Esercizi di Meccanica Razionale

AA 1999-2000, corsi Marchioro, Negrini, esercitatore D. Benedetto

2 aprile 2001

Indice

Nella prima parte (sezioni 1.1, 1.2, 1.3, 1.4) ci sono esercizi sui moti unidimensionali.

Ho indicato con:

- * gli esercizi non del tutto standard;
- ** esercizi più difficili e non necessariamente utili;
- *** gli esercizi più difficili e non necessariamente utili;

gli esercizi senza asterisco sono assolutamente standard.

I richiami alla bibliografia non sono ovviamente completi: non sono citati tutti i testi, né i testi in bibliografia sono citati tutte le volte che potrebbe essere utile. Me ne scuso con gli studenti e con gli autori.

Questa versione non è definitiva. Possono esserci errori, anche gravi. La versione più recente, e presumibilmente più corretta, è sul sito http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/meccanica

1 Moti unidimensionali

1.1 Esercizi sui moti unidimensionali

Sono trattati in tutti i libri di meccanica. Un'esposizione molto chiara è sull'Olivieri [10].

1.1.1

Calcola il periodo delle oscillazioni del moto unidimensionale di energia potenziale $V(x) = |x|^\alpha$, per $\alpha \geq 2$, in funzione dell'energia (vedi Landau [9]).

Vedi sezione2.1.1

1.1.2

Considera il moto unidimensionale $\ddot{x} = x$. Trova il moto con dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (1, -1)$. In quanto tempo la traiettoria arriva in $x = 0$?

Trova tutti i dati iniziali tali che $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Trova tutti i dati iniziali tali che $\lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = 0$.

Vedi sezione2.1.2

1.1.3 La doppia buca di potenziale

Considera il moto di un punto materiale di massa 1 nella "doppia buca di potenziale" $\ddot{x} = x - x^3$.

Disegna le orbite nello spazio delle fasi.

Discuti la stabilità delle posizioni di equilibrio.

Determina il numero delle orbite ad energia E, al variare di E.

Considera il dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (-1, v)$; per quali valori di $v \in \mathbb{R}$ il punto materiale raggiunge la posizione 1?

Con che velocità ci arriva?

Per $E = 0$ il moto avviene sulla "separatrice". Con che angolo la separatrice interseca gli assi?

Vedi sezione2.1.3

1.1.4 La doppia buca parte II

Considera il moto di un punto materiale di massa 1 di energia potenziale $V(x) = \frac{x^4}{4} + \alpha\frac{x^2}{2}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Discuti qualitativamente il moto al variare di α

In paricolare determina le posizioni di equilibrio e la loro stabilità al variare di α.

Disegna il grafico delle posizioni di equilibrio al variare di α.

Vedi sezione2.1.4

1.1.5

Considera il moto di un punto materiale di massa 1 di energia potenziale $V(x) = x^3 + \alpha x$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Discuti qualitativamente il moto al variare di α

In paricolare determina le posizioni di equilibrio e la loro stabilità al variare di α.

Disegna il grafico delle posizioni di equilibrio al variare di α.

Vedi sezione2.1.5

1.1.6 Variante della doppia buca

Considera il moto di un punto materiale di massa 1, soggetto ad una forza di energia potenziale $V(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{\alpha}{2}(x^4 - x^2)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Discuti qualitativamente il moto al variare di α

In paricolare determina le posizioni di equilibrio e la loro stabilità al variare di α.

Disegna il grafico delle posizioni di equilibrio al variare di α.

Vedi sezione2.1.6

1.1.7 Il pendolo su un piano ruotante

Considera il moto

$$mR^2\ddot{\theta} = -Rmg\sin\theta + mR^2\Omega^2\sin\theta\,\cos\theta,$$

dove θ è un angolo, $m > 0$ la massa, $R > 0$ una lunghezza, $g \geq 0$ un'accelerazione e $\Omega \geq 0$ una frequenza. Questa equazione descrive un pendolo, cioè un punto materiale di massa m su un estremo di un'asta di lunghezza R con l'altro estremo fissato, soggetta alla forza di gravità, su di un piano verticale che ruota con velocità costante di frequenza Ω. L'angolo θ è misurato dala verticale. Quando $\theta = 0$ il punto materiale si trova nella posizione di minima altezza.

Discuti qualitativamente il moto. In particolare studia l'esistenza e la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\lambda = \frac{g}{R\Omega^2}$. Che dimensioni fisiche ha λ? Disegna il grafico delle posizioni di equilibrio al variare di λ. (Vedi Dell'Antonio [5]).

Considera il dato iniziale $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Prova che il moto è periodico e scrivi il periodo dell'orbita.

In quanto tempo il pendolo arriva in $\theta = \frac{\pi}{2}$?

Con che $\dot{\theta}$ ci arriva?

Quanto vale $\dot{\theta}$ quando il pendolo passa per $\theta = 0$?

Quant'è il valore massimo che $\dot{\theta}$ assume?

Per quali istanti di tempo $\dot{\theta}$ raggiunge il massimo?

Quanto vale θ quando $\dot{\theta}$ è massimo?

Considera il dato iniziale $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (-\frac{\pi}{2}, \omega)$, con $\omega > 0$.

Per quali valori di ω il pendolo ha un moto periodico?

Esprimi per tali valori il periodo del moto.

Determina l'andamento asintotico del periodo per $\omega \to +\infty$.

La componente verticale della reazione vincolare è:

$$\text{Reazione} = mg + mR(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta).$$

(Perché ?) Determina il suo andamento asintotico per $\omega \to +\infty$, quando il pendolo è in $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

Vedi sezione2.1.7

1.1.8

Considera il moto di un punto materiale di massa m, di energia potenziale

$$V(x) = -\frac{1}{2}m\Omega^2x^2 - mgl\left(1 + \cos\left(\frac{x}{l}\right)\right)\mathcal{X}\left(\left|\frac{x}{l}\right| \leq \pi\right),$$

dove $l > 0$, $g \geq 0$ hanno, rispettivamente, le dimensioni di una lunghezza e di una accelerazione, e $\Omega \geq 0$ ha le dimensioni di una frequenza. Nota che gli aspetti qualitativi del moto dipendono dai parametri fisici l, g, Ω attraverso un unico parametro adimensionale. Discuti qualitativamente il moto, in particolare l'esistenza delle posizioni di equilibrio e la loro stabilità.

Vedi sezione2.1.8

1.1.9

Considera il moto di un punto materiale di massa m, di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + mgl\left(1 + \cos\left(\frac{x}{l}\right)\right)\mathcal{X}\left(\left|\frac{x}{l}\right| \leq \pi\right),$$

dove $l > 0$, $g \geq 0$, $k \geq 0$, hanno, rispettivamente, le dimensioni di una lunghezza, di una accelerazione e di una costante di elasticità. Nota che gli aspetti qualitativi del moto dipendono dai parametri fisici m, l, g, k attraverso un unico parametro adimensionale. Discuti qualitativamente il moto, in particolare l'esistenza delle posizioni di equilibrio e la loro stabilità.

Vedi sezione2.1.9

1.1.10

Un punto materiale di massa 1 si muove su una retta sotto l'azione di una forza di energia potenziale $V(x) = -x^3+x^2$. Considera i dati iniziali di energia totale $E = \frac{1}{8}$, e sia $\dot{x}_0 = \frac{1}{2}$. Determina i valori di $x(0)$ per i quali il moto è periodico e dai un'espressione del periodo. Vedi sezione2.1.10

1.1.11

Un punto materiale di massa 1 si muove su una retta sotto l'azione di una forza di energia potenziale $V(x) = \sqrt{x^2+1} + ax^2$, con $a \in \mathbb{R}$.

Per quali valori di a tutte le orbite sono limitate?

Per quali valori di a l'origine è stabile?

Vedi sezione2.1.11

1.1.12 *

Un punto materiale di massa 1, su una retta, inizialmente in $x = 0$ con velocità $\dot{x} = 1$, si muove sotto l'azione di una forza di energia potenziale $V(x) = -\sqrt{x^2+1}$.

Prova che il moto è illimitato.

Prova che esiste un'accelerazione asintotica (cioè $\lim_{t\to+\infty} \ddot{x}$ è finito)

Prova che asintoticamente nel tempo il moto tende ad un moto uniformemente accelerato. In altri termini esistono $\tilde{x}$, $\tilde{v}$, e a tali che $\lim_{t\to\infty} |\dot{x}(t) - (\tilde{v} + ta)| = 0$ e $\lim_{t\to\infty} |x(t) - (\tilde{x} + t\tilde{v} + \frac{t^2}{2}a)| = 0$.

Vedi sezione2.1.12

1.1.13

Un punto materiale di massa 1 si muove sulla semiretta $x > 0$ soggetto ad una forza di energia potenziale $V(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$.

Per quali dati iniziali il moto è periodico?

Per quali dati iniziali il moto non è periodico?

Per quali dati iniziali il moto è illimitato?

Quali solo le soluzioni stazionarie?

Sia $x_0 = \frac{1}{2}$ e $\dot{x}_0 = 1$. Determina $\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t)$.

Sia $x_0 = \frac{1}{2}$ e $\dot{x}_0 = -1$. Qual è il massimo della velocità che il punto raggiuge? E qual è il minima?

Vedi sezione2.1.13

1.1.14 *

Sia $V(x) = 1 + \cos x$ per $|x| \leq \pi$, e $V(x) = 0$ per $|x| \geq \pi$.

Discuti qualitativamente il moto.

Discuti qualitativamente il moto per il potenziale $V_\varepsilon(x) = V(\frac{x}{\varepsilon})$ con $\varepsilon > 0$; cosa accade nel limite $\varepsilon \to 0$?

Discuti qualitativamente il moto per il potenziale $V_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}V(\frac{x}{\varepsilon})$ con $\varepsilon > 0$; cosa accade nel limite $\varepsilon \to 0$? Qual è il moto di una particella che rimbalza contro un "muro infinitamente rigido"?

Vedi sezione2.1.14

1.1.15 *

Sia $V(x) = -(1 + \cos x)$ per $|x| \leq \pi$, e $V(x) = 0$ per $|x| \geq \pi$.

Discuti qualitativamente il moto.

Discuti qualitativamente il moto per il potenziale $V_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}V(\frac{x}{\varepsilon})$ con $\varepsilon > 0$, per dati iniziali di energia totale positiva. Cosa accade nel limite $\varepsilon \to 0$?

Vedi sezione2.1.15

1.1.16

Sia $V(x) = |x|$. Discuti qualitativamente il moto. Quant'è la forza in $x = 0$? Sia $V(x) = -|x|$. Trova il moto di dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (-1, v)$ al variare di $v > 0$. Considera ora $V(x) = -\sqrt{a^2 + x^2} + a$, con $a > 0$. Determina il moto di dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (-1, v)$ al variare di $v > 0$, e il limite di tale moto per $a \to 0$.

Vedi sezione2.1.16

1.1.17 *

Sia $V(x) = -|x|^\alpha$ con $\alpha > 0$. Considera il dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (1, 0)$. In quanto tempo il punto materiale raggiunge $+\infty$? Per quanto tempo il moto esiste?

Sia $V(x) \geq M$ per ogni x reale. Prova che $|x(t)| \leq c_1 + c_2 t$, per c_1, c_2 costanti opportune che dipendono dal dato iniziale. Prova che il moto esiste per tutti i tempi.

Vedi sezione2.1.17

1.1.18

Sia $V(x) = x + \alpha \sin x$, con $\alpha > 0$. Discuti qualitativamente il moto al variare di α. In particolare trova gli α per cui esistono soluzioni stazionarie e discutine la stabilità. Determina per quali α esistono orbite periodiche.

Vedi sezione2.1.18

1.1.19 *

Sia $V(x) = \sin(x) + \sin(\alpha x)$, con $0 < \alpha < 1$, e $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 2)$. Determina $\lim_{t\to\infty} x(t)$ al variare di α. (Suggerimento: vedi l'esercizio sul ritorno 1.4.2)

Vedi sezione2.1.19

1.1.20

Sia $V(x) = (1 + \cos(x)) \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, e $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 2)$. Per quali valori di ε il moto è illimitato? Vedi sezione2.1.20

1.1.21 **

Sia $V(x) = 2\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $x_0 = 0$ e $\dot{x}_0 > 2$. Determina il tempo necessario per raggiungere $x = 1$, nel limite $\varepsilon \to 0$. Vedi sezione2.1.21

1.1.22 ***

Sia $V(x) = (1 + \cos(x)) \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, e $(x_0, \dot{x}_0) = (-\pi, 2)$. Indica con t_ε il tempo necessario per raggiungere $x = \pi$. Prova che $\lim_{\varepsilon\to 0} t_\varepsilon$ è finito. Sia $t_\varepsilon(x)$ il tempo necessario per raggiungere $x > \pi$. Prova che $\frac{t_\varepsilon(x)}{x} > c$ per ogni ε ed ogni $x > \pi$

Vedi sezione2.1.22

1.1.23 Domande brevi

a) In generale un'orbita periodica è descritta da un'ellisse nello spazio delle fasi?

b) Sia $V(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$. Quant'è $\lim_{t\to+\infty} x(t)$? Il moto è uniformemente accelerato?

c) Come è la parte reale degli autovalori di un sistema conservativo linearizzato intorno ad una posizione di equilibrio stabile?

d) Discuti la stabilità dell'origine per le seguenti equazioni differenziali:

1. $\ddot{x} = x + \dot{x}$
2. $\ddot{x} = x - \dot{x}$
3. $\ddot{x} = -x + \dot{x}$
4. $\ddot{x} = -x - \dot{x}$

Quale di esse descrive un oscillatore armonico con attrito a tempo invertito? E quale il linearizzato di un pendolo capovolto con attrito?

e) Per quali dei seguenti moti unidimensionali l'energia meccanica è conservata?

1. $\ddot{x} = e^{\sin x^2}$
2. $\ddot{x} = \cos x$
3. $\ddot{x} = \sin x + t^2$
4. $\ddot{x} = \sin x + 1$
5. $\ddot{x} = x + t$
6. $\ddot{x} = xt$
7. $\ddot{x} = x + \dot{x}$
8. $\ddot{x} + \dot{x} + \sin x = 0$
9. $\ddot{x} = \dot{x}$
10. $\ddot{x} = \arccos(x - 3t)$

In due degli esempi precedenti, anche se l'energia meccanica non si conserva, c'è un integrale primo del moto, dipendente dal tempo, che ne permette l'analisi qualitativa. Quali sono? Qual è l'interpretazione fisica di tali integrali primi? (vedi l'inizio dell'esercizio 1.4.5).

Vedi sezione2.1.23

1.2 Equazioni lineari

Nei testi di analisi matematica l'aspetto qualitativo è tipicamente sottorappresentato. Vedi invece i testi di Arnold [1, 2] e in generale i libri di Meccanica.

1.2.1

Linearizza l'equazione del pendolo

$$\ddot{\phi} = -\omega_0^2 \sin\phi$$

intorno a *tutte* le posizioni di equilibrio.

1.2.2

Descrivi le traiettorie nello spazio delle fasi di
$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z},$$
per
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix},$$
al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ (anche negativo).

1.2.3

Che relazione devono verificare la matrice A e il vettore $\mathbf{w}$ affinché il sistema
$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \cos(t)\mathbf{w}$$
ammetta una soluzione periodica di periodo t? (Suggerimento: cerca soluzioni del tipo $\sin(t)\mathbf{a} + \cos(t)\mathbf{b}$).

1.2.4 *

Considera il sistema lineare
$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z},$$
con dato iniziale $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$. Prova che la soluzione è lineare nel dato iniziale. Questo implica che esiste una matrice $U(t)$ tale che $\mathbf{z}(t) = U(t)\mathbf{z}_0$. Prova che la matrice $U(t)$ può essere ottenuta come somma della serie di matrici:
$$U(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$
Per questo motivo $U(t)$ si indica spesso con e^{At}. (Suggerimento: lo spazio delle matrici con la norma $\|A\| = \max_{|v|=1} |A(v)|$ è completo e vale $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$. La serie è una serie di potenze in t quindi ha un raggio di convergenza, determinalo e deriva termine a termine).

1.3 Moti forzati e smorzati

Per le oscillazioni forzate e smorzate mi vengono in mente due testi: il Landau [9] e il Gallavotti [6].

1.3.1

Risolvi il moto $\ddot{x} = -\lambda\dot{x} + (1 + \cos(\omega t))$. Esistono soluzioni stazionarie? Esistono moti periodici? Esiste $\lim_{t\to+\infty} x(t)$?

1.3.2

Risolvi
$$\ddot{x} = -x - 2\lambda\dot{x} + \sin(t) + \cos(2t),$$
con dato iniziale $(0, 0)$, per $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{4}{5}$.

1.3.3 *

Sia $f(t)$ una funzione periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Assumi che sia almeno di classe $\mathbf{C}^2$ (derivabile due volte con derivata seconda continua e limitata).

La funzione f può essere sviluppata in serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i\omega kt},$$

dove $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T dte^{-i\omega kt} f(t)\, dt$. Ricorda che $c_{-k} = \bar{c}_k$, per la realtà di f, e $|c_k| \leq \frac{C}{k^2}$ per $k \neq 0$ (per l'ipotesi $\mathbf{C}^2$).

Trova per serie una soluzione particolare di

$$\ddot{x} = -x - 2\lambda\dot{x} + f(t),$$

per $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{4}{5}$, al variare di ω. Che condizioni devi imporre su c_k e ω affinché il moto sia limitato?

1.3.4 *

Considera l'oscillatore armonico forzato

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \cos(\omega t).$$

Per quali valori di ω esistono moti periodici?

Prova che tutti i moti sono periodici se e solo se $\frac{\omega_1}{\omega}$ è razionale e diverso da 1.

Prova che se $\frac{\omega_1}{\omega}$ è irrazionale, il moto nello spazio delle fasi riempie densamente una regione. Che regione è? (Suggerimento: vedi l'esercizio 1.4.2)

1.3.5 *

Considera il moto $\ddot{x} = -x + \mathcal{X}\{0 \leq x \leq 1\}\mathcal{X}\{\dot{x} \geq 0\}$.

L'energia meccanica si conserva?

Considera il dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 0)$. Risolvi esplicitamente il moto fino al primo tempo di ritorno del punto materiale in $x = 0$ con velocità positiva.

Come avviene il moto fino al secondo ritorno?

E dopo?

Sia t_k il tempo in cui il punto materiale ritorna in $x = 0$ con velocità positiva. Trova $\lim_{k\to+\infty}(t_k - t_{k-1})$. (Vedi la parte sullo "scappamento ad ancora" sul Gallavotti [6])

1.4 Alcuni esercizi chiave

1.4.1 La doppia buca con attrito

Considera il moto $\ddot{x} = x - x^3 - \lambda\dot{x}$ (moto nella doppia buca di potenziale con attrito). Le posizioni di equilibrio sono $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

a) Prova che $x_{1,2}$ sono posizioni di equilibrio stabili, e x_3 è instabile.

b) Prova che per qualunque dato iniziale la traiettoria converge ad una delle posizioni di equilibrio.

c) Chiediti se esistono traiettorie non stazionarie che tendono a x_3.

d) Determina qualitativamente la regione dello spazio delle fasi che è attratta da x_1 e quella attratta da x_2 (Suggerimento: disegna nello spazio delle fasi le orbite del sistema senza attrito e i moti del sistema con attrito che tendono alla posizione di equilibrio x_2.

Vedi sezione2.4.1

1.4.2 Il 'ritorno' parte I

Considera una pulce su una circonferenza, che al tempo iniziale sia nel punto di angolo al centro $\phi = 0$. Ad ogni secondo la pulce fâ un salto di un angolo α. Sia ϕ_k, con $0 \leq \phi_k < 2\pi$, la posizione della pulce al secondo k.

a) Prova che se $\frac{\alpha}{\pi}$è razionale il moto della pulce è periodico, cioè esiste k tale che $\phi_k = 0$

b) Prova che se $\frac{\alpha}{\pi}$ è irrazionale la pulce non torna mai in $\phi = 0$.

c) Sempre nel caso $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, prova che esiste una successione crescente di interi n_k tale che $\lim_{k\to+\infty} \phi_{n_k} = 0$.

d) Sempre nel caso $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, prova che per ogni ϕ esiste una successione crescente di interi n_k tale che $\lim_{k\to+\infty} \phi_{n_k} = \phi$ (in altre parole il moto è 'denso' sulla circonferenza, o anche l'$\omega-$limite del moto è tutta la circonferenza.

(Vedi Arnold [2])

1.4.3 Il 'ritorno' parte II

Considera il seguente moto delle variabili periodiche $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ (sono angoli tra 0 e 2π, cioè (ϕ_1, ϕ_2) descrivono un toro bidimensionale):

$$\phi_1(t) = \omega_1 t$$

$$\phi_2(t) = \omega_2 t.$$

Il moto in ognuna delle variabili ϕ_i è periodico di periodo $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$. Prova che il moto complessivo è periodico se e solo se $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ è razionale. Prova che nel caso non periodico il moto è denso sul toro. (Vedi Arnold [2])

1.4.4 **

Tratto dall'Arnold di Eq. Diff. [2]
Considera la successione formata dalle prima cifra dell'espressione decimale di 2^n:

$$\begin{array}{rcl}
2^0 = 1 & \to & 1 \\
2^1 = 2 & \to & 2 \\
2^2 = 4 & \to & 4 \\
2^3 = 8 & \to & 8 \\
2^4 = 16 & \to & 1 \\
2^5 = 32 & \to & 3 \\
2^6 = 64 & \to & 6 \\
 & \ldots &
\end{array}$$

Compare il 7 nella successione?
Compare più frequentemente il 6 o l' 8?
Più in generale 2^n può iniziare con una sequenza arbitraria di cifre?

1.4.5 Un esempio di invariante adiabatico

Come si muove un punto materiale soggetto ad una forza di energia potenziale $V(x,t) = V(x - ct)$ con c costante?

Come si muove un punto materiale in presenza di una parete infinitamente rigida che si muove con velocità costante c?

Un punto materiale di massa m si muove tra due pareti infinitamente rigide, la prima fissa in $x = 0$ e la seconda in $x = z(t) = z_0 - \varepsilon t$, con $\varepsilon > 0$. All'istante iniziale il punto è in $x = 0$ con velocità v. Determina, nel $\lim_{\varepsilon\to 0}$, il modulo della velocità del punto nell'istante in cui la barriera mobile è arrivata in $x = \frac{1}{2}$.

Prova più in generale che $\lim_{\varepsilon\to 0} |v\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) z\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)| = vz_0$.

Suggerimento: supponi che al tempo t_0 la barriera mobile sia in a e la particella sia in 0 con velocità v. Calcola il tempo t_1 di ritorno della particella in 0, la velocità che ha la particella e la posizione della barriera mobile. Nota che il prodotto della velocità per la posizione della barriera al tempo t_1 è identico al prodotto al tempo t_0. Estendi ricorsivamente per i ritorni successivi, e determina la succesione dei tempi di urto con la parete fissa...

Osservazione

Fisicamente $m|v(t)z(t)|$ ha le dimensioni di una energia per il tempo (ha le dimensioni dell'azione). Per z costante, l'azione è proporzionale all'area racchiusa dall'orbita nello spazio delle fasi (che in questo caso è un rettangolo!).

È ovvio che $\lim_{\varepsilon\to 0}|v(t)z(t)| = v_0 z_0$, infatti per $\varepsilon = 0$ la barriera è ferma. Questo limite non è uniforme in t. Dall'esercizio puoi notare che ad un tempo dell'ordine di $\frac{1}{\varepsilon}$ la variazione di $|V(t)z(t)|$ rispetto a $v_0 z_0$ è di ordine ε.

Cioè l'azione è praticamente invariante, rispetto a variazioni lente (adiabatiche) dei parametri fisici che governano il moto.

Per maggiori dettagli vedi l'Arnold [1] e il Landau [9].

1.4.6 La buca variabile rivisitata

(Autore E. Caglioti)

L'esercizio precedente ha una interpretazione termodinamica.

È facile identificare l'energia interna: $U = \frac{1}{2}v^2$. È anche facile identificare il 'volume': sarà $V = z$. La pressione è fisicamente la forza esercitata sull'unità di superficie che racchiude il mezzo. D'altra parte in questo caso la superficie è un punto ($x = 0$ oppure $x = z$). Se un punto materiale subisce in un certo tempo δt una variazione di impulso $\delta(mv)$, la forza che è stata esercitata su di esso è $\frac{\delta(mv)}{\delta t}$. Per un urto n $x = 0$ la variazione di impulso è $2m|v|$. Nel nostro caso non c'è variazione di impulso se non quando la massa tocca $x = 0$. Per dare senso alla pressione, si può pensare di considerare l'impulso scambiato con la parete per un tempo sufficientemente lungo affinché avvengano molti urti, ma sufficientemente piccolo affinché la variazione dovuta al moto della barriera mobile non sia significativa (assunzione possibile se ε è molto piccolo). In altre parole:

$$P = \frac{2m|v|k}{\tau_k},$$

dove k è il numero di volte che la massa urta la parete in $x = 0$, e τ_k è il tempo necessario per fare k urti. Evidentemente $\tau_k \approx k\frac{2z}{|v|}$ ($2z$ è la distanza da percorrere per tornare in $x = 0$ e v è la velocità).

In definitiva, l'interpretazione termodinamica del moto di una particella tra due pareti perfettamente rigide a distanza z dà:

$$U = \tfrac{1}{2}mv^2$$
$$V = z$$
$$P = \tfrac{mv^2}{z}.$$

Prova che se z varia molto lentamente,

$$TdS = dU + PdV = 0,$$

cioè la trasformazione è adiabatica.

Osservazione

Fare la termodinamica di una sola particella è abbastanza privo di senso. Si possono considerare, più correttamente, moltissime particelle tra le pareti, che non urtano tra di loro. Questa situazione può far pensare ad un gas perfetto, per cui la termodinamica ha senso, e la pressione è cinematicamente definita attraverso l'impulso scambiato con le pareti. Tenete presente, però, che un insieme di particelle che non urtano tra loro NON sono un gas perfetto. Infatti manca il meccanismo di termalizzazione tipico, ad esempio, dell'equazione di Boltzmann.

1.4.7 Altri esempi di invarianti adiabatici

Teorema dell'invarianza adiabatica.

Supponi di avere un moto unidimensionale in cui l'energia totale, oltre che dipendere dalla posizione e dalla velocità, dipenda da un parametro λ, cioè $E = E(x, \dot{x}, \lambda)$. Come esempio puoi pensare a $E = \frac{1}{2}\lambda\dot{x}^2 + V(x)$, dove la massa stessa è il parametro λ, oppure $E = \frac{1}{2}m\lambda^2\dot{\theta}^2 - mg\lambda\cos\theta$, dove λ ha le dimensioni di una lunghezza.

Supponi, inoltre, che il moto assegnato sia in generle periodico, ed indica con $I(E)$ la misura dell'area, nello spazio delle fasi, della regione racchiusa dall'orbita di energia E.

Considera ora il moto con energia totale dipendente dal tempo attraverso λ: $E = E(x, \dot{x}, \varepsilon t)$, con ε piccolo.

Il teorema adiabatico afferma che

$$|I(E(t)) - I(E(0))| \leq c\varepsilon,$$

per $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

In altre parole, per variare l'azione di ε devo aspettare un tempo di ordine $\frac{1}{\varepsilon}$.

In questo enunciato mancano delle ipotesi importanti. Per l'enunciato preciso e per la dimostrazione vedi, tra gli altri, l'Arnold [1]

Considera un pendolo la cui massa diminuisce lentamente con il tempo. Di quanto varia l'ampiezza delle oscillazioni se la massa si dimezza?

Una massa è appesa ad un filo ed oscilla. Se dimezzo lentamente la lunghezza del filo, come cambia l'ampiezza delle oscillazioni?

Considera il moto unidimensionale di energia totale

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{k}{r}.$$

Considera un dato iniziale che compia piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile. Se k si dimezza molto lentamente, come cambia il moto?

(**) Un satellite in orbita intorno alla Terra descrive un'orbita poco eccentrica. Come cambia l'orbita se il momento della quantità di moto del satellite raddoppia molto lentamente?

1.5 Altri esercizi sui moti unidimensionali (2001)

1.5.1

Sia $V(x) = \arctan(x) + \dfrac{\alpha}{1+x^2}$ l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi. In particolare

- determinare le soluzioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- dato $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 0)$, dato iniziale, determinare $\lim_{t\to+\infty}(x(t), \dot{x}(t))$

Considerare ora il moto $\ddot{x} = -\dfrac{d}{dx}V - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$. Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

Per $\alpha > -1$ e $\beta > 0$ determinare $\lim_{t\to+\infty}(x(t), \dot{x}(t))$ se $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 0)$.

(*) Risolvere, qualitativamente, il punto precedente nel caso $\alpha \leq -1$.

(*) Sempre nel caso $\beta > 0$, esiste $v > 0$ tale che per il moto di dato iniziale $(0, v)$ vale $\lim_{t\to+\infty} = +\infty$?

1.5.2

Sia $V(x) = \arctan(x) + \dfrac{\alpha x}{1+x^2}$ l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi. In particolare

- determinare le soluzioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- dato $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 0)$, dato iniziale, determinare $\lim_{t\to+\infty}(x(t), \dot{x}(t))$
- se $(x_0, \dot{x}_0) = (0, v)$, per quali valori di v, in funzione di α, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$?

1.5.3

Sia $V(x) = x^4 e^{-x}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi. In particolare

- determinare le soluzioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- determinare la frequenza delle piccole oscilazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- se $(x_0, \dot{x}_0) = (0, v)$, per quali valori di v vale $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$? In tal caso;
  - quant'è $\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t)$?
  - con che velocità, in funzione di v, il punto passa per $x = 4$?
  - dare l'espressione del tempo che il punto materiale impiega per arrivare in $x = 8$, in funzione di v.

1.5.4

Sia $V(x) = -x^2 e^{-x}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi. In particolare,

- calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- se $(x_0, \dot{x}_0) = (2, v)$, per quali valori di v il moto tende a $+\infty$? E per quali tende a $-\infty$? In tal caso calcolare in quanto tempo il punto materiale raggiunge $-\infty$.

1.5.5

Sia $V(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\alpha}{1+x^2}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare,

- determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- per $\alpha = 1$ determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- per $\alpha = \dfrac{1}{2}$ determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- per $\alpha = 1$ e per il dato iniziale $(-1, v)$, determinare i valori di v per quali il moto passa per $x = 1$. Dare l'espressione del tempo impiegato, in funzione di v.
- con i dati del caso precedente, con che velocità il punto materiale passa per $x = 0$?
- (*) determinare $\lim_{E\to+\infty} T(E)$, dove $T(E)$ è il periodo del moto di energia E.
- (*) sempre per $\alpha = 1$, discutere i valori di T per i quali esiste un moto periodico di periodo T.

1.5.6

Sia $V(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\alpha}{1+x^2}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare,

- determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità

- per $\alpha = -1$, determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- per $\alpha = -1$ e $x_0 = 0$, determinare i valori della velocità iniziale v per i quali il moto è illimitato
- nel caso dei dati del punto precedente, se il moto è illimitato, determinare $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{x(t)}{\dot{x}(t)}$, al variare di v

1.5.7

Sia $V(x) = \sqrt{1+x^2} + \dfrac{\alpha}{1+x^2}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare,

- determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- se $(-1, 0)$ è il dato iniziale, per quali valori di α il moto è periodico?
- (*) determinare $\lim_{E\to+\infty} T(E)$, dove $T(E)$ è il periodo del moto di energia E.

1.5.8

Sia $V(x) = -\sqrt{1+x^2} + \dfrac{\alpha}{1+x^2}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare,

- determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- se $(-1, 0)$ è il dato iniziale, per quali valori di α il moto è periodico?
- sia $(0, v)$ il dato iniziale; per quali valori di v il moto è illimitato?
- (*) nel caso dei moti illimitati del punto precedente, determinare $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\dot{x}^2(t)}{x(t)}$, al variare di v.

1.5.9

Sia $V(x) = x + \dfrac{\alpha}{1+x^2}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare,

- determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili

2 Soluzioni degli esercizi sui moti unidimensionali

2.1 Moti unidimensionali

2.1.1

L'energia potenziale è una funzione simmetrica rispetto all'asse delle y. Dunque

$$T(E) = 4\int_0^{x^+(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}, \tag{2.1}$$

dove $x^+(E) = E^{\frac{1}{\alpha}}$. Cambiando variabile di integrazione:

$$T(E) = E^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}} 2\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^\alpha}}$$

Il periodo non dipende dall'energia solo se $\alpha = 2$ (potenziale armonico). Se $\alpha > 2$ $\lim_{E\to 0} T(E) = +\infty$.

2.1.2

È un' equazione differenziale lineare. Trovando gli zeri del polinomio caratteristico $\lambda^2 = 1$, ottieni che la soluzione è $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$, con $\dot{x} = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t$. Imponendo il dato iniziale:

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2 \\ -1 &= -c_1 + c_2, \end{aligned}$$

dunque $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ e il moto è $x(t) = e^{-t}$. Il tempo per raggiungere 0 è infinito. Le traiettorie con $x(t) \to 0$ sono tutte e sole quelle con $c_2 = 0$; esse sono anche tutte e sole le traiettorie con $\dot{x}(t) \to 0$. Dunque i dati iniziali richiesti sono $(x_0, \dot{x}_0) = (c, -c)$, con $c \in \mathbb{R}$.

2.1.3 La doppia buca di potenziale

Il valore minimo dell'energia è $-\frac{1}{4}$. Ad esso corrispondono due posizioni di equilibrio $x = \pm 1$. Sono stabili perchè sono punti di minimo dell'energia potenziale. Per $-\frac{1}{4} < E < 0$ esistono due orbite periodiche. Per $E = 0$, hai tre orbite, la soluzione di equilibrio $x = 0$, che è instabile eesendo un masssimo locale dell'energia potenziale, e due orbite a meta asintotica. Per $E > 0$ hai un'orbita periodica.

Dal ritratto di fase si deduce facilmente che la traiettoria di dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (-1, v)$ passa per $x = 1$ se e solo se l'energia totale è maggiore di 0, che è il valore del massimo locale di V. Dunque $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{4} > 0$, cioè $|v| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il valore di V in $x = -1$ e $x = 1$ è identico; dunque per la conservazione dell'energia, anche il valore di $|\dot{x}$ è identico. Quindi, al primo passaggio per $x = 1$, la velocità è $\dot{x} = |v|$.

Nel ritratto dell'orbita nello spazio delle fasi, la curva di energia $E = 0$ è descritta da $\dot{x} = \pm\sqrt{2(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4})}$. La tangente dell'angolo richiesto è

$$\lim x \to 0^+ \frac{d}{dx}\sqrt{2(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4})} = 1.$$

L'angolo è $\frac{\pi}{4}$.

2.1.4 La doppia buca parte II

Il grafico dell'energia potenziale è qualitativamente diverso nei casi $\alpha < 0$ e $\alpha \geq 0$.

Per $\alpha < 0$, il moto è qualitativamente uguale al caso $\alpha = -1$, descritto nell'esercizio precedente.

Per $\alpha \geq 0$, l'energia potenziale è strettamente convessa; l'unica posizione di equilibrio è $x = 0$, ed è stabile. In particolare per $\alpha > 0$ esiste la frequenza delle piccole oscillazioni, per $\alpha = 0$ non esiste (vedi esercizio 1.1.1).

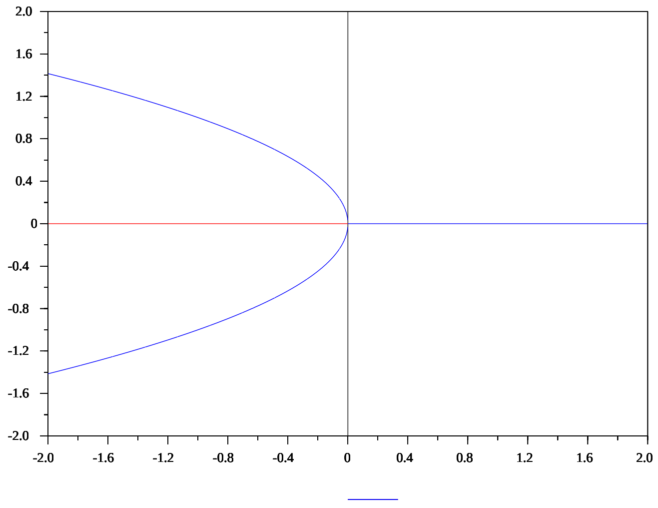
Nella figura, in ascissa cè i valore di α, le curve rosse e blu sono le ascisse delle posizioni di equilibrio, in rosso se l'equilibrio è instabile, in blu se è stabile. La poszione $x = 0$ è stabile per $\alpha \geq 0$, instabile per $\alpha < 0$. Le altre posizioni di equilibrio esistono solo per $\alpha < 0$ e sono stabili.

2.1.5

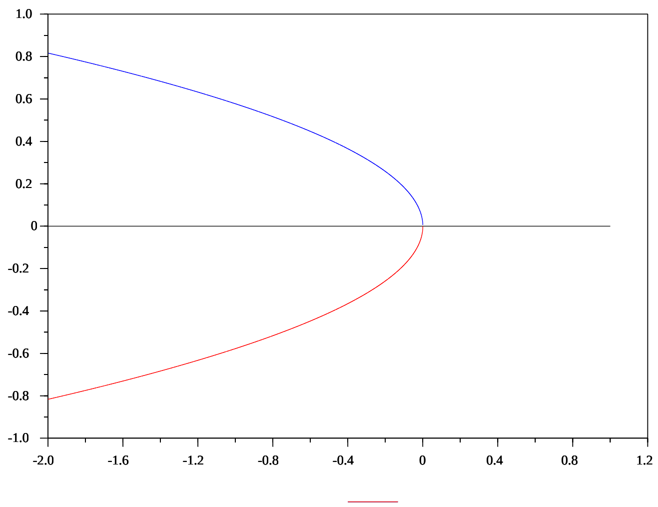
Per $\alpha > 0$ l'energia potenziale è monotona strettamente crescente. Non esistono posizioni di equilibrio, le orbite sono tutte illimitate, Per tutti i dati iniziali $x(t)$ tende a $-\infty$. Il tempo che impiega la particella per raggiungere $-\infty$ è **finito**, infatti $\int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{P}\sqrt{2(E - x^3 - \alpha x)} < \infty$.

Per $\alpha = 0$ cè la posizione di equilibrio $x = 0$. Tutte le altre orbite sono illimitate come nel caso precedente. La posizione di equilibrio è instabile, essendo un punto di flesso.

Per $\alpha < 0$ ci sono due posizioni di equilibrio: $x^\pm = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}$. La posiozione x^- è instabile (massimo locale di V), la posizione x^+ è stabile (minino locale di V). Il valore di V nei punti di equilibrio è $\mp\bar{E} = \mp\frac{2}{3}\alpha\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}$. Per



$E < -\bar{E}$ cè solo un' orbita illimitata. Per $E = -\bar{E}$ un'orbita illimita e $x = x^+$ equilibrio stabile. Per $-\bar{E} < E < \bar{E}$ un'orbita illimitata e una periodica. Per $E = \bar{E}$ la posizione di equilibrio instabile $x = x^-$, un'orbita limitata a meta asintotica nella regione $x > x^-$, un'orbita illimitata a meta asintotica nel passato nella regione $x < x^-$, $\dot{x} < 0$, un'orbita illimitata a meta asintotica nel futuro nella regione $x < x^-$, $\dot{x} > 0$.



2.1.6 Variante della doppia buca

L'energia potenziale va a $+\infty$ se $|x| \to +\infty$. Dunque tutte le orbite sono limitate. Analizzo i casi, al variare di α.

La derivata è $x(x^4 - 2\alpha x^2 + \alpha$. Dunque $x = x_0 = 0$ è soluzione di equilibrio per tutti i valori di α. Le altre eventuali posizioni di equilibrio verificano $x^2 = \alpha \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1)}$. Condizione necessaria affinché esistano è che $\alpha(\alpha - 1) \geq 0$ cioè $\alpha \geq 1$ o $\alpha \leq 0$. Per $\alpha > 1$, $\sqrt{\alpha^2 - \alpha} < \alpha$, dunque esistono quattro posizioni di equilibrio:

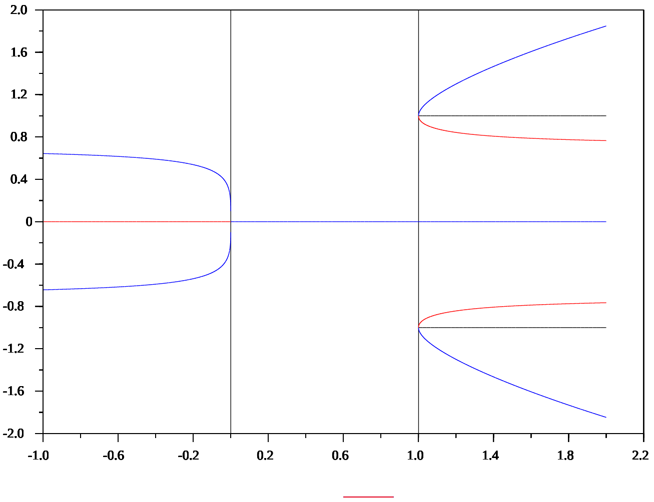
$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha}} \\ x_2 &= -\sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha}} \\ x_3 &= +\sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha}} \\ x_4 &= +\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha}}. \end{aligned}$$

Per $\alpha < 0$, $\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha} > 0$. Dunque esistono solo le posizioni x_1 e x_4.
In sintesi:

$\alpha < 0$: due posizioni di equilibrio stabili x_1 e x_4, ed una instabile x_0;

$0 \leq \alpha \leq 1$: una sola posizione di equilibrio x_0 stabile.

$\alpha > 1$: tre posizioni di equilibrio stabili x_1, x_4 e x_0, e due instabili x_2 e x_3.



2.1.7 Il pendolo su un piano ruotante

Una primitiva in θ della forza assegnata è: $V(\theta) = -Rmg\cos\theta + m\frac{R^2\Omega^2}{2}\cos^2\theta$.

$$V'(\theta) = \sin\theta(Rmg - mR^2\Omega^2\cos\theta) = mR^2\Omega^2(\lambda - \cos\theta).$$

Evidentemente, l'esistenza di alcune posizioni di equilibrio dipende dal fatto che λ sia minore o maggiore di 1. Il parametro λ è adimensionale. Per $\lambda\ ge 1$ ci sono solo la posizione di equilibrio stabile $\theta = 0$ e quella instabile $\theta = \pi$. Per $\lambda < 1$, che corrispone al caso di debole gravità, o di grande velocità angolare del piano, compaiono altre due posizioni di equilibrio: $\theta^{\pm} = \pm\arccos\lambda$. Esse sono stabili, mentre $\theta = 0$ è instabile, come si deduce disegnando il grafico di V.

Il dato iniziale $(\theta_0, \dot\theta_0) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ ha energia totale 0. I livelli critici dell'energia sono:

per $\lambda \geq 1$: $E_1 = -mR^2\Omega^2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$ (livello di minimo, $\theta = 0$) e $E_2 = mR^2\Omega^2\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$ (livello di massimo, $\theta = \pi$).

per $\lambda < 1$: E_1 diventa un livello di massimo locale, il livello di minimo è $E_3 = -mR^2\Omega^2\frac{\lambda^2}{2}$, che corrisponde alle due soluzioni stazionarie $\theta^{\pm}$.

Dunqye $E = 0$ è un livello critico solo se coincide con E_1, il che accade se $\lambda \neq \frac{1}{2}$; in tal caso, essendo $0 < E_2$, l'orbita è periodica. Il periodo è:

$$T = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(-V(\theta))}},$$

se $\lambda > \frac{1}{2}$,

$$T = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arccos(2\lambda)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(-V(\theta))}},$$

se $\lambda < \frac{1}{2}$.
La posizione $\theta = \frac{\pi}{2}$ è raggiunta solo se $\lambda > \frac{1}{2}$; il tempoè:

$$t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(-V(\theta))}}.$$

Il valore di $\dot\theta$ è dato dalla conservazione dell'energia. Essendo $V(\frac{\pi}{2}) = V(-\frac{\pi}{2})$, $\dot\theta$ deve coincidere con il valore iniziale, cioè $\dot\theta = 0$.
Sempre per la conservazione dell'energia, $\dot\theta = \pm\sqrt{\frac{2}{mR^2}(-V(\theta))}$, dunque quando $\theta = 0$, $\dot\theta = \pm\sqrt{-\frac{2}{mR^2}E_1} = \pm\Omega\sqrt{2\lambda - 1}$.
Il valore del massimo $\dot\theta$ è raggiunto quando, lungo l'orbita, $V(\theta)$ è minimo. Se $\lambda \geq 1$ il minimo è raggiunto in $\theta = 0$; se $\lambda < 1$, il minimo è raggiunto in $\theta = \theta^-$.
Il dato iniziale $(\theta_0, \dot\theta_0) = (-\frac{\pi}{2}, omega)$ ha energia totale $\frac{1}{2}mR^2\omega^2$; per ω grande, l'orbita è periodica perché la variabile è un angolo. Il moto è la rotazione completa. Il periodo è

$$T = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(\frac{1}{2}mR^2\omega^2 - V(\theta))}},$$

che per ω grande, al primo ordine in $\frac{1}{\omega}$, vale $\frac{2\pi}{\omega}$.
Nelle posizioni di equilibrio $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, l'accelerazione è nulla $\ddot\theta = 0$, dunque per ω grande la va come ω in $\theta = 0$ e $-\omega$ in $\theta = \pi$.

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$, il coseno è nullo, e dall'equazione del moto ricavo $mR^2\ddot\theta = -Rmg$, cioè $\ddot\theta = -\frac{mg}{R}$. Ne segue che la componente verticale della reazione è nulla.

2.1.8

Standard.

2.1.9

Standard.

2.1.10

Standard.

2.1.11

Le orbite sono tutte limitate per $a > 0$. L'origine è stabile se e solo se $a > \frac{1}{2}$.

2.1.12

Il massimo dell'energia potenziale è -1. Il dato iniziale ha energia $-\frac{1}{2}$. Dunque il moto è illimitato, e $\dot x > 0$ per tutti i tempi positivi. Il tempo per raggiungere $+\infty$ è dato da

$$T = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2(\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2})}},$$

che è infinito. Quando t va ad infinito, x va ad infinito, e l'accelerazione tende al limite di $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ che è 1. È ragionevole aspettarsi che quando t è grande, il moto sia vicino al moto uniformemente accelerato $\tilde x + \tilde v t + \frac{t^2}{2}$. In particolare ci si aspetta che $\dot x$ sia vicino a $\tilde v + t$. Per capire se un tale $\tilde v$ esiste è sufficiente calcolare il limite $\lim_{t\to+\infty}(\dot x - t)$. Sia $\dot x$ che t si possono esprimere in funzione della x:

$$\tilde v = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2(\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2})} - \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{2(\sqrt{1+z^2} - \frac{1}{2})}}\right).$$

Ora posso scrivere $\dot x$ come l'integrale della sua derivata in x:

$$\sqrt{2(\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2})} = 1 + \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{2(\sqrt{1+z^2} - \frac{1}{2})}}\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Sostituendo e raccogliendo:

$$\tilde{v} = 1 - \int_0^\infty dz \frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{1+z^2} - \frac{1}{2})}} \frac{1}{z^2 + z\sqrt{1+z^2} + 1},$$

che è finito. Per la determinazione di $\tilde{x}$, dovrò calcolare $\lim_{t\to+\infty}(x(t) - \tilde{v}t - \frac{1}{2}t^2)$. Si può procedere come sopra anche se è piú complicato.

2.1.13

Il moto è periodico per tutti i dati iniziali con energia negativa, non è periodico, ed è illimitato, per i dati iniziali con energia maggiore o uguale a 0. C'è una sola soluzione stazionaria, in $x = 1$.

Per $x_0 = \frac{1}{2}$ e $\dot{x}_0 = 1$ l'energia vale $\frac{1}{2}$. che è positiva. Dunque $x \to \infty$. Il valore asintotico della velocità è $\sqrt{2(\frac{1}{2})} = 1$.

Per $x_0 = \frac{1}{2}$ e $\dot{x}_0 = -1$, il punto si muove verso sinistra diminuendo il valore assoluto della sua velocità. Successivamente inverte la velocità. Dunque il minimo della velocità è -1, quella del dato iniziale. Il massimo è raggiunto in $x = 1$ (che è il minimo dell'energia potenziale), e vale $\sqrt{2(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2})} = \sqrt{2}$.

2.1.14

Non disponibile

2.1.15

Non disponibile

2.1.16

Non disponibile

2.1.17

Non disponibile

2.1.18

Non disponibile

2.1.19

Non disponibile

2.1.20

Non disponibile

2.1.21

Non disponibile

2.1.22

Non disponibile

2.1.23

a) No, solo se il potenziale è armonico.

b) Il limite è $+\infty$, e il moto NON è uniformemente accelerato.

c) nulla

d) Solo nel caso 4 l'origine è stabile. Il pendolo capovolto linearizzato con attrito è il caso 2. Il caso 3 è un oscillatore armonico con attrito a tempo invertito.

e) 1, 2. I casi 5 e 10 possono considerarsi come moti unidimensionale visti in un sistema di riferimento mobile, di velocità costante. L'energia nel sistema solidale si conserva.

2.2 Equazioni lineari

2.3 Moti forzati e smorzati

2.4 Alcuni esercizi chiave

2.4.1 La doppia buca con attrito

Considero nel seguito solo il caso di λ piccolo. Per λ grandi le affermazioni restano vere, ma i grafici cambiano (come cambiano?).

a) L'energia è un integrale primo del moto per il sistema senza attrito. In presenza di attrito $\frac{d}{dt}E = -\lambda \dot{x}^2$. Quindi anche in presenza di attrito E è una funzione di Lyapunov per i punti di minimo dell'energia potenziale x_1 e x_2. Dunque senz'altro queste due posizioni sono stabili. Il teorema di Lyapunov, pur decrescendo l'energia, non permette di concludere immediatamente che x_1 e x_2 sono asintoticamente stabili. Infatti $\frac{d}{dt}E$ è 0 non solo nella posizione di equilibrio ma anche in tutti i punti dello spazio delle fasi in cui $\dot{x} = 0$. Procedo dunque con l'analisi del linearizzato[1]. Riscrivo l'equazione del moto come un sistema (non lineare) del primo ordine.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ x - x^3 - \lambda v \end{pmatrix}.$$

Lo Jacobiano del campo è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Nei punti $x = \pm 1$ vale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix},$$

che ha entrambi gli autovalori con parte reale negativa. Nel punto 0 la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix},$$

che ha traccia negativa e determinante positivo, quindi ha due autovalori reali di segno opposto. In conclusione le posizioni $x_{1,2}$ sono asintoticamente stabili, la posizione $x = 0$ è instabile.

b) L'energia meccanica non è conservata e decresce nel tempo. Dunque esiste $\bar{E} = \lim_{t \to +\infty} E(t)$ ($E(t)$ è limitata dal basso da $-\frac{1}{4}$). Dunque il moto, nel limite t che va a infinito, tende ad avere energia costante. L'idea intuitiva è che il moto deve tendere ad una soluzione di equilibrio, se no l'energia continuerebbe a decrescere invece che tendere al valore $\bar{E}$.

[1] C'è comunque un teorema che assicura l'asintotica stabilità anche nel caso in cui la derivata della funzione di Lyapunov si annulla in altri punti che non siano il punto di equilibrio. È il teorema di Barbasin (vedi il Dell'Antonio [4]) ; l'ipotesi aggiuntiva necessaria è che l'insieme dei punti in cui $\frac{d}{dt}E = 0$ non contenga intere orbite del sistema a parte il punto stazionario. Nel nostro caso questa ipotesi è soddisfatta.

L'analisi rigorosa di questo fatto è un po' astratta: So che l'energia in funzione del tempo ha limite $\bar{E}$, in particolare $E(t)$ è limitata. Ne segue che il moto, nello spazio delle fasi, è limitato.

Sia $(\tilde{x}, \tilde{v})$ un punto di accumulazione per la traiettoria, cioè esista una sequenza crescente di tempi t_k, con $t_k \to +\infty$ per $k \to +\infty$, tale che $\lim_{k\to+\infty}(x(t_k), \dot{x}(t_k)) = (\tilde{x}, \tilde{v})$ [2]. Considero adesso, per $\tau > 0$ assegnato, la successione di punti dell'orbita $(x(t_k + \tau),\, \dot{x}(t_k + \tau))$.

L'osservazione importante, a questo punto, è che la mappa che dà la soluzione al tempo τ del sistema differenziale autonomo che stiamo considerando è continua nel dato iniziale.

In altre parole:

$$\lim_{k\to+\infty}(x(t_k + \tau),\, \dot{x}(t_k + \tau)) = (\tilde{x}(\tau),\, \dot{\tilde{x}}(\tau)),$$

che è la soluzione al tempo τ di dato iniziale $(\tilde{x}, \tilde{v})$. Ne segue che $E(t_k + \tau)$ tende a $E(\tilde{x}(\tau),\, \dot{\tilde{x}}(\tau))$. Ma $E(t) \to \bar{E}$ dunque, se $(\tilde{x}, \tilde{v})$ non è un punto di equilibrio

$$\bar{E} = \lim_{k\to+\infty} E(t_k + \tau) = E(\tilde{x}(\tau),\, \dot{\tilde{x}}(\tau)) < E(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \bar{E},$$

che è impossibile. Dunque i punti di accumulazione della traiettoria sono solo le posizioni di equilibrio. Dal fatto che l'energia decresce segue che per ogni traiettoria il punto di accumulazione è unico.

Una dimostrazione più costruttiva è possibile ed istruttiva, anche se più complessa.

Il primo fatto importante è che se ad un certo istante di tempo $\bar{t}$ il punto è in $\bar{x}$ con velocità $\bar{v} > 0$ allora la funzione $t \to x(t)$ è invertibile in un intorno di $\bar{t}$, essendo $\frac{d}{dt}x(\bar{t}) = \bar{v} \neq 0$. Cioè posso pensare il tempo come funzione della posizione, quindi posso pensare l'energia come funzione della posizione:

$$\frac{d}{dx}E = \frac{d}{dt}E\frac{dt}{dx} = -\lambda\dot{x}(t) = -\lambda\sqrt{2(E(x) - V(x))}. \tag{2.2}$$

Questa è una equazione differenziale per $E(x)$, con dato iniziale $E(\bar{x}) = \frac{1}{2}\bar{v}^2 + V(\bar{x})$ nel punto $\bar{x}$. Essendo $\bar{v} \neq 0$ sono nelle condizioni di esistenza e unicità locale delle soluzioni (questo non è vero se $\bar{v} = 0$...). Quindi $E(x)$ è una funzione decrescente in x, e l'equazione vale fino al primo $\tilde{x}$ tale che $E(\tilde{x}) = V(\tilde{x})$ (vedi la figura 1). La domanda

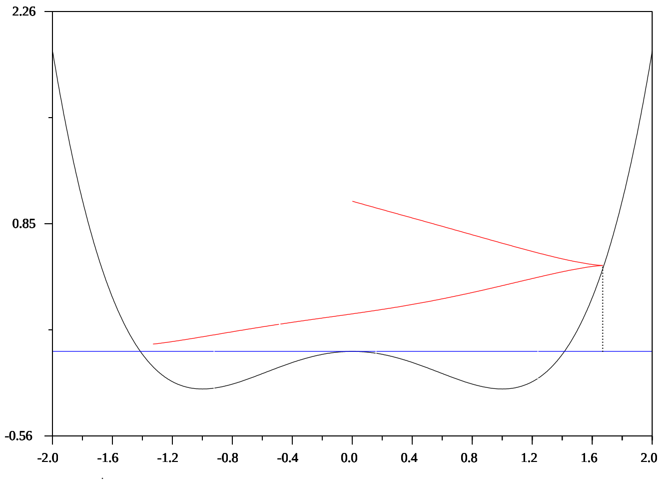


Figura 1: $E(x)$ (in rosso)

importante è se il tempo per arrivare in $\tilde{x}$ è finito o infinito. In tutti gli x tra $\bar{x}$ e $\tilde{x}$ ci arrivo in tempo finito, perchè

[2] L'insieme dei punti di accumulazione per $t \to +\infty$ prende il nome di $\omega-$limite della traiettoria.

la velocità è $\sqrt{2(E(x)-V(x))}$ che è diversa da 0 se $x < \tilde{x}$. D'altra parte, nota $E(x)$, il tempo per arrivare in $\tilde{x}$ è ovviamente

$$\tilde{t} - \bar{t} = \int_{\bar{x}}^{\tilde{x}} \frac{dx}{\sqrt{2(E(x)-V(x))}}. \tag{2.3}$$

Dunque per capire se il tempo è finito devo discutere la sommabilità dell'integrale intorno a $\tilde{x}$. Scrivo l'equazione differenziale per $\delta(x) = E(x) - V(x)$:

$$\frac{d}{dx}\delta(x) = -\lambda\sqrt{2\delta(x)} - V'(x). \tag{2.4}$$

Quando δ è piccolo, e se $\tilde{x}$ non è un punto di equilibrio, x è vicino a $\tilde{x}$, dunque, al primo ordine significativo, l'equazione 2.4 è

$$\frac{d}{dx}\delta(x) = -\lambda\sqrt{2\delta(x)} - c,$$

con $c = V'(\tilde{x})$, cioè meno la forza in $\tilde{x}$. Quest'ultima equazione è esplicitamente risolubile e dà:

$$\frac{\sqrt{2\delta(x)}}{\lambda} - \frac{c}{\lambda}\log\left(1 + \frac{\sqrt{2\delta}}{c}\right) = \tilde{x} - x.$$

Sviluppando a δ piccoli si ottiene che $\delta \approx const.\,(\tilde{x} - x)$, dunque l'integrale è sommabile ed il tempo è finito.

Cosa accade dopo il tempo $\tilde{t}$? Sul punto la forza non è nulla, dunque si muoverà verso sinistra e di nuovo l'equazione 2.2 descrive E in funzione di x. Ripetendo il ragionamento, è evidente che il punto di ferma solo quando E uguaglia $V(x)$ in un punto in cui la forza è 0, cioè solo se il punto tende ad una posizione di equilibrio.

c) Nel punto a) ho provato che la soluzione stazionaria x_3 è instabile. Nonostante ciò esistono traiettorie che tendono a x_3. Un modo per convincersi che è così è quello di considerare un caso più semplice, cioè il linearizzato intorno a x_3. L'equazione del moto diventa

$$\ddot{x} = x - \lambda\dot{x},$$

che è un'equazione lineare esplicitamente risolubile. Non è difficile verificare che esiste un autovettore di autovalore negativo per la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

I moti che hanno dato iniziale su questo autovettore tendono esponenzialmente a $(0,0)$, cioè sono attratti dall'origine. Tutti gli altri si allontanano esponenzialmente. Questo autovettore prende il nome di *varietà stabile* per il punto di equilibrio (instabile) $(0,0)$. Cosa accade per il sistema non lineare della doppia buca? È ragionevole pensare che la varietà stabile continua ad esistere ma non sarà più una retta. Solo per $(x,\dot{x})$ piccolo si confonderà con la varietà stabile del linearizzato. Nota che anche nel caso senza attrito la varietà stabile esiste. È esattamente la separatrice, cioè la curva con energia 0. Nella figura 2 ho disegnato alcune orbite del sistema senza attrito (in nero), la varietà stabile nel caso senza attrito (la separatrice in blu), e la varietà stabile nel caso con attrito (in rosso).

La dimostrazione rigorosa dell'esistenza della varietà stabile nei casi non lineari è complicata (vedi Dell'Antonio [4]), comunque qui mi limito a far notare che si può provare a trovare la soluzione di 2.4 (che equivale all'equazione 2.2) per serie. Nel caso $\lambda = 2^{-\frac{1}{2}}$ (esercizio) si ha:

$$\delta(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}x^4 + \dots.$$

Faccio notare che per $\delta = 0$ in $x = 0$ il termine di destra non verifica le condizioni standard per l'esistenza e unicità delle soluzioni...

d) Assunta per buona la figura 2 è facile capire quali sono i dati iniziali che vengono attratti dalla posizione x_1 e quali quelli attratti dalla posizione x_2. Infatti la varietà stabile divide il piano delle fasi in due regioni distinte, una che contiene il punto x_1, l'altra che contiene il punto x_2.

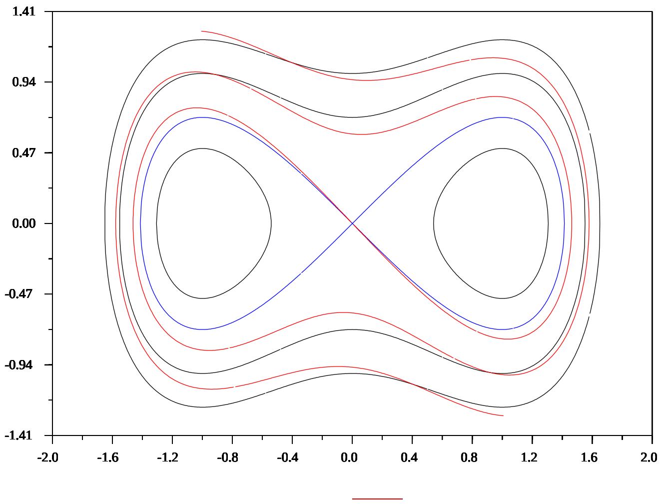


Figura 2: La varietà stabile (in rosso)

La figura 2 si giustifica facilmente considerando che l'energia sulla varietà stabile cresce per $t \to -\infty$. Quindi man mano (con il tempo invertito) essa interseca curve di livello di energia sempre più alta. Inoltre ognuno dei due rami della varietà stabile incontra una curva di livello una ed una sola volta, trasversalmente se $\dot{x} \neq 0$, tangente se $\dot{x} = 0$.

Una ulteriore domanda che ci si può porre, è di quanto aumenta l'energia ogni volta che il punto passa per la posizione $x = 0$, mandando il tempo a $-\infty$. Tornando alla figura 1, e indicando con E_1 il valore dell'energia nel punto $\tilde{x}$ dove il moto inverte la velocità:

$$E(0) - E_1 = \lambda \int_0^{\tilde{x}} \sqrt{2(E(x) - V(x))}.$$

Ora per $0 < x < \tilde{x}$, $E(x) \geq E(\tilde{x})$ quindi

$$E(0) - E_1 \geq \lambda \int_0^{\tilde{x}} \sqrt{2(E_1 - V(x))},$$

che, se E_1 è molto grande, dà l'andamento

$$E(0) - E_1 \geq const.\, E_1^{\frac{1}{2}} \tilde{x}.$$

Ma se E_1 è grande $\tilde{x} > const\, E_1^{\frac{1}{4}}$. In definitiva $E(0) - E_1 \geq const.\, E_1^{\frac{3}{4}}$. Il che significa che man mano che mi allontano da $(0, 0)$ la distanza tra i passaggi della varietà stabile per l'asse $\dot{x}$ cresce.

Nella figura 2.4.1 ho disegnato la curva $(x, E(x))$ per il ramo della varietà stabile che arriva nell'origine con velocità negativa. A quale posizione di equilibrio tende il moto che parte con velocità positiva, energia E e posizione iniziale nulla?

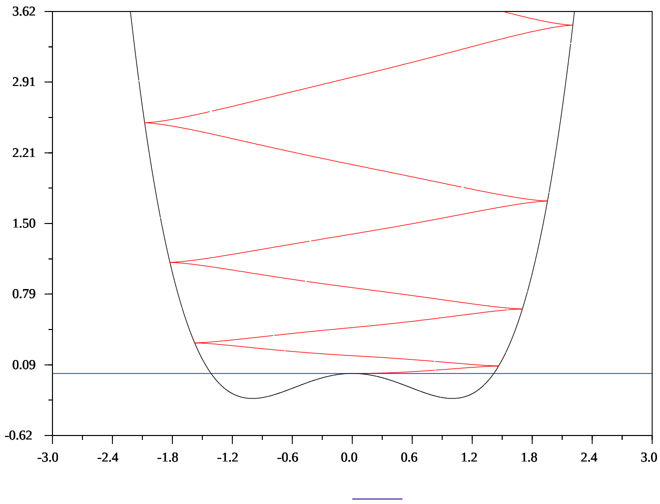
Riferimenti bibliografici

[1] V. I. Arnold *Metodi Matematici della Meccanica Classica* Editori Riuniti

[2] V. I. Arnold *Equazioni Differenziali Oridinarie* Editori Riuniti

[3] F. Bampi, M. Benati, A. Morro *Problemi di Meccanica Razionale* ECIG

[4] G. Dell'Antonio *Elementi di Meccanica: Meccanica Classica* Liguori Editore



[5] G. Dell'Antonio, E. Orlandi, A. Teta *Esercizi di Meccanica Razionale* Dispense

[6] G. Gallavotti *Meccanica Elementare* Boringhieri

[7] F. R. Gantmacher *Lezioni di Meccanica Analitica* Editori Riuniti

[8] H. Goldstein *Meccanica Classica* Zanichelli

[9] L. D. Landau, E. M. Lifšits *Meccanica* Editori Riuniti

[10] E. Olivieri