arctan\left(\frac{2P}{q}\right) \\ P = \beta q^2 + p^2 \end{array} \tag{1.5}$$

a) Determinare i valori di β per cui S_β é canonica;

b) scrivere per tali valori l'espressione esplicita di S_β^{-1}.

Soluzione nella sezione 2.0.20

1.0.21 TC

Si consideri la trasformazione $S_\beta : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{l} Q = -\arctan\left(\frac{2P}{q}\right) \\ P = \beta q^2 + p^2 \end{array} \tag{1.6}$$

a) Determinare i valori di β per cui S_β é canonica;

b) scrivere per tali valori l'espressione esplicita di S_β^{-1}.

Soluzione nella sezione 2.0.21

1.0.22 TC,AA,P Secondo compito di esonero a.a.94.

Si consideri la funzione

$$H = \frac{1}{2}\{(p_1 - f(q_1))^2 + p_2^2\} + g(q_1, q_2). \tag{1.7}$$

Si dimostri che la trasformazione:

$$\begin{aligned} &p_1 - f(q_1) = P_1 \\ &q_1 = Q_1 \\ &p_2 = P_2 \\ &q_2 = Q_2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

é canonica.

(2). Si consideri quindi la seguente Hamiltoniana:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\{P_1^2 + P_2^2\} + g(Q_1, Q_2). \tag{1.9}$$

dove

$$g(Q_1, Q_2) = \frac{1}{2}(Q_1^2 + \omega^2 Q_2^2) + \varepsilon Q_1^2 Q_2. \tag{1.10}$$

Si dimostri che è possibile introdurre variabili azione-angolo, in modo che in queste nuove variabili l'Hamiltoniana assuma la forma:

$$\tilde{H}(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2) = I_1 + \omega I_2 + \varepsilon a I_1 (I_2)^{\frac{1}{2}} sen^2\phi_1 sen\phi_2, \tag{1.11}$$

per un opportuno valore della costante a.

(3). Si determinino le condizioni su ω, talché con un cambiamento di variabili simplettico $(I, \phi) \to (J, \psi)$, la Hamiltoniana prenda la forma:

$$H(J, \psi) = J_1 + \omega J_2 + O(\varepsilon^2). \tag{1.12}$$

Soluzione nella sezione 2.0.22

1.0.23 H,HJ,AA,S: II esonero 10/5/'96

Considera l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}P_y^2(1 + x^2) + \frac{1}{2}(1 + x^2)y^2. \tag{1.13}$$

a) Risolvi, per separazione di variabili, l'equazione di Hamilton Jacobi per H.

b) Determina la regione dello spazio delle fasi in cui il moto puó essere descritto in variabili azione-angolo.

c) Calcola esplicitamente l'espressione dell'Hamiltoniana in termini delle variabili d'azione, e le frequenze dei moti multiperiodici.

d) Considera il moto di dato iniziale

$$\begin{aligned} &x(0) = 0 \qquad &&y(0) = 0 \\ &P_x(0) = a \qquad &&P_y(0) = 1, \end{aligned} \tag{1.14}$$

con $a \in \mathbb{R}$; trova i valori di a per cui è periodico.

e) Trova il periodo del moto per $a = 1$.

f) Discuti la stabilità della soluzione stazionaria

$$\begin{aligned} &x(0) = 0 \qquad &&y(0) = 0 \\ &P_x(0) = 0 \qquad &&P_y(0) = 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Soluzione nella sezione 2.0.23

1.0.24 CR,H,HJ,P: Esonero di Meccanica Razionale del 6-6-90

Un'asta omogenea di massa M lunga L ha un estremo fisso in 0. L'altro estremo è vincolato senza attrito su una circonferenza di raggio $L/2$ che giace su un piano orizzontale e il cui centro è sulla verticale sotto 0. Un punto materiale pesante P di massa m è vincolato senza attriti alla retta contenente l'asta ed è anche soggetto alla forza elastica $-k0P$, $k > 0$.
1) Scrivere l'hamiltoniana del sistema e individuare due integrali primi del moto.
2) Scrivere le equazioni di Hamilton-Jacobi e portarne alle quadrature la soluzione.
3) Integrare le equazioni di Hamilton-Jacobi all'ordine zero in m/M e dare un'interpretazione fisica del risultato.
4) (facoltativo) Valutare la correzione al primo ordine in m/M, relativamente al punto 3).

Soluzione nella sezione 2.0.24

2 Soluzioni di alcuni compiti di esame

2.0.1 L,S,PO: Compito di Meccanica, febbraio '97

2.0.2 L,S,PO: Primo compito di esonero, a.a. 93-94.

La lagrangiana del sistema è:

$$L(s,\dot{s},\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\{m_1 a^2\dot{\theta}^2 + m_2(s^2\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2)\} - g\{m_1 a + m_2 s\}\sin\theta - \frac{k}{2}(s-a)^2. \tag{2.1}$$

Le soluzioni di equilibrio sono assegnate dagli zeri del sistema:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial U}{\partial s} &= -m_2 g a \sin\theta + k(s-a) = 0 \\ \tfrac{\partial U}{\partial \theta} &= -g(m_1 a + m_2 s)\cos\theta = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Esse sono dunque:

$$\begin{aligned} (\theta_1, s_1,) &= \left(\tfrac{1}{2}\pi, -\tfrac{g m_2 a}{k} + a\right), \\ (\theta_2, s_2) &= \left(\tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{g m_2 a}{k} + a\right), \\ (\theta_3, s_3) &= \left(\pi + \arcsin\alpha, -\tfrac{a m_1}{m_2}\right), \\ (\theta_4, s_4) &= \left(-\arcsin\alpha, -\tfrac{a m_1}{m_2}\right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

ricordando che $\alpha = k\frac{m_1+m_2}{g m_2^2}$. Ovviamente, le ultime due soluzioni esistono *solo* quando $\alpha \leq 1$.

Per studiare la stabilità delle soluzioni studiamo la matrice Hessiana di U. Ad essa è associata la forma quadratica:

$$H(s,\theta)(u,v) = -ku^2 - 2m_2 g\cos\theta uv - g(m_1 a + m_2 s)v^2. \tag{2.4}$$

Calcoliamola nelle varie posizioni di equilibrio.

Si ha:

$$\begin{aligned} H(s_1,\theta_1)(u,v) &= -ku^2 - \tfrac{g^2 m_2^2 a(\alpha-1)}{k}v^2, \\ H(s_2,\theta_2)(u,v) &= -ku^2 - \tfrac{g^2 m_2^2 a(\alpha+2)}{k}v^2, \\ H(s_3,\theta_3)(u,v) &= -ku^2 - 2m_2 g\cos\theta_3\, uv, \\ H(s_4,\theta_4)(u,v) &= -ku^2 - 2m_2 g\cos\theta_4\, uv. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dunque finché $\alpha - 1 > 0$ (rispettivamente < 0), la posizione (s_1, θ_1) è instabile (risp. stabile). La posizione $(s_2\theta_2)$ è sempre stabile. Quando esistono, cioé per $\alpha - 1 < 0$, le posizioni $(s_3,\theta_3), (s_4,\theta_4)$ sono instabili.
Osservazione: si osservi la conservazione del numero delle posizioni di equilibrio stabile, al variare di α.

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono determinate dagli autovalori immaginari di μ diag$\{m_2, m_1 a^2 + m_2 s_i^2\} - H(s_i,\theta_i)$, dove si sono denotati con (s_i,θ_i) gli equilibri stabili. Si determinino quindi tali autovalori.

Passiamo alla quarta domanda. Il sistema di Lagrange è:

$$\ddot{s} = \left(\omega^2 - \frac{k}{m_2}\right) s + \left(\frac{ka}{m_2} - g \sin \omega t\right). \tag{2.6}$$

Si tatta di un' equazione lineare con termine forzante dipendente dal tempo. Possiamo riscriverla come un sistema del primo ordine. Introduciamo le matrici:

$$u = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} O & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

dove $\lambda = \omega^2 - \frac{k}{m_2}$, $f(t) = \left(\frac{ka}{m_2} - g \sin \omega t\right)$. Si ha la seguente formula risolutiva:

$$u(t) = e^{At} \left(u_0 + \int_0^t e^{-As} F(s)\, ds\right). \tag{2.8}$$

Per quanto riguarda la matrice e^{At} si ha:
i)

$$\lambda > 0 : e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\sqrt{\lambda} t}}{\sqrt{\lambda}} & -\frac{e^{-\sqrt{\lambda} t}}{\sqrt{\lambda}} \\ e^{\sqrt{\lambda} t} & e^{-\sqrt{\lambda} t} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

ii)

$$\lambda < 0 : e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \sqrt{|\lambda|} t}{\sqrt{|\lambda|}} & -\frac{\sin \sqrt{|\lambda|} t}{\sqrt{|\lambda|}} \\ \sin \sqrt{|\lambda|} t & \cos \sqrt{|\lambda|} t \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Il lettore completi i calcoli.

2.0.3 CR,L,S Compito di Meccanica Razionale, 6/6/'96, I^o appello, sess. estiva.

1)

$$OG = (R - r) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad v_G = (R - r)\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

La condizione di puro rotolamento è:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \times r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + (R - r)\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

cioé: $R\dot{\psi} = r\dot{\phi} + (R - r)\dot{\theta}$, che è integrabile: $R\omega t = r\phi + (R - r)\theta + const.$.
2) Vale: $\dot{\phi} = \frac{R}{r}\omega - \frac{R-r}{r}\dot{\theta}$.
Energia della circonferenza: $T_C = \frac{1}{2} M_1 \omega^2$.
Energia cinetica del disco: $T_D = \frac{1}{2}(R - r)^2 M\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} M r^2 \left(\frac{R}{r}\omega - \frac{R-r}{r}\dot{\theta}\right)^2$.
Energia potenziale: $\frac{1}{2} k \left(y^2 + (R - r)^2 - 2y(R - r)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) + Mg(R - r)\sin\theta + mgy$.
A meno di derivate totali rispetto al tempo, la lagrangiana é:

$$L = \frac{3}{4} M(R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\left(y^2 - 2y(R - r)\sin\theta\right) - Mg(R - r)\sin\theta - mgy. \tag{2.13}$$

3) Equilibri:

$$\begin{aligned} \partial_y V &= ky - k(R - r)\sin\theta + mg = 0 \\ \partial_\theta V &= (Mg - ky)(R - r)\cos\theta = 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

da cui si ricava: $\cos\theta = 0$, oppure $y = \frac{Mg}{k}$. Quindi le soluzioni stazionarie sono: $(\pm\frac{\pi}{2}, \pm(R-r) - \frac{mg}{k})$ e, indicato $\lambda = \frac{(M+m)g}{(R-r)k}$, se $\lambda < 1$: $(\arcsin\lambda, \frac{Mg}{k})$, $(\pi - \arcsin\lambda, \frac{Mg}{k})$.
4) Stabilità: l'hessiano dell'energia potenziale è

$$H = \begin{pmatrix} k & -k(R-r)\cos\theta \\ -k(R-r)\cos\theta & -(R-r)(Mg-ky)\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Per $(\theta, y) = (\frac{\pi}{2}, (R-r) - \frac{mg}{k})$:

$$H = \begin{pmatrix} k & O \\ O & -k(R-r)^2(\lambda-1) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

dunque è stabile se $\lambda < 1$, instabile se $\lambda > 1$.
Per $(\theta, y) = (-\frac{\pi}{2}, -(R-r) - \frac{mg}{k})$:

$$H = \begin{pmatrix} k & O \\ O & k(R-r)^2(\lambda+1) \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

dunque è stabile per tutti i valori di λ.
Per $\lambda < 1$, $y = \frac{Mg}{k}$:

$$H = \begin{pmatrix} k & -k(R-r)\cos\theta \\ -k(R-r)\cos\theta & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.18}$$

$\det H = -k^2(R-r)^2\cos^2\theta < 0$, dunque sono entrambe instabili.
Per $\lambda = 1$: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{Mg}{k}\right) \equiv \left(\frac{\pi}{2}, (R-r) - \frac{mg}{k}\right)$ che è instabile, altrimenti l'energia potenziale avrebbe due minimi stretti come unici punti critici.
4) Le Equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}M(R-r)\ddot{\theta} = -(Mg-ky)\cos\theta \\ m\ddot{y} = -ky + k(R-r)\sin\theta - mg \end{cases} \tag{2.19}$$

ora $\theta(t) \equiv \pm\frac{\pi}{2}$ risolve identicamente la prima equazione; dunque il moto del punto Q è dato da:

$$m\ddot{y} = -ky \pm k(R-r) - mg, \tag{2.20}$$

che è un moto armonico intorno agli equilibri $y = \pm(R-r) - \frac{mg}{k}$.

2.0.4 CR,L,S Compito di Meccanica Razionale, sess. estiva (Pulvirenti)

La condizione di puro rotolamento fornisce per il moto del baricentro:

$$v_G = (0, R\dot{\phi}). \tag{2.21}$$

e quindi, viste le condizioni iniziali:

$$(x_G, y_G) = (0, R\phi). \tag{2.22}$$

Il punto P ha coordinate:

$$P \equiv (\xi\cos\phi, R\phi + \xi\sin\phi). \tag{2.23}$$

La Lagrangiana del sistema $L = T + U$ è:

$$\begin{aligned} L = &\tfrac{1}{2}\big(I_G + MR^2 + m\xi^2 + mR^2\big)\dot{\phi}^2 + \tfrac{m}{2}\dot{\xi}^2 + \\ &+ mR\dot{\phi}\big(\dot{\xi}\sin\phi + \dot{\phi}\xi\cos\phi\big) \\ &-(M+m)gR\phi - mg\xi\sin\phi - \tfrac{k^2}{2}\xi^2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Le posizioni di equilibrio sono gli zeri del gradiente del potenziale U

$$\begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial \xi} = -mg\sin\phi - k\xi \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} = -mg\xi\cos\phi - (m+M)gR \end{array} \tag{2.25}$$

Pertanto gli equilibri esistono solo se :

$$\beta \equiv \frac{2k(m+M)R}{m^2 g} \leq 1 \tag{2.26}$$

e sono:

$$\begin{array}{l} (\phi_1 = \frac{1}{2}\arcsin\beta, \xi_1 = -\frac{mg}{k}\sin\phi_1) \\ (\phi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\beta, \xi_2 = -\frac{mg}{k}\sin\phi_2) \end{array} \tag{2.27}$$

Lo Hessiano del potenziale è dato da:

$$\begin{array}{cc} -k & -mg\cos\phi \\ -mg\cos\phi & -\frac{m^2 g^2}{k}\sin^2\phi \end{array} \tag{2.28}$$

Dunque la sua traccia,in entrambe le posizioni di equilibrio, é negativa, cioé la somma degli autovalori dello Hessiano è negativa. Il determinante Δ vale:

$$\Delta = -m^2 g^2 \cos 2\phi, \tag{2.29}$$

Quindi, finché $\beta < 1$, Δ è negativo se $\phi = \phi_1$ (e quindi equilibrio instabile), positivo se $\phi = \phi_2$ (e quindi equilibrio stabile). Per $\beta = 1$ si ha un caso critico. Infine, alla quarta domanda si risponde osservando che in questo caso il moto è uniformemente accelerato.

2.0.5 CR,L,S Compito sessione estiva a.a. 93-94

2.0.6 CR,L,S,PO: Compito di Meccanica Razionale del 6.10.94

La lagrangiana del sistema è:

$$L = \frac{1}{2}(m\dot{y}^2 + I\dot{\phi}^2 - by^2) - mgy + aLy\sin\phi, \tag{2.30}$$

dove si è posto $b = k_1 + k_2$.
Equilibri. Si debbono determinare gli zeri del campo gradiente:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial y} = -mg - by + aL\sin\phi \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} = aLy\sin\phi. \end{array} \tag{2.31}$$

Si hanno le seguenti soluzioni:

$$(y = 0, \phi_1 = \arcsin\alpha), (y = 0, \phi_2 = \pi - \arcsin\alpha), \tag{2.32}$$

sse $\alpha \leq 1$.Inoltre, si hanno le restanti soluzioni, per ogni valore di α:

$$\phi_3 = \frac{\pi}{2}, y_3 = \frac{aL(1-\alpha)}{b} \tag{2.33}$$

$$\phi_4 = \frac{3\pi}{2}, y_4 = -\frac{aL(1+\alpha)}{b} \tag{2.34}$$

.

Stabilità. Calcolato H, lo Hessiano di L rispetto a (y, ϕ), si ha:

$$detH = abLy\sin\phi - a^2L^2cos^2\phi. \tag{2.35}$$

La traccia di H è:

$$TrH = -b - aLy \sin\phi. \tag{2.36}$$

Di conseguenza, detti λ_1, λ_2 gli autovalori di H, negli equilibri $(0, \phi_{1,2})$ si ha:

$$\lambda_1\lambda_2 = -a^2L^2cos^2\phi < 0, \lambda_1 + \lambda_2 = -b < 0. \tag{2.37}$$

Dunque si hanno due equilibri instabili, per $\alpha < 1$. In (ϕ_3, y_3), si ha:

$$\lambda_1\lambda_2 = a^2L^2(1-\alpha), \lambda_1 + \lambda_2 = -b - \frac{a^2L^2(1-\alpha)}{b}. \tag{2.38}$$

Dunque, l'equilibrio è stabile se $\alpha < 1$, se $\alpha > 1$. Finalmente, si constata facilmente che (ϕ_4, y_4) è sempre stabile se $\alpha \neq 1$.

Consideriamo quindi la lagrangiana quadratica ottenuta da L, tenendo in conto solo i termini di ordine 2 inclusi, relativamente all'equilibrio (ϕ_4, y_4). Posto

$$(y, \phi) = (\eta, \psi) + (y_4\phi_4), \tag{2.39}$$

si ha:

$$L_{[2]} = \frac{1}{2}\left(m\dot{\eta}^2 + I\dot{\psi}^2 - b\eta^2 - \frac{a^2L^2(1+\alpha)}{b}\psi^2\right). \tag{2.40}$$

Il corrispondente sistema Lagrangiano si separa in due sottosistemi:precisamente i sistemi due oscillatori armonici disaccoppiati, quello in η di frequenza $\omega_1^2 = \frac{b}{m}$, quello in ψ di frequenza $\omega_2^2 = \frac{a^2L^2(1+\alpha)^2}{I}$.

Consideriamo l'ultima domanda. Posto $a = 0$ nell'espressione di L, il problema si riduce a due problemi lagrangiani separati, il primo di Lagrangiana:

$$L_1 = \frac{1}{2}(m\dot{y}^2 - by^2) - mgy, \tag{2.41}$$

il secondo di lagrangiana

$$L_2 = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2. \tag{2.42}$$

Il primo problema ha solo moti periodici, e precisamente oscillazioni lineari attorno all'equilibrio

$$y = -\frac{mg}{b}. \tag{2.43}$$

Il secondo problema fornisce $\phi(t) = Kt + \phi(0)$, con K costante arbitraria.

2.0.7 CR,L,S,PO Compito del 20.6.94 (Marchioro)

2.0.8 CR,L,S,PO: Compito del 11.7.94 (Marchioro)

2.0.9 CR,L,S,PO Esonero di Meccanica Razionale del 14-5-90

2.0.10 CR,LS,PO Esonero di Meccanica Razionale del 14-5-90

2.0.11 L,RU Compito di Meccanica del 23.2.1995

2.0.12 L,RU,N: Primo compito di esonero, a.a.94-95.

1) Il sistema è invariante per rotazioni attorno all'asse perpendicolare al piano (q_1, q_2). Pertanto si conserva la componente lungo questo asse del momento angolare:

$$I = q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1. \tag{2.44}$$

Consideriamo i livelli $I = c, c \neq 0$. Introduciamo le coordinate polari:

$$\begin{aligned} q_1 &= r\cos\phi \\ q_2 &= r\sin\phi. \end{aligned} \tag{2.45}$$

La Lagrangiana L si riscrive in queste coordinate:

$$L = \dot r^2 + r^2\dot\phi^2 + r^2 - r^6, \tag{2.46}$$

l'integrale primo I:

$$I = r^2\dot\phi^2. \tag{2.47}$$

Il sistema Lagrangiano ristretto sul livello c è dato dalla Lagrangiana:

$$L^{(c)} = \dot r^2 - \frac{c^2}{2r^2} + r^2 - r^6. \tag{2.48}$$

La funzione energia potenziale $V(r) = \frac{c^2}{2r^2} - r^2 + r^6$ ha un solo minimo e costituisce una barriera per il punto $r = 0$: per ogni valore di E, $E \geq V(r_{cr}), r_{cr} = \left(\frac{1+\sqrt{1+6c^2}}{6}\right)^{\frac{1}{4}}$, si hanno due radici $0 < r_1(E) \leq r_2(E)$ dell'equazione $E = V(r)$. Le radici sono distinte se $E \neq V(r_{cr}$. Tutti i moti sono quindi limitati e perció periodici.
(2). L'invarianza della retta è ovvia, corrisponde a $I = 0$. Il sistema di Lagrange corrisponde sulla retta al sistema:

$$\ddot q_1 = 2q_1\{1 - q_1^5\gamma^2\}, \tag{2.49}$$

$\gamma^2 = 3\frac{\beta^2+\alpha^2}{2\beta^2}$.

Si tratta di un problema Lagrangiano con potenziale:

$$U(q_1) = q_1^2 - q_1^6\gamma^2. \tag{2.50}$$

Il potenziale ha tre punti critici, $q_1^1 = 0, q_1^2 = \sqrt{\gamma}, q_1^3 = -\sqrt{\gamma}$.

Il punto O è un punto di equilibrio instabile, $q_1^i, i = 2, 3$, sono stabili. Si tratta di una doppia buca. Tutte le soluzioni sono limitate. La separatrice ha equazione:

$$\dot q_1^2 = 2\{q_1^2 - q_1^6\gamma^2\} \tag{2.51}$$

2.0.13 CR,L,RU: Compito di Meccanica Razionale del 26.2.96

Siano (x, y) le coordinate del centra del disco C, relativamente ad un sistema piano fisso K. Denotiamo con ψ l'angolo che un sistema k, di coordinate (χ, η), origine in C, di assi solidali al disco forma col sistema fisso K. Sia poi ϕ l'angolo che individua il punto P sul bordo del disco, e precisamente l'angolo che CP forma con l'asse parallelo all'asse x.

Si ha allora:

$$\begin{aligned} x_P &= x + R\cos\phi \\ y_P &= y + R\sin\phi. \end{aligned} \tag{2.52}$$

La Lagrangiana del sistema è:

$$L = \frac{1}{2}\Big\{I\psi^2 + (M+m)(\dot x^2 + \dot y^2) - 2mR(\dot y\sin\phi - \dot x\cos\phi)\dot\phi + mR^2\dot\phi^2\Big\}. \tag{2.53}$$

Le coordinate x, y, ψ sono cicliche, e pertanto si hanno tre integrali primi del moto:

$$\begin{aligned} p_x &= (M+m)\dot x + mR\dot\phi\cos\phi \\ p_y &= (M+m)\dot y - mR\dot\phi\sin\phi \\ p_\psi &= I\dot\psi. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Possiamo ottenere il moto del sistema considerando il livello $p_x = C_1, p_y = C_2, \dot\psi = \Omega$.

La lagrangiana ridotta diviene allora banalmente equivalente alla Lagrangiana assegnata dalla sola eneria cinetica $\frac{1}{2}m\dot{\phi}^2$. In conclusione, il moto del sistema è assegnato da:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{C_1 t}{(m+M)} + \tfrac{mR}{(m+M)}\sin\omega t \\ y(t) &= \tfrac{C_1 t}{(m+M)} + \tfrac{mR}{(m+M)}\cos\omega t \\ \phi(t) &= \omega t + \psi(0) \\ \psi(t) &= \Omega t + \psi(0), \end{aligned} \tag{2.55}$$

essendo $(\omega,\Omega) = (\dot{\phi}(0), \dot{\psi}(0))$.

Il compito puó essere variato, aggiungendo la considerazione di una forza agente su P, dipendente solo dall'angolo ψ. Nella Lagrangiana si ha allora una presenza del potenziale $U(\psi)$ che non impedisce la presenza dei tre integrali primi citati. Il problema si riconduce ad un problema ad un solo grado di libertà.

2.0.14 CR,L,S,RU Compito sessione estiva a.a. 93-94

2.0.15 L,S,H Secondo appello Meccanica Razionale a.a. 93-94.

2.0.16 L,S,N

Prima domanda. La simmetria del potenziale si puó meglio rappresentare utilizzando coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z. \end{aligned} \tag{2.56}$$

In tale sistema di coordinate, il gruppo diventa:

$$h_\tau(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} r \\ \theta+\tau \\ z+\alpha\tau \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

Si ha allora:

$$V(r\cos(\tau+\theta), r\sin(\tau+\theta), z+\alpha\tau) \equiv V(r\cos\theta, r\sin\theta, z). \tag{2.58}$$

Deve allora aversi, posto $W(r,\theta,z) := V(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$:

$$W(r,\theta,z) \equiv W(r,\theta+\tau, z+\alpha\tau), \tag{2.59}$$

e perció:

$$\frac{\partial W}{\partial\theta} + \alpha\frac{\partial W}{\partial z} \equiv 0. \tag{2.60}$$

Allora si ha:

$$W(r,\theta,z) \equiv W(r, \alpha\theta - z). \tag{2.61}$$

La Lagrangiana è:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + W(r,\alpha\theta - z). \tag{2.62}$$

Il gruppo ad un parametro è una rotazione nel piano (x,y) accoppiata ad una traslazione lungo l'asse z; palesemente è un'isometria in $\mathbb{R}^3$ e lascia dunque invariata l'energia cinetica.

L'integrale primo di Noether è:

$$P = m\left(r^2\dot{\theta} + \alpha\dot{z}\right). \tag{2.63}$$

Possiamo adattare ancora le coordinate alla simmetria, introducendo:

$$\phi := \alpha\theta - z. \tag{2.64}$$

La lagrangiana in r, θ, ϕ è:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r^2+\alpha^2)\dot{\theta}^2 - 2\alpha\dot{\theta}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2\right) + W(r,\phi). \tag{2.65}$$

Con questa scelta di coordinate la variabile θ è ciclica; per ottenere la Lagrangiana ridotta procediamo con iil metodo di Routh, operiamo, cioé, la trasformata di Legendere nella variabile $\dot{\theta}$:

$$P_\theta = m(r^2+\alpha^2)\dot{\theta} - \alpha m\dot{\phi}, \quad \dot{\theta} = \frac{P_\theta + \alpha m\dot{\phi}}{m(r^2+\alpha^2)}. \tag{2.66}$$

La Lagrangiana cercata è $\tilde{L}(r,\dot{r},\phi,\dot{\phi}) = -R$:

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\frac{r^2}{r^2+\alpha^2}\dot{\phi}^2 + \frac{\alpha P_\theta}{r^2+\alpha^2}\dot{\phi} - \left(W(r,\phi) + \frac{P_\theta^2}{2m(r^2+\alpha^2)}\right). \tag{2.67}$$

dove P_θ è una costante. Si è dunque eliminata un grado di libertà, ottenendo l'energia potenziale efficace:

$$V^{(e)}(r,\phi) := W(r,\phi) + \frac{J^2}{\alpha^2+r^2}. \tag{2.68}$$

Si osservi che la sostituzione dell'integrale primo nell'espressione dell'energia totale, dà l'energia associata alla lagrangiana $\tilde{L}$:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\frac{r^2}{r^2+\alpha^2}\dot{\phi}^2 + \left(W(r,\phi) + \frac{P_\theta^2}{2m(r^2+\alpha^2)}\right), \tag{2.69}$$

ma essendo E l'energia di un sistema a **due** gradi di libertà, **non si puó** da essa risalire all'espressione corretta di $\tilde{L}$, che infatti contiene un termine lineare in $\dot{\phi}$, che non dà contributo all'energia.

Per ovviare alla difficoltà formale data dalla presenza di termini non diagonali nell'energia cinetica (e cioé del termine in $\dot{\theta}\dot{\phi}$), si puo' procedere nel modo seguente: detta $\bar{\theta} = \alpha\theta$, si vogliono scegliere $\phi = \bar{\theta} - z$ e γ come nuove variabili, con γ da determinare, in modo che il termine cinetico $\frac{r^2}{\alpha^2}\dot{\bar{\theta}}^2 + \dot{z}^2$ resti diagonale. La scelta giusta è $\gamma = \frac{1}{\frac{r^2}{\alpha^2}+1}\left(\frac{r^2}{\alpha^2}\bar{\theta} + z\right)$ (stiamo procedento in analogia all'eliminazione del moto del baricentro nel problema dei due corpi: $\frac{r^2}{\alpha^2}$, 1 giocano il ruolo delle masse, $\frac{r^2}{\alpha^2}+1$ della massa totale e $\frac{\frac{r^2}{\alpha^2}}{\frac{r^2}{\alpha^2}+1}$ della massa ridotta). Si ottiene:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{r^2+\alpha^2}{\alpha^2}\dot{\gamma}^2 + \frac{r^2}{r^2+\alpha^2}\dot{\phi}^2\right) - V(r,\phi) \tag{2.70}$$

. La lagrangiana ridotta è dunque:

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{r^2}{r^2+\alpha^2}\dot{\phi}^2\right) - \left(\frac{r^2+\alpha^2}{\alpha^2}\dot{\gamma}^2 + V(r,\phi)\right). \tag{2.71}$$

*Seconda domanda.*I punti critici dell'energia potenziale efficace sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{2rJ^2}{(\alpha^2+r^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \phi} = 0. \end{array} \tag{2.72}$$

Se $(\overline{r},\overline{\phi})$ è una soluzione, allora si ricava un moto uniforme:

$$\begin{array}{l} z(t) = z_0 - \frac{\alpha J t}{\bar{r}^2+\alpha^2} \\ \theta(t) = \theta_0 + \frac{Jt}{\bar{r}^2+\alpha^2}. \end{array} \tag{2.73}$$

Terza domanda. Gli equilibri sono assegnati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{2rJ^2}{(\alpha^2+r^2)^2} = -\frac{2}{r^3\cos 2\phi} - \frac{2rJ^2}{(\alpha^2+r^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \phi} = -2\frac{\sin 2\phi}{r^2\cos^2 2\phi} = 0. \end{array} \tag{2.74}$$

Consideriamo solo il caso $\alpha > 0$, lasciando al lettore il completamento della discussione. Si hanno soluzioni reali solo se $J^2 > 1$. Fissiamoci sul caso $J > 1$. Si ha:

$$\begin{array}{l} \phi = \frac{\pi}{2}, \\ \overline{r} = \sqrt{\frac{\alpha}{J-1}}. \end{array} \tag{2.75}$$

Il lettore completi l'analisi costruendo la matrice Hessiana di $U^{(e)}$, e computandola negli equilibri.

2.0.17 L,RU,H,HJ,AA Compito di Meccanica Razionale, 9/7/'96, II^o appello, sess. estiva

1) La Lagrangiana nelle variabili ρ e θ è:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2\left(1+\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^3}\right)^2\right) + \frac{\rho^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}. \tag{2.76}$$

L'Hamiltoniana, negli impulsi $P = P_\rho$, $J = P_\theta$ è:

$$H = \frac{1}{2}\frac{P^2}{1+\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^3}\right)^2} + \frac{J^2}{2\rho^2} - \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}. \tag{2.77}$$

2) Gli integrali primi sono l'energia e il momento $J = \rho^2\dot{\theta}$.

3) Il moto si puó ricondurre ad un moto unidimensionale di energia potenziale efficace

$$V_{eff} = \left(\frac{J^2}{2} - 1\right)\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho}, \tag{2.78}$$

che è limitato dal basso se $J^2 > 2$.

Se $J^2 \leq 2$ il tempo di arrivo in $\rho = 0$ che corrisponde a $z = -\infty$, è finito, dunque se $E < 0$ o se $\dot{\rho} < 0$ il moto esplode in tempo finito.

Cosidero dunque solo $J^2 > 2$: Il moto è limitato se $E < 0$, illimitato se $E \geq 0$.

4) L'espressione dell' orbita in forma implicita si ricava da:

$$E = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2\left(1+\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^3}\right)^2\right) + \left(\frac{J^2}{2} - 1\right)\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}, \tag{2.79}$$

$$\dot{\rho} = \dot{\theta}\partial_\theta\rho = \frac{J}{\rho^2}\partial_\theta\rho. \tag{2.80}$$

Dunque l'angolo cercato è:

$$2\int_{\rho_{min}}^{+\infty} d\rho\frac{J}{\rho^2}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^3}\right)^2}{2\left(E - \left(\frac{J^2}{2}-1\right)\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\right)}}, \tag{2.81}$$

dove ρ_{min} è la minima distanza dall'asse z che il punto raggiunge.

Tale angolo è finito se $E \geq 0$.

5) L'equazione di H-J è resolubile per separazione di variabili.

6) Il moto è descrivibile in variabili azione angolo nella regione dello spazio delle fasi in cui $J^2 > 2$ e $E < 0$.

2.0.18 CR,L,RU,H,HJ Compito di Meccanica Razionale, 24/9/'96, I^o appello, sess. autunnale

1) Siano (x, y) le coordinate di P nel sistema fisso, e $(\xi, \eta = a\xi^2)$ nel sistema solidale alla guida.

$$\begin{array}{l} x = \xi \cos\theta - \eta \sin\theta \\ y = \xi \sin\theta + \eta \cos\theta \end{array} \tag{2.82}$$

.

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\theta}^2 \left(\xi^2 + \eta^2\right) + 2\dot{\theta}(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta), \tag{2.83}$$

dove:

$$\xi^2 + \eta^2 = (1 + a^2\xi^2)\xi^2; \;\; \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = (1 + 4a^2\xi^2)\dot{\xi}^2; \;\; \xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta = a\xi^2\dot{\xi}. \tag{2.84}$$

La Lagrangiana è:

$$L = \frac{1}{2}\left(I + m(1 + a^2\xi^2)\xi^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}(1 + 4a^2\xi^2)\dot{\xi}^2 + ma\xi^2\dot{\xi}\dot{\theta} - \frac{k}{2}(1 + a^2\xi^2)\xi^2. \tag{2.85}$$

La variabile θ è ciclica, si conserva oltre all'energia il momento della quantità di moto:

$$J = \partial_{\dot{\theta}} L = \left(I + m(1 + a^2\xi^2)\xi^2\right)\dot{\theta} + ma\xi^2\dot{\xi}. \tag{2.86}$$

2) Dall'espressione del momento:

$$\dot{\theta} = \frac{J - ma\xi^2\dot{\xi}}{F(\xi)}, \tag{2.87}$$

dove $F(\xi) = \left(I + m(1 + a^2\xi^2)\xi^2\right)$. Sostituendo nell'espressione dell'energia si ottiene:

$$\begin{array}{l} E = \frac{1}{2F}(J - a\xi^2\dot{\xi})^2 + a\xi^2\dot{\xi} + \frac{(J - a\xi^2\dot{\xi})}{F} + \frac{m}{2}(1 + 4a^2\xi^2)\dot{\xi}^2 + \frac{k}{2}(1 + a^2\xi^2)\xi^2 \\ = \frac{1}{2}T(\xi)\dot{\xi}^2 + U_e(\xi), \end{array} \tag{2.88}$$

dove:

$$T = m(1 + 4a^2\xi^2) - \frac{a^2\xi^4}{F(\xi)}; \;\; U_e = \frac{k}{2}(1 + a^2\xi^2)\xi^2 + \frac{J^2}{F(\xi)}. \tag{2.89}$$

T è una funzione strettamente positiva, l'energia potenziale efficace ha un unico punto critico (stabile) in 0 se $\sqrt{\frac{2}{k}}J \leq I$. Altrimenti 0 è instabile e compaiono i due equilibri stabili simmetrici $\xi_\pm$, uniche due soluzioni di

$$\xi^2(1 + a^2\xi^2) = \frac{1}{m}\left(\sqrt{\frac{2}{k}}J - I\right) \tag{2.90}$$

($\xi^2(1 + a^2\xi^2)$ è una funzione strettamente convessa).

3) Dall'analisi qualitativa, si ottiene che $\xi(t)$ è sempre periodica se non è costante. Se $J = 0$,

$$\dot{\theta} = -\frac{ma\xi^2\dot{\xi}}{F(\xi)} \tag{2.91}$$

$$\theta(t) = \theta(0) + A(\xi(t)) - A(\xi(0)), \tag{2.92}$$

dove $A(\xi)$ è la primitiva di $-\frac{ma\xi^2}{F(\xi)}$. Quindi il moto complessivo è periodico dello stesso periodo di $\xi(t)$.

2.0.19 CR,L,RU,H,HJ,AA Compito di Meccanica Razionale, 8/10/'96, II^o appello, sess. autunnale

Indica con ϕ l'angolo sul piano $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ che il disco forma con l'asse delle $\mathbf{x}$, con θ l'angolo che OP forma con il piano $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, con I e J i momenti di inerzia del disco rispetto all'asse $\mathbf{u}$ e all'asse $\mathbf{z}$ rispettivamente. Le coordinate cartesiane del punto sono:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta\,\cos\phi \\ x &= R\cos\theta\,\sin\phi \\ x &= R\sin\theta. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Dunque:

$$L = \frac{1}{2}(J + mR^2\cos^2\theta)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(I + mR^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta, \tag{2.94}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{P_\phi^2}{J + mR^2\cos^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{P_\theta^2}{I + mR^2} + \frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta. \tag{2.95}$$

Il sistema è invariante per rotazioni intorno all'asse delle $\mathbf{z} =$, dunque si conserva l'energia meccanica e il momento della quantità di moto rispetto a questo asse:

$$P_\phi = (J + mR^2\cos^2\theta)\dot{\phi}. \tag{2.96}$$

Ottieni un problema unidimensionale sostituendo a $\dot{\phi}$ la sua espressione in termini di P_ϕ nell'espressione dell'energia totale:

$$E = \frac{1}{2}(I + mR^2)\dot{\theta}^2 + V_{eff}, \tag{2.97}$$

dove

$$V_{eff} = \frac{1}{2}\frac{P_\phi^2}{J + mR^2\cos^2\theta} + \frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta. \tag{2.98}$$

Derivando l'energia potenziale nella variabile θ, ottieni:

$$\partial_\theta V_{eff} = \left(-kR^2 + \frac{mR^2P_\phi^2}{(J + mR^2\cos^2\theta)^2}\right)\sin\theta\,\cos\theta. \tag{2.99}$$

Il problema e' simmetrico rispetto alle trasformazioni $\theta \to -\theta$, e $\theta \to \pi - \theta$, quindi ti limiti a studiarlo tra $[0, \frac{\pi}{2}]$. I valori 0 e $\frac{\pi}{2}$ sono soluzioni stazionarie per tutti i valori dei parametri. Inoltre esiste un'altra soluzione se

$$0 < P_\phi\sqrt{\frac{m}{k}} - J < mR^2. \tag{2.100}$$

Graficando l'energia potenziale efficace, ottieni che la posione $\theta = \frac{\pi}{2}$ è stabile fino a che $P_\phi\sqrt{\frac{m}{k}} < J$, mentre $\theta = 0$ è instabile. Appena si biforca, cioé quando $0 < P_\phi\sqrt{\frac{m}{k}} > 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ diventa instabile; quando la soluzione intermedia raggiunge $\theta = 0$, cioé quando $P_\phi\sqrt{\frac{m}{k}} - J > mR^2$, $\theta = 0$ diventa stabile.

2.0.20 TC

2.0.21 TC

2.0.22 TC,AA,P Secondo compito di esonero a.a.94.

Cerca $W = A(q_1, a_1, a_2) + B(q_2, a_1, a_2)$ (a_1, a_2 sono i nuovi impulsi). L'equazione da risolvere è:

$$\frac{1}{2}\left(q_2(\partial_{q_1}Aq_1)^2 + \partial_{q_2}B\right)^2 = a_2. \tag{2.101}$$

Stai cercando B in modo che non dipenda da q_2, ma solo da q_1. Dall'equazione puoi ricavare:

$$\partial_{q_2} B = \pm\sqrt{2a_2} - q_2(\partial_{q_1} A q_1)^2, \tag{2.102}$$

peró in questa espressione $\partial_{q_2} B$ dipendende da q_1, e da $A(q_1)$; l'unica possibilità che ho è dunque che la combinazione $\partial_{q_1} A q_1$ non dipenda da q_1, cioé: $\partial_{q_1} A q_1 = a_1$, ovvero $A(q_1) = a_1 \log q_1$. A questo punto posso risolvere anche l'equazione in B infatti $\partial_{q_2} B = \pm\sqrt{2a_2} - q_2 a_1^2$ è una funzione della sola q_2 e dei nuovi impulsi. Riassumendo, ottieni:

$$W = a_1 \log q_1 \pm \sqrt{2a_2} q_2 - \frac{1}{2} q_2^2 a_1^2. \tag{2.103}$$

La traformazione generata da W è:

$$\begin{array}{l} Q_1 = \log q_1 - a_1 q_2^2 \\ Q_2 = \pm\frac{q_2}{\sqrt{2a_2}} \\ p_1 = \frac{a_1}{q_1} \\ p_2 = \pm\sqrt{2a_2} - a_1^2 q_2. \end{array} \tag{2.104}$$

Le equazioni del moto per l'hamiltoniana $K(Q_1, Q_2, a_1, a_2) = a_2$ sono:

$$\begin{array}{ll} \dot{Q}_1 = 0 & \dot{Q}_2 = 1 \\ \dot{a}_1 = 0 & \dot{a}_2 = 0. \end{array} \tag{2.105}$$

Quindi Q_1, a_1, a_2 sono costanti e $Q_2(t) = Q_2(0) + t$. Tornando alle vecchie variabili ottieni:

$$\begin{array}{l} q_2(t) = \pm\sqrt{2a_2(0)}(Q_2(0) + t) \\ q_1(t) = e^{Q_1(0) + 2a_1(0)a_2(0)(Q_2(0)+t)^2} \\ p_1 = a_1(0) e^{-Q_1(0) - 2a_1(0)a_2(0)(Q_2(0)+t)^2} \\ p_2 = \pm\sqrt{2a_2(0)}(1 - a_1^2(0)(Q_2(0) + t)). \end{array} \tag{2.106}$$

Il segno $\pm$ lo determini a seconda del segno di $q_2(p_1 q_1)^2 + p_2 = \pm\sqrt{2a_2}$.
Nella soluzione compaiono $Q_1(0), Q_2(0), a_1(0), a_2(0)$ che determini imponendo i dati iniziali.

2.0.23 H,HJ,AA,S: II esonero 10/5/'96

a) Cerca una soluzione dell'equazione caratteristica di Hamilton-Jacobi del tipo:

$$W(x, y, \alpha, \beta) = A(x) + B(y). \tag{2.107}$$

Sostituendo:

$$\frac{1}{2}(\partial_x A)^2 + \frac{1}{2}(1 + x^2)\left((\partial_y B)^2 + y^2\right) = \alpha. \tag{2.108}$$

Ottengo la soluzione ponendo $(\partial_y B)^2 + y^2 = \beta$:

$$\begin{array}{l} B(y, \beta) = \pm \int^y dy \sqrt{\beta - y^2} \\ A(x, \alpha, \beta) = \pm \int^x dx \sqrt{2\alpha - \beta - \beta x^2}. \end{array} \tag{2.109}$$

b) La regione dello spazio delle fasi in cui il moto é multiperiodico è data da $\beta > 0$, $\alpha > \frac{\beta}{2}$.
c) Devi calcolare:

$$\begin{array}{l} I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\beta}} dy \sqrt{\beta - y^2} \\ I_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha - \beta}{\beta}}} dx \sqrt{2\alpha - \beta - \beta x^2}. \end{array} \tag{2.110}$$

Ricorda che

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{2h}}{\omega}} dq \sqrt{2h - \omega^2 q^2} = \frac{h}{\omega}. \tag{2.111}$$

Ottieni:

$$I_1 = \frac{\beta}{2}, \qquad I_2 = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\beta}}. \tag{2.112}$$

Dunque la nuova Hamiltoniana è:

$$K = \alpha = \sqrt{2I_1}I_2 + I_1. \tag{2.113}$$

Le frequenze:

$$\begin{array}{l} \omega_1 = \frac{I_2}{\sqrt{2I_1}} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\beta} \\ \omega_2 = \sqrt{2I_1} = \sqrt{\beta}. \end{array} \tag{2.114}$$

d) Sostituendo il valore del dato iniziale in α, β ottieni:

$$\omega_1 = 1 + \frac{a^2}{2}, \ \omega_2 = 1 \tag{2.115}$$

Il moto è periodico se e solo se $a^2 \in \mathbb{Q}$.

e) per $a = 1$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2}$, dunque $T = 3T_1 = 2T_2$. $T_2 = \frac{2\pi}{\omega}_2 = 2\pi$, dunque $T = 4\pi$.

f) Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = P_x & \dot{y} = P_y(1 + x^2) \\ \dot{P}_x = -x\left(P_y^2 + y^2\right) & \dot{P}_y = -y(1 + x^2). \end{array} \tag{2.116}$$

Considera il dato iniziale:

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0 & y(0) = 0 \\ P_x(0) = \varepsilon & P_y(0) = 0, \end{array} \tag{2.117}$$

che è una piccola perturbazione della posizione stazionaria. La soluzione delle equazioni di Hamilton è:

$$\begin{array}{ll} x(t) = -t\varepsilon & y(t) = 0 \\ P_x(t) = \varepsilon & P_y(t) = 0. \end{array} \tag{2.118}$$

Dunque la posizione di equilibio è instabile.

2.0.24 CR,H,HJ,P: Esonero di Meccanica Razionale del 6-6-90