Esercizi di Meccanica Razionale

AA 1999-2000, corsi Marchioro, Negrini, esercitatore D. Benedetto

2 aprile 2001

Indice

Nella prima parte (sezioni 1.1, 1.2, 1.3, 1.4) ci sono esercizi sui moti unidimensionali.

Ho indicato con:

- * gli esercizi non del tutto standard;
- ** esercizi più difficili e non necessariamente utili;
- *** gli esercizi più difficili e non necessariamente utili;

gli esercizi senza asterisco sono assolutamente standard.

Nella seconda parte (sezione 3) esercizi sui moti in piú dimensioni.

Gli esercizi della sezione 3 sono classificati approssimativamente per argomento:

- **L** formalismo lagrangiano
- **S** stabiltà
- **PO** piccole oscillazioni
- **RU** riduzione dei gradi di libertà
- **N** teorema di Noether
- **CR** corpi rigidi
- **H** formalismo hamiltoniano
- **TC** trasformazioni canoniche

HJ Hamilton-Jacobi

AA variabili azione-angolo

P perturbazioni di sistemi integrabili

I richiami alla bibliografia non sono ovviamente completi: non sono citati tutti i testi, né i testi in bibliografia sono citati tutte le volte che potrebbe essere utile. Me ne scuso con gli studenti e con gli autori.

Questa versione non è definitiva. Possono esserci errori, anche gravi. La versione più recente, e presumibilmente più corretta, è sul sito http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/meccanica

1 Moti unidimensionali

1.1 Esercizi sui moti unidimensionali

Sono trattati in tutti i libri di meccanica. Un'esposizione molto chiara è sull'Olivieri [10].

1.1.1

Calcola il periodo delle oscillazioni del moto unidimensionale di energia potenziale $V(x) = |x|^\alpha$, per $\alpha \geq 2$, in funzione dell'energia (vedi Landau [9]).

Vedi sezione2.1.1

1.1.2

Considera il moto unidimensionale $\ddot{x} = x$. Trova il moto con dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (1, -1)$. In quanto tempo la traiettoria arriva in $x = 0$?

Trova tutti i dati iniziali tali che $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Trova tutti i dati iniziali tali che $\lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = 0$.

Vedi sezione2.1.2

1.1.3 La doppia buca di potenziale

Considera il moto di un punto materiale di massa 1 nella "doppia buca di potenziale" $\ddot{x} = x - x^3$.

Disegna le orbite nello spazio delle fasi.

Discuti la stabilità delle posizioni di equilibrio.

Determina il numero delle orbite ad energia E, al variare di E.

Considera il dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (-1, v)$; per quali valori di $v \in \mathbb{R}$ il punto materiale raggiunge la posizione 1?

Con che velocità ci arriva?

Per $E = 0$ il moto avviene sulla "separatrice". Con che angolo la separatrice interseca gli assi?

Vedi sezione2.1.3

1.1.4 La doppia buca parte II

Considera il moto di un punto materiale di massa 1 di energia potenziale $V(x) = \frac{x^4}{4} + \alpha\frac{x^2}{2}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Discuti qualitativamente il moto al variare di α

In paricolare determina le posizioni di equilibrio e la loro stabilità al variare di α.

Disegna il grafico delle posizioni di equilibrio al variare di α.

Vedi sezione2.1.4

1.1.5

Considera il moto di un punto materiale di massa 1 di energia potenziale $V(x) = x^3 + \alpha x$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Discuti qualitativamente il moto al variare di α

In paricolare determina le posizioni di equilibrio e la loro stabilità al variare di α.

Disegna il grafico delle posizioni di equilibrio al variare di α.

Vedi sezione2.1.5

1.1.6 Variante della doppia buca

Considera il moto di un punto materiale di massa 1, soggetto ad una forza di energia potenziale $V(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{\alpha}{2}(x^4 - x^2)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Discuti qualitativamente il moto al variare di α

In paricolare determina le posizioni di equilibrio e la loro stabilità al variare di α.

Disegna il grafico delle posizioni di equilibrio al variare di α.

Vedi sezione2.1.6

1.1.7 Il pendolo su un piano ruotante

Considera il moto

$$mR^2\ddot{\theta} = -Rmg\sin\theta + mR^2\Omega^2 \sin\theta\, \cos\theta,$$

dove θ è un angolo, $m > 0$ la massa, $R > 0$ una lunghezza, $g \geq 0$ un'accelerazione e $\Omega \geq 0$ una frequenza. Questa equazione descrive un pendolo, cioè un punto materiale di massa m su un estremo di un'asta di lunghezza R con l'altro estremo fissato, soggetta alla forza di gravità, su di un piano verticale che ruota con velocità costante di frequenza Ω. L'angolo θ è misurato dala verticale. Quando $\theta = 0$ il punto materiale si trova nella posizione di minima altezza.

Discuti qualitativamente il moto. In particolare studia l'esistenza e la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\lambda = \frac{g}{R\Omega^2}$. Che dimensioni fisiche ha λ? Disegna il grafico delle posizioni di equilibrio al variare di λ. (Vedi Dell'Antonio [5]).

Considera il dato iniziale $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Prova che il moto è periodico e scrivi il periodo dell'orbita.

In quanto tempo il pendolo arriva in $\theta = \frac{\pi}{2}$?

Con che $\dot{\theta}$ ci arriva?

Quanto vale $\dot{\theta}$ quando il pendolo passa per $\theta = 0$?

Quant'è il valore massimo che $\dot{\theta}$ assume?

Per quali istanti di tempo $\dot{\theta}$ raggiunge il massimo?

Quanto vale θ quando $\dot{\theta}$ è massimo?

Considera il dato iniziale $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (-\frac{\pi}{2}, \omega)$, con $\omega > 0$.

Per quali valori di ω il pendolo ha un moto periodico?

Esprimi per tali valori il periodo del moto.

Determina l'andamento asintotico del periodo per $\omega \to +\infty$.

La componente verticale della reazione vincolare è:

$$\text{Reazione} = mg + mR(\dot{\theta}^2 \cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta).$$

(Perché ?) Determina il suo andamento asintotico per $\omega \to +\infty$, quando il pendolo è in $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

Vedi sezione2.1.7

1.1.8

Considera il moto di un punto materiale di massa m, di energia potenziale

$$V(x) = -\frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 - mgl\left(1 + \cos\left(\frac{x}{l}\right)\right)\mathcal{X}\left(\left|\frac{x}{l}\right| \leq \pi\right),$$

dove $l > 0$, $g \geq 0$ hanno, rispettivamente, le dimensioni di una lunghezza e di una accelerazione, e $\Omega \geq 0$ ha le dimensioni di una frequenza. Nota che gli aspetti qualitativi del moto dipendono dai parametri fisici l, g, Ω attraverso un unico parametro adimensionale. Discuti qualitativamente il moto, in particolare l'esistenza delle posizioni di equilibrio e la loro stabilità.

Vedi sezione2.1.8

1.1.9

Considera il moto di un punto materiale di massa m, di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + mgl\left(1 + \cos\left(\frac{x}{l}\right)\right)\mathcal{X}\left(\left|\frac{x}{l}\right| \leq \pi\right),$$

dove $l > 0$, $g \geq 0$, $k \geq 0$, hanno, rispettivamente, le dimensioni di una lunghezza, di una accelerazione e di una costante di elasticità. Nota che gli aspetti qualitativi del moto dipendono dai parametri fisici m, l, g, k attraverso un unico parametro adimensionale. Discuti qualitativamente il moto, in particolare l'esistenza delle posizioni di equilibrio e la loro stabilità.

Vedi sezione2.1.9

1.1.10

Un punto materiale di massa 1 si muove su una retta sotto l'azione di una forza di energia potenziale $V(x) = -x^3+x^2$. Considera i dati iniziali di energia totale $E = \frac{1}{8}$, e sia $\dot{x}_0 = \frac{1}{2}$. Determina i valori di $x(0)$ per i quali il moto è periodico e dai un'espressione del periodo. Vedi sezione2.1.10

1.1.11

Un punto materiale di massa 1 si muove su una retta sotto l'azione di una forza di energia potenziale $V(x) = \sqrt{x^2+1} + ax^2$, con $a \in \mathbb{R}$.

Per quali valori di a tutte le orbite sono limitate?

Per quali valori di a l'origine è stabile?

Vedi sezione2.1.11

1.1.12 *

Un punto materiale di massa 1, su una retta, inizialmente in $x = 0$ con velocità $\dot{x} = 1$, si muove sotto l'azione di una forza di energia potenziale $V(x) = -\sqrt{x^2+1}$.

Prova che il moto è illimitato.

Prova che esiste un'accelerazione asintotica (cioè $\lim_{t\to+\infty} \ddot{x}$ è finito)

Prova che asintoticamente nel tempo il moto tende ad un moto uniformemente accelerato. In altri termini esistono $\tilde{x}$, $\tilde{v}$, e a tali che $\lim_{t\to\infty} |\dot{x}(t) - (\tilde{v} + ta)| = 0$ e $\lim_{t\to\infty} |x(t) - (\tilde{x} + t\tilde{v} + \frac{t^2}{2}a)| = 0$.

Vedi sezione2.1.12

1.1.13

Un punto materiale di massa 1 si muove sulla semiretta $x > 0$ soggetto ad una forza di energia potenziale $V(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$.

Per quali dati iniziali il moto è periodico?

Per quali dati iniziali il moto non è periodico?

Per quali dati iniziali il moto è illimitato?

Quali solo le soluzioni stazionarie?

Sia $x_0 = \frac{1}{2}$ e $\dot{x}_0 = 1$. Determina $\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t)$.

Sia $x_0 = \frac{1}{2}$ e $\dot{x}_0 = -1$. Qual è il massimo della velocità che il punto raggiuge? E qual è il minima?

Vedi sezione2.1.13

1.1.14 *

Sia $V(x) = 1 + \cos x$ per $|x| \leq \pi$, e $V(x) = 0$ per $|x| \geq \pi$.

Discuti qualitativamente il moto.

Discuti qualitativamente il moto per il potenziale $V_\varepsilon(x) = V(\frac{x}{\varepsilon})$ con $\varepsilon > 0$; cosa accade nel limite $\varepsilon \to 0$?

Discuti qualitativamente il moto per il potenziale $V_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}V(\frac{x}{\varepsilon})$ con $\varepsilon > 0$; cosa accade nel limite $\varepsilon \to 0$? Qual è il moto di una particella che rimbalza contro un "muro infinitamente rigido"?

Vedi sezione2.1.14

1.1.15 *

Sia $V(x) = -(1 + \cos x)$ per $|x| \leq \pi$, e $V(x) = 0$ per $|x| \geq \pi$.

Discuti qualitativamente il moto.

Discuti qualitativamente il moto per il potenziale $V_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}V(\frac{x}{\varepsilon})$ con $\varepsilon > 0$, per dati iniziali di energia totale positiva. Cosa accade nel limite $\varepsilon \to 0$?

Vedi sezione2.1.15

1.1.16

Sia $V(x) = |x|$. Discuti qualitativamente il moto. Quant'è la forza in $x = 0$? Sia $V(x) = -|x|$. Trova il moto di dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (-1, v)$ al variare di $v > 0$. Considera ora $V(x) = -\sqrt{a^2 + x^2} + a$, con $a > 0$. Determina il moto di dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (-1, v)$ al variare di $v > 0$, e il limite di tale moto per $a \to 0$.

Vedi sezione2.1.16

1.1.17 *

Sia $V(x) = -|x|^\alpha$ con $\alpha > 0$. Considera il dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (1, 0)$. In quanto tempo il punto materiale raggiunge $+\infty$? Per quanto tempo il moto esiste?

Sia $V(x) \geq M$ per ogni x reale. Prova che $|x(t)| \leq c_1 + c_2 t$, per c_1, c_2 costanti opportune che dipendono dal dato iniziale. Prova che il moto esiste per tutti i tempi.

Vedi sezione2.1.17

1.1.18

Sia $V(x) = x + \alpha \sin x$, con $\alpha > 0$. Discuti qualitativamente il moto al variare di α. In particolare trova gli α per cui esistono soluzioni stazionarie e discutine la stabilità. Determina per quali α esistono orbite periodiche.

Vedi sezione2.1.18

1.1.19 *

Sia $V(x) = \sin(x) + \sin(\alpha x)$, con $0 < \alpha < 1$, e $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 2)$. Determina $\lim_{t\to\infty} x(t)$ al variare di α. (Suggerimento: vedi l'esercizio sul ritorno 1.4.2)

Vedi sezione2.1.19

1.1.20

Sia $V(x) = (1 + \cos(x)) \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, e $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 2)$. Per quali valori di ε il moto è illimitato? Vedi sezione2.1.20

1.1.21 **

Sia $V(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $x_0 = 0$ e $\dot{x}_0 > 2$. Determina il tempo necessario per raggiungere $x = 1$, nel limite $\varepsilon \to 0$. Vedi sezione2.1.21

1.1.22 ***

Sia $V(x) = (1 + \cos(x)) \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, e $(x_0, \dot{x}_0) = (-\pi, 2)$. Indica con t_ε il tempo necessario per raggiungere $x = \pi$. Prova che $\lim_{\varepsilon\to 0} t_\varepsilon$ è finito. Sia $t_\varepsilon(x)$ il tempo necessario per raggiungere $x > \pi$. Prova che $\frac{t_\varepsilon(x)}{x} > c$ per ogni ε ed ogni $x > \pi$

Vedi sezione2.1.22

1.1.23 Domande brevi

a) In generale un'orbita periodica è descritta da un'ellisse nello spazio delle fasi?

b) Sia $V(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$. Quant'è $\lim_{t\to+\infty} x(t)$? Il moto è uniformemente accelerato?

c) Come è la parte reale degli autovalori di un sistema conservativo linearizzato intorno ad una posizione di equilibrio stabile?

d) Discuti la stabilità dell'origine per le seguenti equazioni differenziali:

1. $\ddot{x} = x + \dot{x}$
2. $\ddot{x} = x - \dot{x}$
3. $\ddot{x} = -x + \dot{x}$
4. $\ddot{x} = -x - \dot{x}$

Quale di esse descrive un oscillatore armonico con attrito a tempo invertito? E quale il linearizzato di un pendolo capovolto con attrito?

e) Per quali dei seguenti moti unidimensionali l'energia meccanica è conservata?

1. $\ddot{x} = e^{\sin x^2}$
2. $\ddot{x} = \cos x$
3. $\ddot{x} = \sin x + t^2$
4. $\ddot{x} = \sin x + 1$
5. $\ddot{x} = x + t$
6. $\ddot{x} = xt$
7. $\ddot{x} = x + \dot{x}$
8. $\ddot{x} + \dot{x} + \sin x = 0$
9. $\ddot{x} = \dot{x}$
10. $\ddot{x} = \arccos(x - 3t)$

In due degli esempi precedenti, anche se l'energia meccanica non si conserva, c'è un integrale primo del moto, dipendente dal tempo, che ne permette l'analisi qualitativa. Quali sono? Qual è l'interpretazione fisica di tali integrali primi? (vedi l'inizio dell'esercizio 1.4.5).

Vedi sezione2.1.23

1.2 Equazioni lineari

Nei testi di analisi matematica l'aspetto qualitativo è tipicamente sottorappresentato. Vedi invece i testi di Arnold [1, 2] e in generale i libri di Meccanica.

1.2.1

Linearizza l'equazione del pendolo

$$\ddot{\phi} = -\omega_0^2 \sin\phi$$

intorno a *tutte* le posizioni di equilibrio.

1.2.2

Descrivi le traiettorie nello spazio delle fasi di

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z},$$

per

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix},$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ (anche negativo).

1.2.3

Che relazione devono verificare la matrice A e il vettore $\mathbf{w}$ affinché il sistema

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \cos(t)\mathbf{w}$$

ammetta una soluzione periodica di periodo t? (Suggerimento: cerca soluzioni del tipo $\sin(t)\mathbf{a} + \cos(t)\mathbf{b}$).

1.2.4 *

Considera il sistema lineare

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z},$$

con dato iniziale $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$. Prova che la soluzione è lineare nel dato iniziale. Questo implica che esiste una matrice $U(t)$ tale che $\mathbf{z}(t) = U(t)\mathbf{z}_0$. Prova che la matrice $U(t)$ può essere ottenuta come somma della serie di matrici:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Per questo motivo $U(t)$ si indica spesso con e^{At}. (Suggerimento: lo spazio delle matrici con la norma $\|A\| = \max_{|v|=1} |A(v)|$ è completo e vale $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$. La serie è una serie di potenze in t quindi ha un raggio di convergenza, determinalo e deriva termine a termine).

1.3 Moti forzati e smorzati

Per le oscillazioni forzate e smorzate mi vengono in mente due testi: il Landau [9] e il Gallavotti [6].

1.3.1

Risolvi il moto $\ddot{x} = -\lambda\dot{x} + (1 + \cos(\omega t))$. Esistono soluzioni stazionarie? Esistono moti periodici? Esiste $\lim_{t\to+\infty} x(t)$?

1.3.2

Risolvi

$$\ddot{x} = -x - 2\lambda\dot{x} + \sin(t) + \cos(2t),$$

con dato iniziale $(0, 0)$, per $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{4}{5}$.

1.3.3 *

Sia $f(t)$ una funzione periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Assumi che sia almeno di classe $\mathbf{C}^2$ (derivabile due volte con derivata seconda continua e limitata).

La funzione f può essere sviluppata in serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i\omega k t},$$

dove $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T dt e^{-i\omega k t} f(t)\, dt$. Ricorda che $c_{-k} = \bar{c}_k$, per la realtà di f, e $|c_k| \leq \frac{C}{k^2}$ per $k \neq 0$ (per l'ipotesi $\mathbf{C}^2$).

Trova per serie una soluzione particolare di

$$\ddot{x} = -x - 2\lambda\dot{x} + f(t),$$

per $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{4}{5}$, al variare di ω. Che condizioni devi imporre su c_k e ω affinché il moto sia limitato?

1.3.4 *

Considera l'oscillatore armonico forzato

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \cos(\omega t).$$

Per quali valori di ω esistono moti periodici?

Prova che tutti i moti sono periodici se e solo se $\frac{\omega_1}{\omega}$ è razionale e diverso da 1.

Prova che se $\frac{\omega_1}{\omega}$ è irrazionale, il moto nello spazio delle fasi riempie densamente una regione. Che regione è? (Suggerimento: vedi l'esercizio 1.4.2)

1.3.5 *

Considera il moto $\ddot{x} = -x + \mathcal{X}\{0 \leq x \leq 1\}\mathcal{X}\{\dot{x} \geq 0\}$.

L'energia meccanica si conserva?

Considera il dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 0)$. Risolvi esplicitamente il moto fino al primo tempo di ritorno del punto materiale in $x = 0$ con velocità positiva.

Come avviene il moto fino al secondo ritorno?

E dopo?

Sia t_k il tempo in cui il punto materiale ritorna in $x = 0$ con velocità positiva. Trova $\lim_{k\to+\infty}(t_k - t_{k-1})$. (Vedi la parte sullo "scappamento ad ancora" sul Gallavotti [6])

1.4 Alcuni esercizi chiave

1.4.1 La doppia buca con attrito

Considera il moto $\ddot{x} = x - x^3 - \lambda\dot{x}$ (moto nella doppia buca di potenziale con attrito). Le posizioni di equilibrio sono $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

a) Prova che $x_{1,2}$ sono posizioni di equilibrio stabili, e x_3 è instabile.

b) Prova che per qualunque dato iniziale la traiettoria converge ad una delle posizioni di equilibrio.

c) Chiediti se esistono traiettorie non stazionarie che tendono a x_3.

d) Determina qualitativamente la regione dello spazio delle fasi che è attratta da x_1 e quella attratta da x_2 (Suggerimento: disegna nello spazio delle fasi le orbite del sistema senza attrito e i moti del sistema con attrito che tendono alla posizione di equilibrio x_2.

Vedi sezione2.4.1

1.4.2 Il ‘ritorno’ parte I

Considera una pulce su una circonferenza, che al tempo iniziale sia nel punto di angolo al centro $\phi = 0$. Ad ogni secondo la pulce fà un salto di un angolo α. Sia ϕ_k, con $0 \leq \phi_k < 2\pi$, la posizione della pulce al secondo k.

a) Prova che se $\frac{\alpha}{\pi}$è razionale il moto della pulce è periodico, cioè esiste k tale che $\phi_k = 0$

b) Prova che se $\frac{\alpha}{\pi}$ è irrazionale la pulce non torna mai in $\phi = 0$.

c) Sempre nel caso $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, prova che esiste una successione crescente di interi n_k tale che $\lim_{k\to+\infty} \phi_{n_k} = 0$.

d) Sempre nel caso $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, prova che per ogni ϕ esiste una successione crescente di interi n_k tale che $\lim_{k\to+\infty} \phi_{n_k} = \phi$ (in altre parole il moto è ‘denso‘ sulla circonferenza, o anche l’$\omega-$limite del moto è tutta la circonferenza.

(Vedi Arnold [2])

1.4.3 Il ‘ritorno’ parte II

Considera il seguente moto delle variabili periodiche $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ (sono angoli tra 0 e 2π, cioè (ϕ_1, ϕ_2) descrivono un toro bidimensionale):

$$\phi_1(t) = \omega_1 t$$

$$\phi_2(t) = \omega_2 t.$$

Il moto in ognuna delle variabili ϕ_i è periodico di periodo $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$. Prova che il moto complessivo è periodico se e solo se $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ è razionale. Prova che nel caso non periodico il moto è denso sul toro. (Vedi Arnold [2])

1.4.4 **

Tratto dall’Arnold di Eq. Diff. [2]
Considera la successione formata dalle prima cifra dell’espressione decimale di 2^n:

$$\begin{array}{rcl} 2^0 = 1 & \to & 1 \\ 2^1 = 2 & \to & 2 \\ 2^2 = 4 & \to & 4 \\ 2^3 = 8 & \to & 8 \\ 2^4 = 16 & \to & 1 \\ 2^5 = 32 & \to & 3 \\ 2^6 = 64 & \to & 6 \\ & \dots & \end{array}$$

Compare il 7 nella successione?
Compare più frequentemente il 6 o l’ 8?
Più in generale 2^n può iniziare con una sequenza arbitraria di cifre?

1.4.5 Un esempio di invariante adiabatico

Come si muove un punto materiale soggetto ad una forza di energia potenziale $V(x,t) = V(x - ct)$ con c costante?

Come si muove un punto materiale in presenza di una parete infinitamente rigida che si muove con velocità costante c?

Un punto materiale di massa m si muove tra due pareti infinitamente rigide, la prima fissa in $x = 0$ e la seconda in $x = z(t) = z_0 - \varepsilon t$, con $\varepsilon > 0$. All’istante iniziale il punto è in $x = 0$ con velocità v. Determina, nel $\lim_{\varepsilon\to 0}$, il modulo della velocità del punto nell’istante in cui la barriera mobile è arrivata in $x = \frac{1}{2}$.

Prova più in generale che $\lim_{\varepsilon\to 0} \left| v\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) z\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right| = v z_0$.

Suggerimento: supponi che al tempo t_0 la barriera mobile sia in a e la particella sia in 0 con velocità v. Calcola il tempo t_1 di ritorno della particella in 0, la velocità che ha la particella e la posizione della barriera mobile. Nota che il prodotto della velocità per la posizione della barriera al tempo t_1 è identico al prodotto al tempo t_0. Estendi ricorsivamente per i ritorni successivi, e determina la successione dei tempi di urto con la parete fissa...

Osservazione

Fisicamente $m|v(t)z(t)|$ ha le dimensioni di una energia per il tempo (ha le dimensioni dell'azione). Per z costante, l'azione è proporzionale all'area racchiusa dall'orbita nello spazio delle fasi (che in questo caso è un rettangolo!).

È ovvio che $\lim_{\varepsilon \to 0} |v(t)z(t)| = v_0 z_0$, infatti per $\varepsilon = 0$ la barriera è ferma. Questo limite non è uniforme in t. Dall'esercizio puoi notare che ad un tempo dell'ordine di $\frac{1}{\varepsilon}$ la variazione di $|V(t)z(t)|$ rispetto a $v_0 z_0$ è di ordine ε.

Cioè l'azione è praticamente invariante, rispetto a variazioni lente (adiabatiche) dei parametri fisici che governano il moto.

Per maggiori dettagli vedi l'Arnold [1] e il Landau [9].

1.4.6 La buca variabile rivisitata

(Autore E. Caglioti)

L'esercizio precedente ha una interpretazione termodinamica.

È facile identificare l'energia interna: $U = \frac{1}{2}v^2$. È anche facile identificare il 'volume': sarà $V = z$. La pressione è fisicamente la forza esercitata sull'unità di superficie che racchiude il mezzo. D'altra parte in questo caso la superficie è un punto ($x = 0$ oppure $x = z$). Se un punto materiale subisce in un certo tempo δt una variazione di impulso $\delta(mv)$, la forza che è stata esercitata su di esso è $\frac{\delta(mv)}{\delta t}$. Per un urto n $x = 0$ la variazione di impulso è $2m|v|$. Nel nostro caso non c'è variazione di impulso se non quando la massa tocca $x = 0$. Per dare senso alla pressione, si può pensare di considerare l'impulso scambiato con la parete per un tempo sufficientemente lungo affinché avvengano molti urti, ma sufficientemente piccolo affinché la variazione dovuta al moto della barriera mobile non sia significativa (assunzione possibile se ε è molto piccolo). In altre parole:

$$P = \frac{2m|v|k}{\tau_k},$$

dove k è il numero di volte che la massa urta la parete in $x = 0$, e τ_k è il tempo necessario per fare k urti. Evidentemente $\tau_k \approx k\frac{2z}{|v|}$ ($2z$ è la distanza da percorrere per tornare in $x = 0$ e v è la velocità).

In definitiva, l'interpretazione termodinamica del moto di una particella tra due pareti perfettamente rigide a distanza z dà:

$$\begin{gathered} U = \tfrac{1}{2}mv^2 \\ V = z \\ P = \tfrac{mv^2}{z}. \end{gathered}$$

Prova che se z varia molto lentamente,

$$TdS = dU + PdV = 0,$$

cioè la trasformazione è adiabatica.

Osservazione

Fare la termodinamica di una sola particella è abbastanza privo di senso. Si possono considerare, più correttamente, moltissime particelle tra le pareti, che non urtano tra di loro. Questa situazione può far pensare ad un gas perfetto, per cui la termodinamica ha senso, e la pressione è cinematicamente definita attraverso l'impulso scambiato con le pareti. Tenete presente, però, che un insieme di particelle che non urtano tra loro NON sono un gas perfetto. Infatti manca il meccanismo di termalizzazione tipico, ad esempio, dell'equazione di Boltzmann.

1.4.7 Altri esempi di invarianti adiabatici

Teorema dell'invarianza adiabatica.

Supponi di avere un moto unidimensionale in cui l'energia totale, oltre che dipendere dalla posizione e dalla velocità, dipenda da un parametro λ, cioè $E = E(x, \dot{x}, \lambda)$. Come esempio puoi pensare a $E = \frac{1}{2}\lambda\dot{x}^2 + V(x)$, dove la massa stessa è il parametro λ, oppure $E = \frac{1}{2}m\lambda^2\dot{\theta}^2 - mg\lambda\cos\theta$, dove λ ha le dimensioni di una lunghezza.

Supponi, inoltre, che il moto assegnato sia in generle periodico, ed indica con $I(E)$ la misura dell'area, nello spazio delle fasi, della regione racchiusa dall'orbita di energia E.

Considera ora il moto con energia totale dipendente dal tempo attraverso λ: $E = E(x, \dot{x}, \varepsilon t)$, con ε piccolo.

Il teorema adiabatico afferma che

$$|I(E(t)) - I(E(0))| \leq c\varepsilon,$$

per $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

In altre parole, per variare l'azione di ε devo aspettare un tempo di ordine $\frac{1}{\varepsilon}$.

In questo enunciato mancano delle ipotesi importanti. Per l'enunciato preciso e per la dimostrazione vedi, tra gli altri, l'Arnold [1]

Considera un pendolo la cui massa diminuisce lentamente con il tempo. Di quanto varia l'ampiezza delle oscillazioni se la massa si dimezza?

Una massa è appesa ad un filo ed oscilla. Se dimezzo lentamente la lunghezza del filo, come cambia l'ampiezza delle oscillazioni?

Considera il moto unidimensionale di energia totale

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{k}{r}.$$

Considera un dato iniziale che compia piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile. Se k si dimezza molto lentamente, come cambia il moto?

(**) Un satellite in orbita intorno alla Terra descrive un'orbita poco eccentrica. Come cambia l'orbita se il momento della quantità di moto del satellite raddoppia molto lentamente?

1.5 Altri esercizi sui moti unidimensionali (2001)

1.5.1

Sia $V(x) = \arctan(x) + \dfrac{\alpha}{1+x^2}$ l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi. In particolare

- determinare le soluzioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- dato $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 0)$, dato iniziale, determinare $\lim_{t\to+\infty}(x(t), \dot{x}(t))$

Considerare ora il moto $\ddot{x} = -\dfrac{d}{dx}V - \beta\dot{x}$, con $\beta > 0$. Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità. Per $\alpha > -1$ e $\beta > 0$ determinare $\lim_{t\to+\infty}(x(t), \dot{x}(t))$ se $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 0)$.

(*) Risolvere, qualitativamente, il punto precedente nel caso $\alpha \leq -1$.

(*) Sempre nel caso $\beta > 0$, esiste $v > 0$ tale che per il moto di dato iniziale $(0, v)$ vale $\lim_{t\to+\infty} = +\infty$?

1.5.2

Sia $V(x) = \arctan(x) + \dfrac{\alpha x}{1+x^2}$ l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi. In particolare

- determinare le soluzioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- dato $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 0)$, dato iniziale, determinare $\lim_{t\to+\infty}(x(t), \dot{x}(t))$
- se $(x_0, \dot{x}_0) = (0, v)$, per quali valori di v, in funzione di α, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$?

1.5.3

Sia $V(x) = x^4 e^{-x}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi. In particolare

- determinare le soluzioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- determinare la frequenza delle piccole oscilazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- se $(x_0, \dot{x}_0) = (0, v)$, per quali valori di v vale $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$? In tal caso;
  - quant'è $\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t)$?
  - con che velocità, in funzione di v, il punto passa per $x = 4$?
  - dare l'espressione del tempo che il punto materiale impiega per arrivare in $x = 8$, in funzione di v.

1.5.4

Sia $V(x) = -x^2 e^{-x}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi. In particolare,

- calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- se $(x_0, \dot{x}_0) = (2, v)$, per quali valori di v il moto tende a $+\infty$? E per quali tende a $-\infty$? In tal caso calcolare in quanto tempo il punto materiale raggiunge $-\infty$.

1.5.5

Sia $V(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\alpha}{1+x^2}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare,

- determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- per $\alpha = 1$ determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- per $\alpha = \dfrac{1}{2}$ determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- per $\alpha = 1$ e per il dato iniziale $(-1, v)$, determinare i valori di v per quali il moto passa per $x = 1$. Dare l'espressione del tempo impiegato, in funzione di v.
- con i dati del caso precedente, con che velocità il punto materiale passa per $x = 0$?
- (*) determinare $\lim_{E\to+\infty} T(E)$, dove $T(E)$ è il periodo del moto di energia E.
- (*) sempre per $\alpha = 1$, discutere i valori di T per i quali esiste un moto periodico di periodo T.

1.5.6

Sia $V(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\alpha}{1+x^2}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare,

- determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità

- per $\alpha = -1$, determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- per $\alpha = -2$ e $x_0 = 0$, determinare i valori della velocità iniziale v per i quali il moto è illimitato
- nel caso dei dati del punto precedente, se il moto è illimitato, determinare $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{x(t)}{\dot{x}(t)}$, al variare di v

1.5.7

Sia $V(x) = \sqrt{1+x^2} + \dfrac{\alpha}{1+x^2}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare,

- determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- se $(-1, 0)$ è il dato iniziale, per quali valori di α il moto è periodico?
- (*) determinare $\lim_{E\to+\infty} T(E)$, dove $T(E)$ è il periodo del moto di energia E.

1.5.8

Sia $V(x) = -\sqrt{1+x^2} + \dfrac{\alpha}{1+x^2}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare,

- determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili
- se $(-1, 0)$ è il dato iniziale, per quali valori di α il moto è periodico?
- sia $(0, v)$ il dato iniziale; per quali valori di v il moto è illimitato?
- (*) nel caso dei moti illimitati del punto precedente, determinare $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\dot{x}^2(t)}{x(t)}$, al variare di v.

1.5.9

Sia $V(x) = x + \dfrac{\alpha}{1+x^2}$. l'energia potenziale di un moto unidimensionale. Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare,

- determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità
- determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili

2 Soluzioni degli esercizi sui moti unidimensionali

2.1 Moti unidimensionali

2.1.1

L'energia potenziale è una funzione simmetrica rispetto all'asse delle y. Dunque

$$T(E) = 4 \int_0^{x^+(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}, \tag{2.1}$$

dove $x^+(E) = E^{\frac{1}{\alpha}}$. Cambiando variabile di integrazione:

$$T(E) = E^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}} 2\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^\alpha}}$$

Il periodo non dipende dall'energia solo se $\alpha = 2$ (potenziale armonico). Se $\alpha > 2$ $\lim_{E\to 0} T(E) = +\infty$.

2.1.2

È un' equazione differenziale lineare. Trovando gli zeri del polinomio caratteristico $\lambda^2 = 1$, ottieni che la soluzione è $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$, con $\dot{x} = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t$. Imponendo il dato iniziale:

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2 \\ -1 &= -c_1 + c_2, \end{aligned}$$

dunque $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ e il moto è $x(t) = e^{-t}$. Il tempo per raggiungere 0 è infinito. Le traiettorie con $x(t) \to 0$ sono tutte e sole quelle con $c_2 = 0$; esse sono anche tutte e sole le traiettorie con $\dot{x}(t) \to 0$. Dunque i dati iniziali richiesti sono $(x_0, \dot{x}_0) = (c, -c)$, con $c \in \mathbb{R}$.

2.1.3 La doppia buca di potenziale

Il valore minimo dell'energia è $-\frac{1}{4}$. Ad esso corrispondono due posizioni di equilibrio $x = \pm 1$. Sono stabili perchè sono punti di minimo dell'energia potenziale. Per $-\frac{1}{4} < E < 0$ esistono due orbite periodiche. Per $E = 0$, hai tre orbite, la soluzione di equilibrio $x = 0$, che è instabile eesendo un masssimo locale dell'energia potenziale, e due orbite a meta asintotica. Per $E > 0$ hai un'orbita periodica.

Dal ritratto di fase si deduce facilmente che la traiettoria di dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0) = (-1, v)$ passa per $x = 1$ se e solo se l'energia totale è maggiore di 0, che è il valore del massimo locale di V. Dunque $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{4} > 0$, cioè $|v| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il valore di V in $x = -1$ e $x = 1$ è identico; dunque per la conservazione dell'energia, anche il valore di $|\dot{x}$ è identico. Quindi, al primo passaggio per $x = 1$, la velocità è $\dot{x} = |v|$.

Nel ritratto dell'orbita nello spazio delle fasi, la curva di energia $E = 0$ è descritta da $\dot{x} = \pm\sqrt{2(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4})}$. La tangente dell'angolo richiesto è

$$\lim x \to 0^+ \frac{d}{dx}\sqrt{2(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4})} = 1.$$

L'angolo è $\frac{\pi}{4}$.

2.1.4 La doppia buca parte II

Il grafico dell'energia potenziale è qualitativamente diverso nei casi $\alpha < 0$ e $\alpha \geq 0$.

Per $\alpha < 0$, il moto è qualitativamente uguale al caso $\alpha = -1$, descritto nell'esercizio precedente.

Per $\alpha \geq 0$, l'energia potenziale è strettamente convessa; l'unica posizione di equilibrio è $x = 0$, ed è stabile. In particolare per $\alpha > 0$ esiste la frequenza delle piccole oscillazioni, per $\alpha = 0$ non esiste (vedi esercizio 1.1.1).

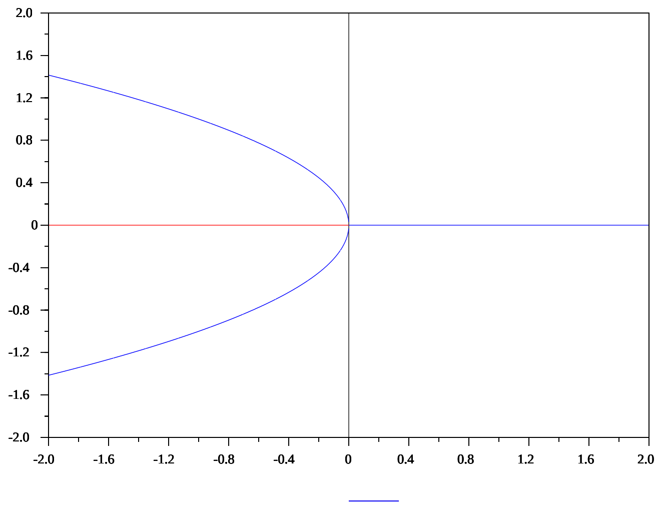
Nella figura, in ascissa cè i valore di α, le curve rosse e blu sono le ascisse delle posizioni di equilibrio, in rosso se l'equilibrio è instabile, in blu se è stabile. La poszione $x = 0$ è stabile per $\alpha \geq 0$, instabile per $\alpha < 0$. Le altre posizioni di equilibrio esistono solo per $\alpha < 0$ e sono stabili.

2.1.5

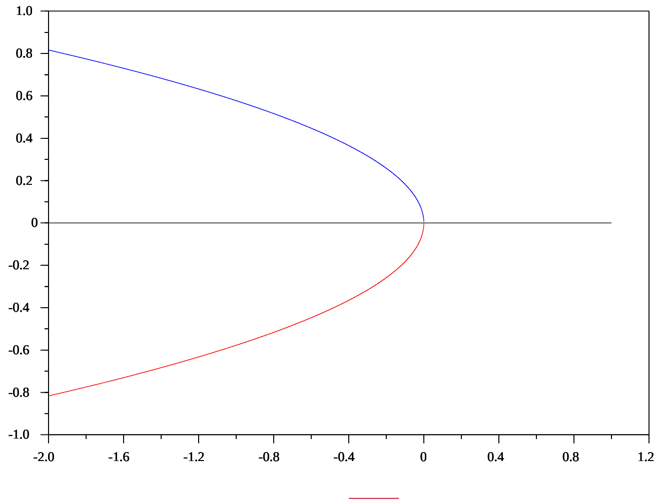
Per $\alpha > 0$ l'energia potenziale è monotona strettamente crescente. Non esistono posizioni di equilibrio, le orbite sono tutte illimitate, Per tutti i dati iniziali $x(t)$ tende a $-\infty$. Il tempo che impiega la particella per raggiungere $-\infty$ è **finito**, infatti $\int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{P}\sqrt{2(E - x^3 - \alpha x)} < \infty$.

Per $\alpha = 0$ cè la posizione di equilibrio $x = 0$. Tutte le altre orbite sono illimitate come nel caso precedente. La posizione di equilibrio è instabile, essendo un punto di flesso.

Per $\alpha < 0$ ci sono due posizioni di equilibrio: $x^{\pm} = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}$. La posiozione x^- è instabile (massimo locale di V), la posizione x^+ è stabile (minino locale di V). Il valore di V nei punti di equilibrio è $\mp\bar{E} = \mp\frac{2}{3}\alpha\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}$. Per



$E < -\bar{E}$ cè solo un' orbita illimitata. Per $E = -\bar{E}$ un'orbita illimita e $x = x^+$ equilibrio stabile. Per $-\bar{E} < E < \bar{E}$ un'orbita illimitata e una periodica. Per $E = \bar{E}$ la posizione di equilibrio instabile $x = x^-$, un'orbita limitata a meta asintotica nella regione $x > x^-$, un'orbita illimitata a meta asintotica nel passato nella regione $x < x^-$, $\dot{x} < 0$, un'orbita illimitata a meta asintotica nel futuro nella regione $x < x^-$, $\dot{x} > 0$.



2.1.6 Variante della doppia buca

L'energia potenziale va a $+\infty$ se $|x| \to +\infty$. Dunque tutte le orbite sono limitate. Analizzo i casi, al variare di α.

La derivata è $x(x^4 - 2\alpha x^2 + \alpha$. Dunque $x = x_0 = 0$ è soluzione di equilibrio per tutti i valori di α. Le altre eventuali posizioni di equilibrio verificano $x^2 = \alpha \pm \sqrt{\alpha(\alpha - 1)}$. Condizione necessaria affinché esistano è che $\alpha(\alpha - 1) \geq 0$ cioè $\alpha \geq 1$ o $\alpha \leq 0$. Per $\alpha > 1$, $\sqrt{\alpha^2 - \alpha} < \alpha$, dunque esistono quattro posizioni di equilibrio:

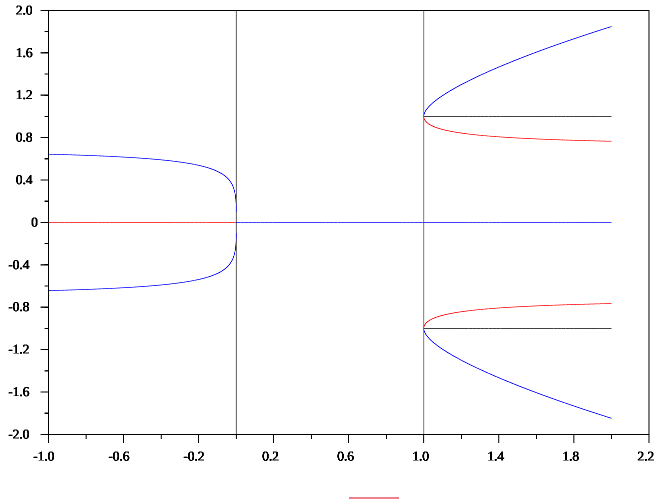
$$\begin{aligned}
x_1 &= -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha}} \\
x_2 &= -\sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha}} \\
x_3 &= +\sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha}} \\
x_4 &= +\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha}}.
\end{aligned}$$

Per $\alpha < 0$, $\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha} > 0$. Dunque esistono solo le posizioni x_1 e x_4.
In sintesi:

$\alpha < 0$: due posizioni di equilibrio stabili x_1 e x_4, ed una instabile x_0;

$0 \leq \alpha \leq 1$: una sola posizione di equilibrio x_0 stabile.

$\alpha > 1$: tre posizioni di equilibrio stabili x_1, x_4 e x_0, e due instabili x_2 e x_3.



2.1.7 Il pendolo su un piano ruotante

Una primitiva in θ della forza assegnata è: $V(\theta) = -Rmg\cos\theta + m\frac{R^2\Omega^2}{2}\cos^2\theta$.

$$V'(\theta) = \sin\theta(Rmg - mR^2\Omega^2\cos\theta) = mR^2\Omega^2(\lambda - \cos\theta).$$

Evidentemente, l'esistenza di alcune posizioni di equilibrio dipende dal fatto che λ sia minore o maggiore di 1. Il parametro λ è adimensionale. Per $\lambda\, ge1$ ci sono solo la posizione di equilibrio stabile $\theta = 0$ e quella instabile $\theta = \pi$. Per $\lambda < 1$, che corrispone al caso di debole gravità, o di grande velocità angolare del piano, compaiono altre due posizioni di equilibrio: $\theta^{\pm} = \pm\arccos\lambda$. Esse sono stabili, mentre $\theta = 0$ è instabile, come si deduce disegnando il grafico di V.

Il dato iniziale $(\theta_0, \dot\theta_0) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ ha energia totale 0. I livelli critici dell'energia sono:

per $\lambda \geq 1$: $E_1 = -mR^2\Omega^2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$ (livello di minimo, $\theta = 0$) e $E_2 = mR^2\Omega^2\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$ (livello di massimo, $\theta = \pi$).

per $\lambda < 1$: E_1 diventa un livello di massimo locale, il livello di minimo è $E_3 = -mR^2\Omega^2\frac{\lambda^2}{2}$, che corrisponde alle due soluzioni stazionarie $\theta^{\pm}$.

Dunqye $E = 0$ è un livello critico solo se coincide con E_1, il che accade se $\lambda \neq \frac{1}{2}$; in tal caso, essendo $0 < E_2$, l'orbita è periodica. Il periodo è:

$$T = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(-V(\theta))}},$$

se $\lambda > \frac{1}{2}$,

$$T = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arccos(2\lambda)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(-V(\theta))}},$$

se $\lambda < \frac{1}{2}$.

La posizione $\theta = \frac{\pi}{2}$ è raggiunta solo se $\lambda > \frac{1}{2}$; il tempoè:

$$t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(-V(\theta))}}.$$

Il valore di $\dot{\theta}$ è dato dalla conservazione dell'energia. Essendo $V(\frac{\pi}{2}) = V(-\frac{\pi}{2})$, $\dot{\theta}$ deve coincidere con il valore iniziale, cioè $\dot{\theta} = 0$.
Sempre per la conservazione dell'energia, $\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2}{mR^2}(-V(\theta))}$, dunque quando $\theta = 0$, $\dot{\theta} = \pm\sqrt{-\frac{2}{mR^2}E_1} = \pm\Omega\sqrt{2\lambda - 1}$.
Il valore del massimo $\dot{\theta}$ è raggiunto quando, lungo l'orbita, $V(\theta)$ è minimo. Se $\lambda \geq 1$ il minimo è raggiunto in $\theta = 0$; se $\lambda < 1$, il minimo è raggiunto in $\theta = \theta^-$.
Il dato iniziale $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (-\frac{\pi}{2}, omega)$ ha energia totale $\frac{1}{2}mR^2\omega^2$; per ω grande, l'orbita è periodica perché la variabile è un angolo. Il moto è la rotazione completa. Il periodo è

$$T = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(\frac{1}{2}mR^2\omega^2 - V(\theta))}},$$

che per ω grande, al primo ordine in $\frac{1}{\omega}$, vale $\frac{2\pi}{\omega}$.
Nelle posizioni di equilibrio $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, l'accelerazione è nulla $\ddot{\theta} = 0$, dunque per ω grande la va come ω in $\theta = 0$ e $-\omega$ in $\theta = \pi$.

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$, il coseno è nullo, e dall'equazione del moto ricavo $mR^2\ddot{\theta} = -Rmg$, cioè $\ddot{\theta} = -\frac{mg}{R}$. Ne segue che la componente verticale della reazione è nulla.

2.1.8

Standard.

2.1.9

Standard.

2.1.10

Standard.

2.1.11

Le orbite sono tutte limitate per $a > 0$. L'origine è stabile se e solo se $a > \frac{1}{2}$.

2.1.12

Il massimo dell'energia potenziale è -1. Il dato iniziale ha energia $-\frac{1}{2}$. Dunque il moto è illimitato, e $\dot{x} > 0$ per tutti i tempi positivi. Il tempo per raggiungere $+\infty$ è dato da

$$T = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2(\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2})}},$$

che è infinito. Quando t va ad infinito, x va ad infinito, e l'accelerazione tende al limite di $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ che è 1. È ragionevole aspettarsi che quando t è grande, il moto sia vicino al moto uniformemente accelerato $\tilde{x} + \tilde{v}t + \frac{t^2}{2}$. In particolare ci si aspetta che $\dot{x}$ sia vicino a $\tilde{v} + t$. Per capire se un tale $\tilde{v}$ esiste è sufficiente calcolare il limite $\lim_{t\to+\infty}(\dot{x} - t)$. Sia $\dot{x}$ che t si possono esprimere in funzione della x:

$$\tilde{v} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2(\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2})} - \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{2(\sqrt{1+z^2} - \frac{1}{2})}}\right).$$

Ora posso scrivere $\dot{x}$ come l'integrale della sua derivata in x:

$$\sqrt{2(\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2})} = 1 + \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{2(\sqrt{1+z^2} - \frac{1}{2})}} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Sostituendo e raccogliendo:

$$\tilde{v} = 1 - \int_0^\infty dz \frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{1+z^2} - \frac{1}{2})}} \frac{1}{z^2 + z\sqrt{1+z^2} + 1},$$

che è finito. Per la determinazione di $\tilde{x}$, dovrò calcolare $\lim_{t\to+\infty}(x(t) - \tilde{v}t - \frac{1}{2}t^2)$. Si può procedere come sopra anche se è piú complicato.

2.1.13

Il moto è periodico per tutti i dati iniziali con energia negativa, non è periodico, ed è illimitato, per i dati iniziali con energia maggiore o uguale a 0. C'è una sola soluzione stazionaria, in $x = 1$.

Per $x_0 = \frac{1}{2}$ e $\dot{x}_0 = 1$ l'energia vale $\frac{1}{2}$. che è positiva. Dunque $x \to \infty$. Il valore asintotico della velocità è $\sqrt{2(\frac{1}{2})} = 1$.

Per $x_0 = \frac{1}{2}$ e $\dot{x}_0 = -1$, il punto si muove verso sinistra diminuendo il valore assoluto della sua velocità. Successivamente inverte la velocità. Dunque il minimo della velocità è -1, quella del dato iniziale. Il massimo è raggiunto in $x = 1$ (che è il minimo dell'energia potenziale), e vale $\sqrt{2(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2})} = \sqrt{2}$.

2.1.14

Non disponibile

2.1.15

Non disponibile

2.1.16

Non disponibile

2.1.17

Non disponibile

2.1.18

Non disponibile

2.1.19

Non disponibile

2.1.20

Non disponibile

2.1.21

Non disponibile

2.1.22

Non disponibile

2.1.23

a) No, solo se il potenziale è armonico.

b) Il limite è $+\infty$, e il moto NON è uniformemente accelerato.

c) nulla

d) Solo nel caso 4 l'origine è stabile. Il pendolo capovolto linearizzato con attrito è il caso 2. Il caso 3 è un oscillatore armonico con attrito a tempo invertito.

e) 1, 2. I casi 5 e 10 possono considerarsi come moti unidimensionale visti in un sistema di riferimento mobile, di velocità costante. L'energia nel sistema solidale si conserva.

2.2 Equazioni lineari

2.3 Moti forzati e smorzati

2.4 Alcuni esercizi chiave

2.4.1 La doppia buca con attrito

Considero nel seguito solo il caso di λ piccolo. Per λ grandi le affermazioni restano vere, ma i grafici cambiano (come cambiano?).

a) L'energia è un integrale primo del moto per il sistema senza attrito. In presenza di attrito $\frac{d}{dt}E = -\lambda\dot{x}^2$. Quindi anche in presenza di attrito E è una funzione di Lyapunov per i punti di minimo dell'energia potenziale x_1 e x_2. Dunque senz'altro queste due posizioni sono stabili. Il teorema di Lyapunov, pur decrescendo l'energia, non permette di concludere immediatamente che x_1 e x_2 sono asintoticamente stabili. Infatti $\frac{d}{dt}E$ è 0 non solo nella posizione di equilibrio ma anche in tutti i punti dello spazio delle fasi in cui $\dot{x} = 0$. Procedo dunque con l'analisi del linearizzato[1]. Riscrivo l'equazione del moto come un sistema (non lineare) del primo ordine.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ x - x^3 - \lambda v \end{pmatrix}.$$

Lo Jacobiano del campo è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Nei punti $x = \pm 1$ vale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix},$$

che ha entrambi gli autovalori con parte reale negativa. Nel punto 0 la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix},$$

che ha traccia negativa e determinante positivo, quindi ha due autovalori reali di segno opposto. In conclusione le posizioni $x_{1,2}$ sono asintoticamente stabili, la posizione $x = 0$ è instabile.

b) L'energia meccanica non è conservata e decresce nel tempo. Dunque esiste $\bar{E} = \lim_{t\to+\infty} E(t)$ ($E(t)$ è limitata dal basso da $-\frac{1}{4}$). Dunque il moto, nel limite t che va a infinito, tende ad avere energia costante. L'idea intuitiva è che il moto deve tendere ad una soluzione di equilibrio, se no l'energia continuerebbe a decrescere invece che tendere al valore $\bar{E}$.

[1] C'è comunque un teorema che assicura l'asintotica stabilità anche nel caso in cui la derivata della funzione di Lyapunov si annulla in altri punti che non siano il punto di equilibrio. È il teorema di Barbasin (vedi il Dell'Antonio [4]) ; l'ipotesi aggiuntiva necessaria è che l'insieme dei punti in cui $\frac{d}{dt}E = 0$ non contenga intere orbite del sistema a parte il punto stazionario. Nel nostro caso questa ipotesi è soddisfatta.

L'analisi rigorosa di questo fatto è un po' astratta: So che l'energia in funzione del tempo ha limite $\bar{E}$, in particolare $E(t)$ è limitata. Ne segue che il moto, nello spazio delle fasi, è limitato.

Sia $(\tilde{x}, \tilde{v})$ un punto di accumulazione per la traiettoria, cioè esista una sequenza crescente di tempi t_k, con $t_k \to +\infty$ per $k \to +\infty$, tale che $\lim_{k\to+\infty}(x(t_k), \dot{x}(t_k) = (\tilde{x}, \tilde{v})$ [2]. Considero adesso, per $\tau > 0$ assegnato, la successione di punti dell'orbita $(x(t_k + \tau),\, \dot{x}(t_k + \tau))$.

L'osservazione importante, a questo punto, è che la mappa che dà la soluzione al tempo τ del sistema differenziale autonomo che stiamo considerando è continua nel dato iniziale.

In altre parole:

$$\lim_{k\to+\infty}(x(t_k + \tau),\, \dot{x}(t_k + \tau)) = (\tilde{x}(\tau),\, \dot{\tilde{x}}(\tau)),$$

che è la soluzione al tempo τ di dato iniziale $(\tilde{x}, \tilde{v})$. Ne segue che $E(t_k + \tau)$ tende a $E(\tilde{x}(\tau),\, \dot{\tilde{x}}(\tau))$. Ma $E(t) \to \bar{E}$ dunque, se $(\tilde{x}, \tilde{v})$ non è un punto di equilibrio

$$\bar{E} = \lim_{k\to+\infty} E(t_k + \tau) = E(\tilde{x}(\tau),\, \dot{\tilde{x}}(\tau)) < E(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \bar{E},$$

che è impossibile. Dunque i punti di accumulazione della traiettoria sono solo le posizioni di equilibrio. Dal fatto che l'energia decresce segue che per ogni traiettoria il punto di accumulazione è unico.

Una dimostrazione più costruttiva è possibile ed istruttiva, anche se più complessa.

Il primo fatto importante è che se ad un certo istante di tempo $\bar{t}$ il punto è in $\bar{x}$ con velocità $\bar{v} > 0$ allora la funzione $t \to x(t)$ è invertibile in un intorno di $\bar{t}$, essendo $\frac{d}{dt}x(\bar{t}) = \bar{v} \neq 0$. Cioè posso pensare il tempo come funzione della posizione, quindi posso pensare l'energia come funzione della posizione:

$$\frac{d}{dx}E = \frac{d}{dt}E\frac{dt}{dx} = -\lambda\dot{x}(t) = -\lambda\sqrt{2(E(x) - V(x))}. \tag{2.2}$$

Questa è una equazione differenziale per $E(x)$, con dato iniziale $E(\bar{x}) = \frac{1}{2}\bar{v}^2 + V(\bar{x})$ nel punto $\bar{x}$. Essendo $\bar{v} \neq 0$ sono nelle condizioni di esistenza e unicità locale delle soluzioni (questo non è vero se $\bar{v} = 0$...). Quindi $E(x)$ è una funzione decrescente in x, e l'equazione vale fino al primo $\tilde{x}$ tale che $E(\tilde{x}) = V(\tilde{x})$ (vedi la figura 1). La domanda

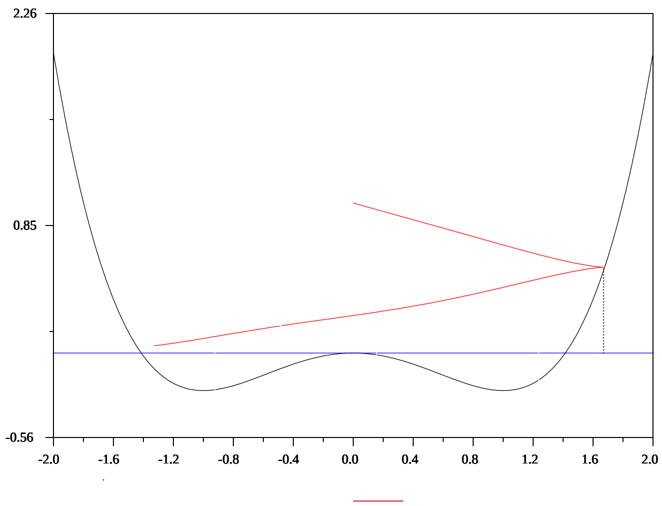


Figura 1: $E(x)$ (in rosso)

importante è se il tempo per arrivare in $\tilde{x}$ è finito o infinito. In tutti gli x tra $\bar{x}$ e $\tilde{x}$ ci arrivo in tempo finito, perchè

[2]L'insieme dei punti di accumulazione per $t \to +\infty$ prende il nome di $\omega-$limite della traiettoria.

la velocità è $\sqrt{2(E(x)-V(x))}$ che è diversa da 0 se $x<\tilde{x}$. D'altra parte, nota $E(x)$, il tempo per arrivare in $\tilde{x}$ è ovviamente

$$\tilde{t}-\bar{t}=\int_{\bar{x}}^{\tilde{x}}\frac{dx}{\sqrt{2(E(x)-V(x))}}. \tag{2.3}$$

Dunque per capire se il tempo è finito devo discutere la sommabilità dell'integrale intorno a $\tilde{x}$. Scrivo l'equazione differenziale per $\delta(x)=E(x)-V(x)$:

$$\frac{d}{dx}\delta(x)=-\lambda\sqrt{2\delta(x)}-V'(x). \tag{2.4}$$

Quando δ è piccolo, e se $\tilde{x}$ non è un punto di equilibrio, x è vicino a $\tilde{x}$, dunque, al primo ordine significativo, l'equazione 2.4 è

$$\frac{d}{dx}\delta(x)=-\lambda\sqrt{2\delta(x)}-c,$$

con $c=V'(\tilde{x})$, cioè meno la forza in $\tilde{x}$. Quest'ultima equazione è esplicitamente risolubile e dà:

$$\frac{\sqrt{2\delta(x)}}{\lambda}-\frac{c}{\lambda}\log\left(1+\frac{\sqrt{2\delta}}{c}\right)=\tilde{x}-x.$$

Sviluppando a δ piccoli si ottiene che $\delta\approx \mathit{const.}\,(\tilde{x}-x)$, dunque l'integrale è sommabile ed il tempo è finito.

Cosa accade dopo il tempo $\tilde{t}$? Sul punto la forza non è nulla, dunque si muoverà verso sinistra e di nuovo l'equazione 2.2 descrive E in funzione di x. Ripetendo il ragionamento, è evidente che il punto di ferma solo quando E uguaglia $V(x)$ in un punto in cui la forza è 0, cioè solo se il punto tende ad una posizione di equilibrio.

c) Nel punto a) ho provato che la soluzione stazionaria x_3 è instabile. Nonostante ciò esistono traiettorie che tendono a x_3. Un modo per convincersi che è così è quello di considerare un caso più semplice, cioè il linearizzato intorno a x_3. L'equazione del moto diventa

$$\ddot{x}=x-\lambda\dot{x},$$

che è un'equazione lineare esplicitamente risolubile. Non è difficile verificare che esiste un autovettore di autovalore negativo per la matrice

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}.$$

I moti che hanno dato iniziale su questo autovettore tendono esponenzialmente a $(0,0)$, cioè sono attratti dall'origine. Tutti gli altri si allontanano esponenzialmente. Questo autovettore prende il nome di *varietà stabile* per il punto di equilibrio (instabile) $(0,0)$. Cosa accade per il sistema non lineare della doppia buca? È ragionevole pensare che la varietà stabile continua ad esistere ma non sarà più una retta. Solo per $(x,\dot{x})$ piccolo si confonderà con la varietà stabile del linearizzato. Nota che anche nel caso senza attrito la varietà stabile esiste. È esattamente la separatrice, cioè la curva con energia 0. Nella figura 2 ho disegnato alcune orbite del sistema senza attrito (in nero), la varietà stabile nel caso senza attrito (la separatrice in blu), e la varietà stabile nel caso con attrito (in rosso).

La dimostrazione rigorosa dell'esistenza della varietà stabile nei casi non lineari è complicata (vedi Dell'Antonio [4]), comunque qui mi limito a far notare che si può provare a trovare la soluzione di 2.4 (che equivale all'equazione 2.2) per serie. Nel caso $\lambda=2^{-\frac{1}{2}}$ (esercizio) si ha:

$$\delta(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{5}x^4+\ldots.$$

Faccio notare che per $\delta=0$ in $x=0$ il termine di destra non verifica le condizioni standard per l'esistenza e unicità delle soluzioni...

d) Assunta per buona la figura 2 è facile capire quali sono i dati iniziali che vengono attratti dalla posizione x_1 e quali quelli attratti dalla posizione x_2. Infatti la varietà stabile divide il piano delle fasi in due regioni distinte, una che contiene il punto x_1, l'altra che contiene il punto x_2.

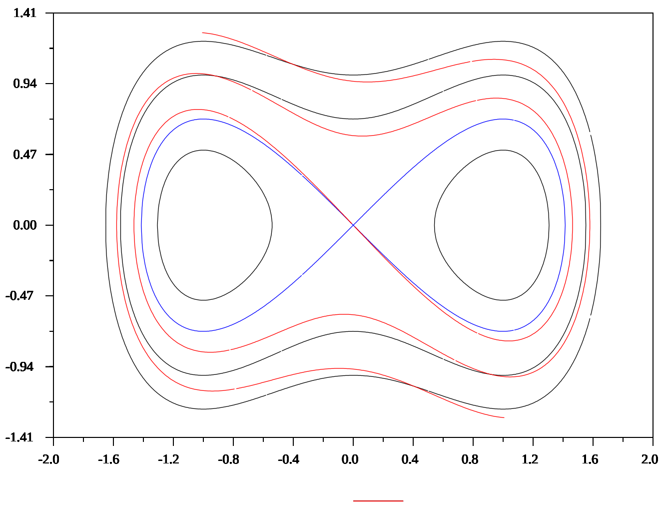


Figura 2: La varietà stabile (in rosso)

La figura 2 si giustifica facilmente considerando che l'energia sulla varietà stabile cresce per $t \to -\infty$. Quindi man mano (con il tempo invertito) essa interseca curve di livello di energia sempre più alta. Inoltre ognuno dei due rami della varietà stabile incontra una curva di livello una ed una sola volta, trasversalmente se $\dot{x} \neq 0$, tangente se $\dot{x} = 0$.

Una ulteriore domanda che ci si può porre, è di quanto aumenta l'energia ogni volta che il punto passa per la posizione $x = 0$, mandando il tempo a $-\infty$. Tornando alla figura 1, e indicando con E_1 il valore dell'energia nel punto $\tilde{x}$ dove il moto inverte la velocità:

$$E(0) - E_1 = \lambda \int_0^{\tilde{x}} \sqrt{2(E(x) - V(x))}.$$

Ora per $0 < x < \tilde{x}$, $E(x) \geq E(\tilde{x})$ quindi

$$E(0) - E_1 \geq \lambda \int_0^{\tilde{x}} \sqrt{2(E_1 - V(x))},$$

che, se E_1 è molto grande, dà l'andamento

$$E(0) - E_1 \geq const.\, E_1^{\frac{1}{2}} \tilde{x}.$$

Ma se E_1 è grande $\tilde{x} > const\, E_1^{\frac{1}{4}}$. In definitiva $E(0) - E_1 \geq const.\, E_1^{\frac{3}{4}}$. Il che significa che man mano che mi allontano da $(0,0)$ la distanza tra i passaggi della varietà stabile per l'asse $\dot{x}$ cresce.

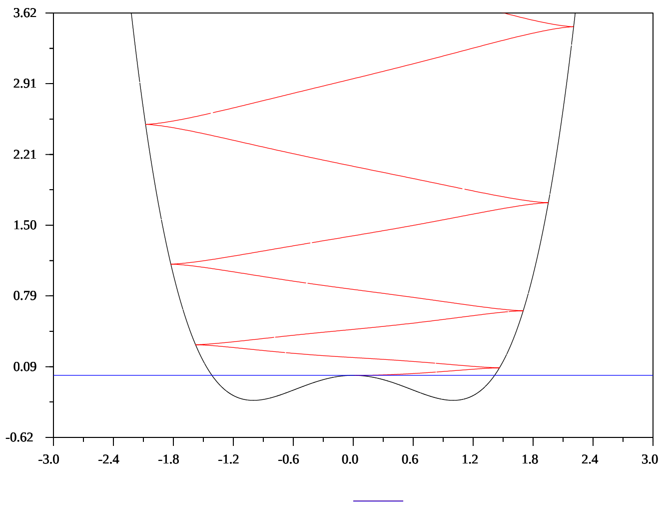
Nella figura 2.4.1 ho disegnato la curva $(x, E(x))$ per il ramo della varietà stabile che arriva nell'origine con velocità negativa. A quale posizione di equilibrio tende il moto che parte con velocità positiva, energia E e posizione iniziale nulla?

3 Alcuni compiti d'esame

3.0.1 L,S,PO: Compito di Meccanica, febbraio '97

Un'asta omogenea di estremi A e B, massa M, e lunghezza l, é vincolata a muoversi su di un piano verticale π. Il suo estremo A è vincolato a muoversi su di una retta orizzontale $r \subset \pi$. Inoltre, π ruota con velocità angolare costante ω intorno all'asse verticale s, ortogonale a r nel punto fisso O.

Il punto A dell'asta è richiamato dal punto O da una molla ideale di costante elastica k.



Si introducano le coordinate lagrangiane $\rho =$ distanza di A da O, e $\theta =$ angolo tra la direzione dell'asta e la direzione dell'asse s.

1) Si scriva la Lagrangiana, e, considerando trascurabili gli effetti gravitazionali, e si determinino, conseguentemente, eventuali quantità conservate.

Sempre nell'approssimazione di cui al punto 1:

2) si determinino le soluzioni di equilibrio, al variare del parametro $h = \frac{k}{M\omega^2}$;

3) si discuta la stabilità delle soluzioni di equilibrio al variare di h;

4) nel caso $h > 1$ si calcolino le frequenze e i modi normali delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabile.

Soluzione nella sezione 4.0.1

3.0.2 L,S,PO: Primo compito di esonero, a.a. 93-94.

Nel piano verticale, si fissi un sistema di riferimento inerziale $(0, x, y)$, con asse y orientato lungo la retta verticale ascendente. Attorno al punto fisso O é libera di ruotare un'asta illimitata (senza peso). Sia s la coordinata sull'asta, scelta positiva alla destra di O, e sia θ l'angolo (contato in vero antiorario) che l'asta forma con l'asse x. Sull'asta, in $s = a, a > 0$, é fissato un punto P_1 di massa m_1. Inoltre, sull'asta, è libero di scorrere un secondo punto materiale P_2, di massa m_2. P_2 è richiamato da P_1, con una forza elastica $F = -k(P_2 - P_1), k > 0$.

Prima domanda. Si scriva la lagrangiana del sistema.

Seconda domanda. Detto $\alpha = ak\frac{(m_1+m_2)}{gm_2^2}$, discutere, al variare di questo parametro, le soluzioni stazionarie del sistema Lagrangiano, determinandone, per $\alpha \neq 1$, le relative proprietà di stabilità.

Terza domanda. Si determinino le frequenze delle "piccole oscillazioni" attorno alle posizioni di equilibrio stabili.

Quarta domanda. Si consideri ora il seguente problema: l'asta gira con frequenza angolare costante ω attorno ad O. Si discuta il corrispondente problema ad un grado di libertà .

Soluzione nella sezione 4.0.2

3.0.3 CR,L,S Compito di Meccanica Razionale, 6/6/'96, I^o appello, sess. estiva.

Una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio R e massa M_1 ruota con velocità angolare costante ω in un piano verticale, intorno al suo centro O. Sul suo bordo interno rotola senza strisciare un disco $\mathcal{D}$ di raggio $r < R$ e massa M. Il centro G di tale disco é richiamato da una molla elastica di costante $k > 0$, da un punto materiale Q di massa m, libero di scorrere sull'asse verticale passante per O.

Indica con $\psi = \omega t$ e ϕ gli angoli di rotazione propria di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ rispettivamente, con θ l'angolo che OG forma con la direzione postitiva dell'asse orizzontale, e con y la quota del punto Q rispetto a O:

1) scrivi la condizione di puro rotolamento in termini di $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, e dimostra che è un vincolo olonomo;

2) scrivi la Lagrangiana del sistema nelle variabili lagrangiane θ, y;

3) determina le soluzioni stazionare del relativo sistema di Lagrange, al variare del parametro adimensionale $\lambda = \frac{(M+m)g}{(R-r)k}$;

4) discuti la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare di λ;

5) determina le condizioni iniziali sul moto del baricentro G del disco $\mathcal{D}$ a cui corrispondono solo moti armonici del punto Q.

Soluzione nella sezione 4.0.3

3.0.4 CR,L,S Compito di Meccanica Razionale, sess. estiva (Pulvirenti)

Si consideri un sistema di riferimento piano inerziale di origine O e assi (x, y), l'asse y essendo scelto allineato con la verticale ascendente. Un disco omogeneo, di raggio R, centro G, e massa totale M, rotola senza strisciare (cioé puro rotolamento) lungo l'asse y. Lungo un diametro del disco - di estremi A, B- è libero di scorrere senza attrito un punto materiale di massa m. Tale punto è inoltre richiamato dal centro del disco tramite una molla ideale di costante elastica k $(k > 0)$. Nell'istante iniziale il centro del disco si trova sull'asse x, il diametro A, B è collineare all'asse x e $x_A < x_G < x_B$.

Si consideri un sistema solidale (ξ, η) di assi incentrati in G, l'asse ξ orientato come AB. Si assumano come parametri Lagrangiani l'angolo ϕ (contato in senso antiorario) che l'asse solidale ξ forma con l'asse delle x e l'ascissa ξ del punto P.

1^a **domanda.** Si scriva la Lagrangiana del sistema.
2^a **domanda.** Si determinino le eventuali configurazioni di equilibrio.
3^a **domanda.** Si discuta la stabilità delle soluzioni di equilibrio determinate al punto 2.
4^a **domanda.** Si consideri ora un diverso problema, e cioé si consideri il punto P **fissato** nel centro. Descrivere il moto del sistema.

Soluzione nella sezione 4.0.4

3.0.5 CR,L,S Compito sessione estiva a.a. 93-94

In un piano orizzontale sono poste due aste A_1B_1 e A_2B_2 di rispettive masse M_1 ed M_2 (distribuzione di massa omogenea) e lunghezze L_1 ed L_2. Le aste sono libere di ruotare attorno ai rispettivi baricentri G_1 e G_2, fissi nel piano, con $|G_1G_2| = l > 0$.

Sia P un punto appartenente all'asta A_1B_1, giacente tra G_1 e A_1, Q un punto appartenente all'asta A_2B_2, giacente tra G_2 e A_2, $|G_1P| = |G_2Q| = r > 0$. Tra i punti P e Q agisce una molla ideale, di costante elastica $k > 0$. Si richiede:

1) scrivere la Lagrangiana del sistema;

2) determinare gli equilibri;

3) discutere la stabilità degli equilibri al variare del parametro $\alpha = \frac{l}{2r}$ in $\mathbb{R}_+ - \{1\}$;

4) considerato il sistema corrispondente a $l = 0$, si discuta il corrispondente sistema lagrangiano, mostrando che è riconducibile ad un sistema ad un grado di libertà.

Soluzione nella sezione 4.0.5

3.0.6 CR,L,S,PO: Compito di Meccanica Razionale del 6.10.94

In un piano verticale si adotta un sistema di riferimento inerziale (O, x, y), con O fisso, asse y orientato lungo la verticale ascendente. Sull'asse y è libero di scorrere senza attrito il punto P di massa m. Un'asta di estremi A, B, massa M, lunghezza $2L$ è libera di ruotare, senza attrito, attorno al suo punto medio, fissato in O. Il punto estremo A (risp. B) è richiamato dal punto P, tramite una molla elastica ideale, di costante k_1 (risp. k_2). Si assuma $a = k_1 - k_2 > 0$.

(I). Si scriva la Lagrangiana del sistema e si determinino le configurazioni di equilibrio al variare del parametro $\alpha := \frac{mg}{aL} \in (0, \infty)$.

(II). Si discuta la stabilità degli equilibri al variare del parametro α in $\mathbb{R}^+ - \{1\}$.

(III). Si studi il sistema Lagrangiano ottenuto per linearizzazione attorno alla posizione di equilibrio che è stabile per ogni α, nell'intervallo predetto.

(IV). Si assuma **ora** $a = 0$. Si determinino i moti del corrispondente sistema lagrangiano.

Soluzione nella sezione 4.0.6

3.0.7 CR,L,S,PO Compito del 20.6.94 (Marchioro)

Una sbarra rigida omogena pesante OH di lunghezza L e massa M è posta in un piano verticale ed è libera di ruotare senza attrito attorno al suo estremo O. Per l'altro estremo H passa una guida di massa trascurabile ortogonale alla sbarra. Lungo tale guida si muove senza attrito un punto materiale pesante P di massa m. Esso è soggetto oltre al peso ad una forza elastica $F = -kOP$, $k > 0$.

Scegliamo come variabili lagrangiane l'angolo θ che la sbarra forma con la verticale discendente e l'ascissa x del punto P lungo la guida.

1) Scrivere le equazioni del moto del sistema.

2) Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilità.

3) Studiare le piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

Soluzione nella sezione 4.0.7

3.0.8 CR,L,S,PO: Compito del 11.7.94 (Marchioro)

In un piano orizzontale si muovono due sbarrette omogenee di lunghezza L e massa M di estremi rispettivamente A, B, e B, C, incernierate tra loro in B ma libere di ruotare senza attrito. Gli estremi A e C sono obbligati a scorrere senza attrito lungo un asse fisso x. Su A agisce una forza $F_1 = -kH_1A$, su C una forza $F_2 = -kH_2C$ ($k > 0$), ove H_1 e H_2 sono punti dell'asse x di ascisse rispettivamente $-\frac{L}{2}$ e $\frac{L}{2}$. Scegliamo come variabili lagrangiane l'ascissa di B x_B, e l'angolo θ che AB forma con l'asse x.

1) Trovare le equazioni del moto.

2) Trovare le posizioni di equilibirio e discuterne la stabilità.

3) Scrivere le piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Trovare se esistono condizioni iniziali per cui il moto sia armonico con frequenza ω non solo per piccole oscillazioni ma anche per oscillazioni finite.

Soluzione nella sezione 4.0.8

3.0.9 CR,L,S,PO Esonero di Meccanica Razionale del 14-5-90

Un disco omogeneo pesante di massa M e raggio R è vincolato in un piano verticale a rotolare senza strisciare su una guida orizzontale Oy. Un punto materiale di massa m è vincolato senza attrito al suo bordo. Sul centro Ω del disco agisce la forza $-kO\Omega$ ($k \geq 0$).

1) Determinare gli equilibri e la loro stabilità, (per $k > 0$).

2) Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange studiando, per $k > 0$, le piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile. Si calcolino le frequenze proprie e i modi normali.

3) Per $k = 0$ si determinino 2 integrali primi del moto.

4) (facoltativo) Per $k = 0$ determinare i moti tali che la quota del punto materiale rimanga costante nel tempo.

Soluzione nella sezione 4.0.9

3.0.10 CR,LS,PO Esonero di Meccanica Razionale del 14-5-90

Un disco omogeneo pesante di massa M e raggio R è vincolato in un piano verticale a rotolare senza strisciare su una guida orizzontale Oy. Un punto materiale di massa m è vincolato senza attrito al suo bordo. Sul centro Ω del disco agisce la forza $-kO\Omega$ ($k \geq 0$).

1) Determinare gli equilibri e la loro stabilità, (per $k > 0$).

2) Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange studiando, per $k > 0$, le piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile. Si calcolino le frequenze proprie e i modi normali.
3) Per $k = 0$ si determinino 2 integrali primi del moto.
4) (facoltativo) Per $k = 0$ determinare i moti tali che la quota del punto materiale rimanga costante nel tempo.

Soluzione nella sezione 4.0.10

3.0.11 L,RU Compito di Meccanica del 23.2.1995

Un punto materiale pesante è vincolato senza attrito alla superficie di rotazione d'asse verticale z, descritta in coordinate cilindriche dall'equazione $\rho^2 = (1 + a\cos z)$, con $0 < z < 2\pi$, a costante positiva minore di 1.

a) Dimostra che il corrispondente sistema lagrangiano è integrabile.

b) Dimostra che esistono condizioni iniziali tali che il punto si muova mantenendo la quota costante. Descrivi tali moti.

Soluzione nella sezione 4.0.11

3.0.12 L,RU,N: Primo compito di esonero, a.a.94-95.

Si consideri la funzione Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + {q_1}^2 + {q_2}^2 - ({q_1}^2 + {q_2}^2)^3. \tag{3.1}$$

1) Sfruttando la simmetria della Lagrangiana dimostrare che esiste un integrale primo del corrispondente sistema di Lagrange, distinto dall'integrale primo dell'energia. Detto I tale integrale primo, si consideri il sistema di Lagrange ristretto sui livelli $I = c, c \in R \setminus \{0\}$. Si dimostri che tale restrizione è ancora un sistema Lagrangiano, ad un grado di libertà, e si scriva la corrispondente Lagrangiana $L^{(c)}$. Si studino quindi le orbite al variare di c.
2) Si considerino per il sistema di Lagrangiana L le condizioni iniziali:

$$\begin{array}{c} \alpha q_1(0) + \beta q_2(0) = 0 \\ \alpha \dot{q}_1(0) + \beta \dot{q}_2(0) = 0 \end{array} \tag{3.2}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2, \beta \neq 0$.

Si studino i corrispondenti moti, individuando in particolare, se esistono, moti a meta asintotica.

Soluzione nella sezione 4.0.12

3.0.13 CR,L,RU: Compito di Meccanica Razionale del 26.2.96

Un disco rigido di massa M e raggio R è libero di scorrere senza attrito su di un piano orizzontale fisso. Sul bordo del disco puó scorrere, ancora senza attrito, un punto materiale di massa m.

Si richiede di determinare il moto del sistema.

Soluzione nella sezione 4.0.13

3.0.14 CR,L,S,RU Compito sessione estiva a.a. 93-94

In un piano orizzontale sono poste due aste A_1B_1 e A_2B_2 di rispettive masse M_1 ed M_2 (distribuzione di massa omogenea) e lunghezze L_1 ed L_2. Le aste sono libere di ruotare attorno ai rispettivi baricentri G_1 e G_2, fissi nel piano, con $|G_1G_2| = l > 0$.

Sia P un punto appartenente all'asta A_1B_1, giacente tra G_1 e A_1, Q un punto appartenente all'asta A_2B_2, giacente tra G_2 e A_2, $|G_1P| = |G_2Q| = r > 0$. Tra i punti P e Q agisce una molla ideale, di costante elastica $k > 0$. Si richiede:

1) scrivere la Lagrangiana del sistema;

2) determinare gli equilibri;

3) discutere la stabilità degli equilibri al variare del parametro $\alpha = \frac{l}{2r}$ in $\mathbb{R}_+ - \{1\}$;

4) considerato il sistema corrispondente a $l = 0$, si discuta il corrispondente sistema lagrangiano, mostrando che è riconducibile ad un sistema ad un grado di libertà.

Soluzione nella sezione 4.0.14

3.0.15 L,S,H Secondo appello Meccanica Razionale a.a. 93-94.

Si consideri in un piano orizzontale un punto materiale P, di massa m. Il punto è richiamato, tramite una molla ideale di costante elastica k_1, $(k_1 > 0)$, dal punto fisso O. Inoltre, a distanza l da O é posto il centro di un cerchio, di raggio R. Il cerchio è fisso. Sul cerchio è libero di scorrere senza attrito un punto materiale Q di massa M. I punti P e Q interagiscono tramite una molla ideale di costante elastica k_2, $(k_2 > 0)$.

I^o. Si scriva la Lagrangiana del sistema e si determinino le soluzioni stazionarie del corrispondente sistema di Lagrange.

II^o. Si discuta la stabilità delle soluzioni di equilibrio trovate al punto I^o, determinando le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

III^o. Si consideri il caso: $l = 0$. Si dimostri che il sistema Lagrangiano ha un integrale primo indipendente dall'energia. Si scriva la funzione di Hamilton del sistema corrispondente al valore nullo di detto integrale primo, usando come coordinata spaziale indipendente la differenza delle anomalie angolari di P e di Q.

IV^o. Si consideri il caso limite in cui $m|OP|^2$ è trascurabile rispetto a MR^2; si valuti quindi in questa approssimazione la funzione di Hamilton a partire da quella determinata nel punto precedente, e si dimostri che il corrispondente sistema Hamiltoniano è integrabile.

Soluzione nella sezione 4.0.15

3.0.16 L,S,N

Si consideri un punto materiale di massa m soggetto ad un campo di forze di energia potenziale $V(x, y, z)$ soddisfacente il seguente requisito: il potenziale è invariante rispetto al gruppo di diffeomorfismi:

$$h_\tau(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau & 0 \\ \sin\tau & \cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha\tau \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Prima domanda. Si trovi l'integrale primo corrispondente alla simmetria dell'energia potenziale e si determini un sistema di coordinate adattato (r, θ, z).

Seconda domanda. Usando la simmetria del sistema si riduca di uno il numero dei gradi di libertà, considerando quindi una opportuna Lagrangiana ridotta. Determinare gli equilibri di tale Lagrangiana ridotta e darne una interpretazione in termini delle coordinate (r, θ, z).

Terza domanda. Si studi la stabilità degli equilibri nel caso particolare:

$$V(r, \theta, z) = \frac{1}{r^2(\cos^2(\alpha\theta - z) - \sin^2(\alpha\theta - z))}. \tag{3.4}$$

Soluzione nella sezione 4.0.16

3.0.17 L,RU,H,HJ,AA Compito di Meccanica Razionale, 9/7/'96, II^o appello, sess. estiva

Un punto materiale di massa unitaria è vincolato a muoversi sulla superficie di rotazione di equazione $z = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho}$, dove $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Sul punto agisce una forza costante, di intesità unitaria, diretta verso la direzione negativa dell'asse z.

1) Scrivi la Lagrangiana e l'Hamiltoniana del sistema.

2) Determina gli integrali primi del moto.

3) Determina le condizioni sui dati iniziali per cui il moto esiste per tutti i tempi, per cui si hanno orbite limitate, per cui si hanno orbite illimitate.

4) Considera un'orbita illimitata. È finito l'angolo $\lim_{t\to+\infty}\theta(t) - \lim_{t\to-\infty}\theta(t)$? ($\theta(t)$ è l'angolo che la congiungente tra il punto materiale e l'asse delle z forma con un asse orizzontale fisso).

5) Risolvi il moto per quadrature mediante la soluzione dell'equazione di Hamilton -Jacobi.

6) Determina la regione dello spazio delle fasi in cui il moto si puó descrivere in variabili azione-angolo e determina le variabili d'azione.

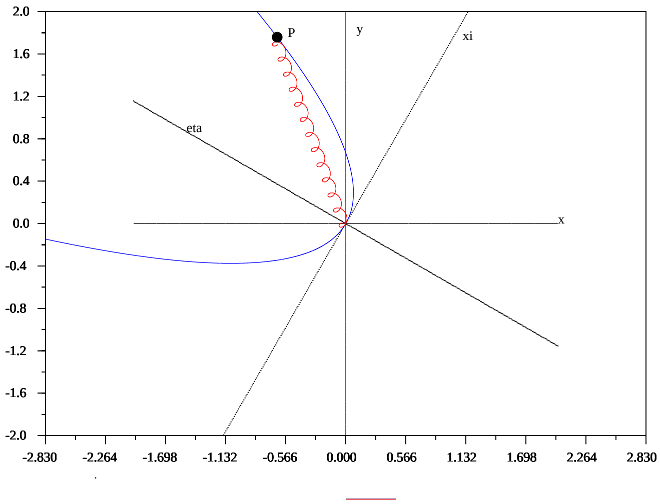
Soluzione nella sezione 4.0.18

3.0.18 CR,L,RU,H,HJ Compito di Meccanica Razionale, 24/9/'96, I^o appello, sess. autunnale

Si consideri, in un piano fisso orizzontale, una guida $\mathcal{G}$, liscia, a forma di arco di parabola, libera di ruotare senza attrito attorno al suo vertice O, fissato sul piano. Sia I il suo momento di inerzia rispetto ad O. In un sistema di coordinate cartesiane $(O,\ \xi,\ \eta)$, solidale con la guida, essa è rappresentata dall'equazione $\eta = a\xi^2$, $a > 0$, $|\xi| \le r$, $r > 0$.

Un punto materiale P di massa m, è libero di scorrere senza attrito sulla guida $\mathcal{G}$. Il punto P é richiamato da O per il tramite di una molla elastica di costante $k > 0$.

Si denoti con θ l'angolo che la direzione tangente in O alla guida forma con una direzione fissa del piano (vedi figura). **1)** Si scriva la Lagrangiana del sistema, riconoscendone le eventuali simmetrie ed i conseguenti integrali



primi.

2) Dopo aver riconosciuto l'esistenza di un integrale primo J (ulteriore rispetto all'energia), si analizzino i moti del sistema unidimensionale che si ottiene fissando il valore di J.

3) Si determinino delle condizioni sui dati iniziali per cui il moto del sistema composto dalla guida e dal punto materiale sia periodico.

4) Si scriva l' Hamiltoniana e si discuta l'equazione di Hamilton-Jacobi, con il metodo di separazione delle variabili.

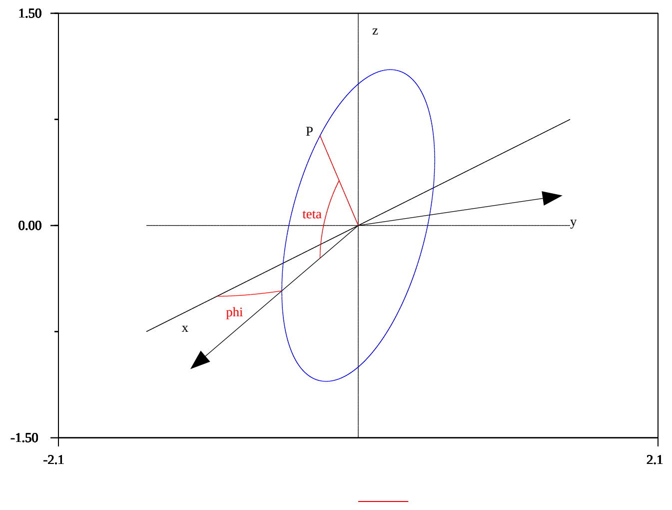
Soluzione nella sezione 4.0.18

3.0.19 CR,L,RU,H,HJ,AA Compito di Meccanica Razionale, 8/10/'96, II^o appello, sess. autunnale

Considera una terna di riferimento inerziale $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Un disco rigido di massa M e raggio R, e' vincolato ad avere il centro in O. L'asse $\mathbf{u}$, passante per O ed ortogonale al disco, è vincolato a muoversi sul piano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, ed inoltre il disco è libero di ruotare intorno a tale asse $\mathbf{u}$.

Sul bordo del disco è fissato un punto materiale P di massa m, che è richiamato dall'asse $\mathbf{z}$ da una molla di costante elastica k.

Considera il sistema in assenza della forza di gravità.



1) Individua i gradi di libertà del sistema e scrivi la Lagrangiana e l'Hamiltoniana.

2) Determina simmetrie ed integrali primi, e riduci lo studio del moto del sistema ad un problema ad un grado di libertà.

3) Studia qualitativamente il moto unidimensionale che hai ottenuto, ed in particolare analizza la stabilità delle soluzioni stazionarie, al variare dei parametri.

4) Risolvi il problema con il metodo di Hamilton-Jacobi e determina la regione dello spazio delle fasi nella quale il moto puó essere descritto in variabili azione-angolo.

Soluzione nella sezione 4.0.19

3.0.20 TC: Compito di Meccanica del 23.2.1995

Si consideri la trasformazione $S_\beta : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} Q &= -\arctan\left(\frac{2P}{q}\right) \\ P &= \beta q^2 + p^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

a) Determinare i valori di β per cui S_β é canonica;

b) scrivere per tali valori l'espressione esplicita di S_β^{-1}.

Soluzione nella sezione 4.0.20

3.0.21 TC

Si consideri la trasformazione $S_\beta : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Q &= -\arctan\left(\frac{2P}{q}\right) \\ P &= \beta q^2 + p^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

a) Determinare i valori di β per cui S_β é canonica;

b) scrivere per tali valori l'espressione esplicita di S_β^{-1}.

Soluzione nella sezione 4.0.21

3.0.22 TC,AA,P Secondo compito di esonero a.a.94.

Si consideri la funzione

$$H = \frac{1}{2}\{(p_1 - f(q_1))^2 + p_2^2\} + g(q_1, q_2). \tag{3.7}$$

Si dimostri che la trasformazione:

$$\begin{array}{l} p_1 - f(q_1) = P_1 \\ q_1 = Q_1 \\ p_2 = P_2 \\ q_2 = Q_2 \end{array} \tag{3.8}$$

é canonica.

(2). Si consideri quindi la seguente Hamiltoniana:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\{P_1^2 + P_2^2\} + g(Q_1, Q_2). \tag{3.9}$$

dove

$$g(Q_1, Q_2) = \frac{1}{2}(Q_1^2 + \omega^2 Q_2^2) + \varepsilon Q_1^2 Q_2. \tag{3.10}$$

Si dimostri che è possibile introdurre variabili azione-angolo, in modo che in queste nuove variabili l'Hamiltoniana assuma la forma:

$$\tilde{H}(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2) = I_1 + \omega I_2 + \varepsilon a I_1 (I_2)^{\frac{1}{2}} sen^2\phi_1 sen\phi_2, \tag{3.11}$$

per un opportuno valore della costante a.

(3). Si determinino le condizioni su ω, talché con un cambiamento di variabili simplettico $(I, \phi) \to (J, \psi)$, la Hamiltoniana prenda la forma:

$$H(J, \psi) = J_1 + \omega J_2 + O(\varepsilon^2). \tag{3.12}$$

Soluzione nella sezione 4.0.22

3.0.23 H,HJ,AA,S: II esonero 10/5/'96

Considera l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}P_y^2(1 + x^2) + \frac{1}{2}(1 + x^2)y^2. \tag{3.13}$$

a) Risolvi, per separazione di variabili, l'equazione di Hamilton Jacobi per H.

b) Determina la regione dello spazio delle fasi in cui il moto puó essere descritto in variabili azione-angolo.

c) Calcola esplicitamente l'espressione dell'Hamiltoniana in termini delle variabili d'azione, e le frequenze dei moti multiperiodici.

d) Considera il moto di dato iniziale

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0 & y(0) = 0 \\ P_x(0) = a & P_y(0) = 1, \end{array} \tag{3.14}$$

con $a \in \mathbb{R}$; trova i valori di a per cui è periodico.

e) Trova il periodo del moto per $a = 1$.

f) Discuti la stabilità della soluzione stazionaria

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0 & y(0) = 0 \\ P_x(0) = 0 & P_y(0) = 0. \end{array} \tag{3.15}$$

Soluzione nella sezione 4.0.23

3.0.24 CR,H,HJ,P: Esonero di Meccanica Razionale del 6-6-90

Un'asta omogenea di massa M lunga L ha un estremo fisso in 0. L'altro estremo è vincolato senza attrito su una circonferenza di raggio $L/2$ che giace su un piano orizzontale e il cui centro è sulla verticale sotto 0. Un punto materiale pesante P di massa m è vincolato senza attriti alla retta contenente l'asta ed è anche soggetto alla forza elastica $-k0P$, $k > 0$.
1) Scrivere l'hamiltoniana del sistema e individuare due integrali primi del moto.
2) Scrivere le equazioni di Hamilton-Jacobi e portarne alle quadrature la soluzione.
3) Integrare le equazioni di Hamilton-Jacobi all'ordine zero in m/M e dare un'interpretazione fisica del risultato.
4) (facoltativo) Valutare la correzione al primo ordine in m/M, relativamente al punto 3).

Soluzione nella sezione 4.0.24

4 Soluzioni di alcuni compiti di esame

4.0.1 L,S,PO: Compito di Meccanica, febbraio '97

4.0.2 L,S,PO: Primo compito di esonero, a.a. 93-94.

La lagrangiana del sistema è:

$$L(s,\dot{s},\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\{m_1a^2\dot{\theta}^2 + m_2(s^2\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2)\} - g\{m_1a + m_2s\}\sin\theta - \frac{k}{2}(s-a)^2. \tag{4.1}$$

Le soluzioni di equilibrio sono assegnate dagli zeri del sistema:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial s} = -m_2ga\sin\theta + k(s-a) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = -g(m_1a + m_2s)\cos\theta = 0. \end{array} \tag{4.2}$$

Esse sono dunque:

$$\begin{array}{l} (\theta_1, s_1,) = \left(\frac{1}{2}\pi, -\frac{gm_2a}{k} + a\right), \\ (\theta_2, s_2) = \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{gm_2a}{k} + a\right), \\ (\theta_3, s_3) = \left(\pi + \arcsin\alpha, -\frac{am_1}{m_2}\right), \\ (\theta_4, s_4) = \left(-\arcsin\alpha, -\frac{am_1}{m_2}\right), \end{array} \tag{4.3}$$

ricordando che $\alpha = k\frac{m_1+m_2}{gm_2^2}$. Ovviamente, le ultime due soluzioni esistono *solo* quando $\alpha \leq 1$.

Per studiare la stabilità delle soluzioni studiamo la matrice Hessiana di U. Ad essa è associata la forma quadratica:

$$H(s,\theta)(u,v) = -ku^2 - 2m_2g\cos\theta uv - g(m_1a + m_2s)v^2. \tag{4.4}$$

Calcoliamola nelle varie posizioni di equilibrio.

Si ha:

$$\begin{array}{l} H(s_1,\theta_1)(u,v) = -ku^2 - \frac{g^2m_2^2a(\alpha-1)}{k}v^2, \\ H(s_2,\theta_2)(u,v) = -ku^2 - \frac{g^2m_2^2a(\alpha+2)}{k}v^2, \\ H(s_3,\theta_3)(u,v) = -ku^2 - 2m_2g\cos\theta_3\, uv, \\ H(s_4,\theta_4)(u,v) = -ku^2 - 2m_2g\cos\theta_4\, uv. \end{array} \tag{4.5}$$

Dunque finché $\alpha - 1 > 0$ (rispettivamente < 0), la posizione (s_1, θ_1) è instabile (risp. stabile). La posizione $(s_2\theta_2)$ è sempre stabile. Quando esistono, cioé per $\alpha - 1 < 0$, le posizioni $(s_3, \theta_3), (s_4, \theta_4)$ sono instabili.
Osservazione: si osservi la conservazione del numero delle posizioni di equilibro stabile, al variare di α.

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono determinate dagli autovalori immaginari di μ diag$\{m_2, m_1a^2 + m_2s_i^2\} - H(s_i, \theta_i)$, dove si sono denotati con (s_i, θ_i) gli equilibri stabili. Si determinino quindi tali autovalori.

Passiamo alla quarta domanda. Il sistema di Lagrange è:

$$\ddot{s} = \left(\omega^2 - \frac{k}{m_2}\right) s + \left(\frac{ka}{m_2} - g \sin \omega t\right). \tag{4.6}$$

Si tatta di un' equazione lineare con termine forzante dipendente dal tempo. Possiamo riscriverla come un sistema del primo ordine. Introduciamo le matrici:

$$u = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} O & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

dove $\lambda = \omega^2 - \frac{k}{m_2}$, $f(t) = \left(\frac{ka}{m_2} - g \sin \omega t\right)$. Si ha la seguente formula risolutiva:

$$u(t) = e^{At} \left(u_0 + \int_0^t e^{-As} F(s)\, ds\right). \tag{4.8}$$

Per quanto riguarda la matrice e^{At} si ha:
i)

$$\lambda > 0 : e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\sqrt{\lambda}t}}{\sqrt{\lambda}} & -\frac{e^{-\sqrt{\lambda}t}}{\sqrt{\lambda}} \\ e^{\sqrt{\lambda}t} & e^{-\sqrt{\lambda}t} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

ii)

$$\lambda < 0 : e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\sqrt{|\lambda|}t}{\sqrt{|\lambda|}} & -\frac{\sin\sqrt{|\lambda|}t}{\sqrt{|\lambda|}} \\ \sin\sqrt{|\lambda|}t & \cos\sqrt{|\lambda|}t \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Il lettore completi i calcoli.

4.0.3 CR,L,S Compito di Meccanica Razionale, 6/6/'96, I^o appello, sess. estiva.

1)

$$OG = (R-r)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad v_G = (R-r)\dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

La condizione di puro rotolamento è:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times R \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \times r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + (R-r)\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

cioé: $R\dot{\psi} = r\dot{\phi} + (R-r)\dot{\theta}$, che è integrabile: $R\omega t = r\phi + (R-r)\theta + const.$.
2) Vale: $\dot{\phi} = \frac{R}{r}\omega - \frac{R-r}{r}\dot{\theta}$.
Energia della circonferenza: $T_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}M_1\omega^2$.
Energia cinetica del disco: $T_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}(R-r)^2 M\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}Mr^2\left(\frac{R}{r}\omega - \frac{R-r}{r}\dot{\theta}\right)^2$.
Energia potenziale: $\frac{1}{2}k\left(y^2 + (R-r)^2 - 2y(R-r)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) + Mg(R-r)\sin\theta + mgy$.
A meno di derivate totali rispetto al tempo, la lagrangiana é:

$$L = \frac{3}{4}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\left(y^2 - 2y(R-r)\sin\theta\right) - Mg(R-r)\sin\theta - mgy. \tag{4.13}$$

3) Equilibri:

$$\begin{aligned} \partial_y V &= ky - k(R-r)\sin\theta + mg = 0 \\ \partial_\theta V &= (Mg - ky)(R-r)\cos\theta = 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

da cui si ricava: $\cos\theta = 0$, oppure $y = \frac{Mg}{k}$. Quindi le soluzioni stazionarie sono: $(\pm\frac{\pi}{2}, \pm(R-r) - \frac{mg}{k})$ e, indicato $\lambda = \frac{(M+m)g}{(R-r)k}$, se $\lambda < 1$: $(\arcsin\lambda, \frac{Mg}{k})$, $(\pi - \arcsin\lambda, \frac{Mg}{k})$.
4) Stabilità: l'hessiano dell'energia potenziale è

$$H = \begin{pmatrix} k & -k(R-r)\cos\theta \\ -k(R-r)\cos\theta & -(R-r)(Mg-ky)\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Per $(\theta, y) = (\frac{\pi}{2}, (R-r) - \frac{mg}{k})$:

$$H = \begin{pmatrix} k & O \\ O & -k(R-r)^2(\lambda - 1) \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

dunque è stabile se $\lambda < 1$, instabile se $\lambda > 1$.
Per $(\theta, y) = (-\frac{\pi}{2}, -(R-r) - \frac{mg}{k})$:

$$H = \begin{pmatrix} k & O \\ O & k(R-r)^2(\lambda + 1) \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

dunque è stabile per tutti i valori di λ.
Per $\lambda < 1$, $y = \frac{Mg}{k}$:

$$H = \begin{pmatrix} k & -k(R-r)\cos\theta \\ -k(R-r)\cos\theta & 0 \end{pmatrix}; \tag{4.18}$$

$\det H = -k^2(R-r)^2\cos^2\theta < 0$, dunque sono entrambe instabili.
Per $\lambda = 1$: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{Mg}{k}\right) \equiv \left(\frac{\pi}{2}, (R-r) - \frac{mg}{k}\right)$ che è instabile, altrimenti l'energia potenziale avrebbe due minimi stretti come unici punti critici.
4) Le Equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}M(R-r)\ddot{\theta} = -(Mg - ky)\cos\theta \\ m\ddot{y} = -ky + k(R-r)\sin\theta - mg \end{cases} \tag{4.19}$$

ora $\theta(t) \equiv \pm\frac{\pi}{2}$ risolve identicamente la prima equazione; dunque il moto del punto Q è dato da:

$$m\ddot{y} = -ky \pm k(R-r) - mg, \tag{4.20}$$

che è un moto armonico intorno agli equilibri $y = \pm(R-r) - \frac{mg}{k}$.

4.0.4 CR,L,S Compito di Meccanica Razionale, sess. estiva (Pulvirenti)

La condizione di puro rotolamento fornisce per il moto del baricentro:

$$v_G = (0, R\dot{\phi}). \tag{4.21}$$

e quindi, viste le condizioni iniziali:

$$(x_G, y_G) = (0, R\phi). \tag{4.22}$$

Il punto P ha coordinate:

$$P \equiv (\xi\cos\phi, R\phi + \xi\sin\phi). \tag{4.23}$$

La Lagrangiana del sistema $L = T + U$ è:

$$\begin{aligned} L = {} & \tfrac{1}{2}\big(I_G + MR^2 + m\xi^2 + mR^2\big)\dot{\phi}^2 + \tfrac{m}{2}\dot{\xi}^2 + \\ & + mR\dot{\phi}\big(\dot{\xi}\sin\phi + \dot{\phi}\xi\cos\phi\big) \\ & -(M+m)gR\phi - mg\xi\sin\phi - \tfrac{k^2}{2}\xi^2. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Le posizioni di equilibrio sono gli zeri del gradiente del potenziale U

$$\begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial \xi} = -mg\sin\phi - k\xi \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} = -mg\xi\cos\phi - (m+M)gR \end{array} \tag{4.25}$$

Pertanto gli equilibri esistono solo se :

$$\beta \equiv \frac{2k(m+M)R}{m^2 g} \leq 1 \tag{4.26}$$

e sono:

$$\begin{array}{l} (\phi_1 = \frac{1}{2}\arcsin\beta, \xi_1 = -\frac{mg}{k}\sin\phi_1) \\ (\phi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\beta, \xi_2 = -\frac{mg}{k}\sin\phi_2) \end{array} \tag{4.27}$$

Lo Hessiano del potenziale è dato da:

$$\begin{array}{cc} -k & -mg\cos\phi \\ -mg\cos\phi & -\frac{m^2 g^2}{k}\sin^2\phi \end{array} \tag{4.28}$$

Dunque la sua traccia,in entrambe le posizioni di equilibrio, é negativa, cioé la somma degli autovalori dello Hessiano è negativa. Il determinante Δ vale:

$$\Delta = -m^2 g^2 \cos 2\phi, \tag{4.29}$$

Quindi, finché $\beta < 1$, Δ è negativo se $\phi = \phi_1$ (e quindi equilibrio instabile), positivo se $\phi = \phi_2$ (e quindi equilibrio stabile). Per $\beta = 1$ si ha un caso critico. Infine, alla quarta domanda si risponde osservando che in questo caso il moto è uniformemente accelerato.

4.0.5 CR,L,S Compito sessione estiva a.a. 93-94

4.0.6 CR,L,S,PO: Compito di Meccanica Razionale del 6.10.94

La lagrangiana del sistema è:

$$L = \frac{1}{2}(m\dot{y}^2 + I\dot{\phi}^2 - by^2) - mgy + aLy\sin\phi, \tag{4.30}$$

dove si è posto $b = k_1 + k_2$.
Equilibri. Si debbono determinare gli zeri del campo gradiente:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial y} = -mg - by + aL\sin\phi \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} = aLy\sin\phi. \end{array} \tag{4.31}$$

Si hanno le seguenti soluzioni:

$$(y = 0, \phi_1 = \arcsin\alpha), (y = 0, \phi_2 = \pi - \arcsin\alpha), \tag{4.32}$$

sse $\alpha \leq 1$.Inoltre, si hanno le restanti soluzioni, per ogni valore di α:

$$\phi_3 = \frac{\pi}{2}, y_3 = \frac{aL(1-\alpha)}{b} \tag{4.33}$$

$$\phi_4 = \frac{3\pi}{2}, y_4 = -\frac{aL(1+\alpha)}{b} \tag{4.34}$$

.

Stabilità. Calcolato H, lo Hessiano di L rispetto a (y, ϕ), si ha:

$$detH = abLy\sin\phi - a^2L^2cos^2\phi. \tag{4.35}$$

La traccia di H è:

$$TrH = -b - aLy\sin\phi. \tag{4.36}$$

Di conseguenza, detti λ_1, λ_2 gli autovalori di H, negli equilibri $(0, \phi_{1,2})$ si ha:

$$\lambda_1\lambda_2 = -a^2L^2cos^2\phi < 0, \lambda_1 + \lambda_2 = -b < 0. \tag{4.37}$$

Dunque si hanno due equilibri instabili, per $\alpha < 1$. In (ϕ_3, y_3), si ha:

$$\lambda_1\lambda_2 = a^2L^2(1-\alpha), \lambda_1 + \lambda_2 = -b - \frac{a^2L^2(1-\alpha)}{b}. \tag{4.38}$$

Dunque, l'equilibrio è stabile se $\alpha < 1$, se $\alpha > 1$. Finalmente, si constata facilmente che (ϕ_4, y_4) è sempre stabile se $\alpha \neq 1$.
Consideriamo quindi la lagrangiana quadratica ottenuta da L, tenendo in conto solo i termini di ordine 2 inclusi, relativamente all'equilibrio (ϕ_4, y_4). Posto

$$(y, \phi) = (\eta, \psi) + (y_4\phi_4), \tag{4.39}$$

si ha:

$$L_{[2]} = \frac{1}{2}\left(m\dot{\eta}^2 + I\dot{\psi}^2 - b\eta^2 - \frac{a^2L^2(1+\alpha)}{b}\psi^2\right). \tag{4.40}$$

Il corrispondente sistema Lagrangiano si separa in due sottosistemi:precisamente i sistemi due oscillatori armonici disaccoppiati, quello in η di frequenza $\omega_1^2 = \frac{b}{m}$, quello in ψ di frequenza $\omega_2^2 = \frac{a^2L^2(1+\alpha)^2}{I}$.
Consideriamo l'ultima domanda. Posto $a = 0$ nell'espressione di L, il problema si riduce a due problemi lagrangiani separati, il primo di Lagrangiana:

$$L_1 = \frac{1}{2}(m\dot{y}^2 - by^2) - mgy, \tag{4.41}$$

il secondo di lagrangiana

$$L_2 = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2. \tag{4.42}$$

Il primo problema ha solo moti periodici, e precisamente oscillazioni lineari attorno all'equilibrio

$$y = -\frac{mg}{b}. \tag{4.43}$$

Il secondo problema fornisce $\phi(t) = Kt + \phi(0)$, con K costante arbitraria.

4.0.7 CR,L,S,PO Compito del 20.6.94 (Marchioro)

4.0.8 CR,L,S,PO: Compito del 11.7.94 (Marchioro)

4.0.9 CR,L,S,PO Esonero di Meccanica Razionale del 14-5-90

4.0.10 CR,LS,PO Esonero di Meccanica Razionale del 14-5-90

4.0.11 L,RU Compito di Meccanica del 23.2.1995

4.0.12 L,RU,N: Primo compito di esonero, a.a.94-95.

1) Il sistema è invariante per rotazioni attorno all'asse perpendicolare al piano (q_1, q_2). Pertanto si conserva la componente lungo questo asse del momento angolare:

$$I = q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1. \tag{4.44}$$

Consideriamo i livelli $I = c, c \neq 0$. Introduciamo le coordinate polari:

$$\begin{aligned} q_1 &= r\cos\phi \\ q_2 &= r\sin\phi. \end{aligned} \tag{4.45}$$

La Lagrangiana L si riscrive in queste coordinate:

$$L = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + r^2 - r^6, \tag{4.46}$$

l'integrale primo I:

$$I = r^2\dot{\phi}^2. \tag{4.47}$$

Il sistema Lagrangiano ristretto sul livello c è dato dalla Lagrangiana:

$$L^{(c)} = \dot{r}^2 - \frac{c^2}{2r^2} + r^2 - r^6. \tag{4.48}$$

La funzione energia potenziale $V(r) = \frac{c^2}{2r^2} - r^2 + r^6$ ha un solo minimo e costituisce una barriera per il punto $r = 0$: per ogni valore di E, $E \geq V(r_{cr}), r_{cr} = \left(\frac{1+\sqrt{1+6c^2}}{6}\right)^{\frac{1}{4}}$, si hanno due radici $0 < r_1(E) \leq r_2(E)$ dell'equazione $E = V(r)$. Le radici sono distinte se $E \neq V(r_{cr}$. Tutti i moti sono quindi limitati e perció periodici.
(2). L'invarianza della retta è ovvia, corrisponde a $I = 0$. Il sistema di Lagrange corrisponde sulla retta al sistema:

$$\ddot{q}_1 = 2q_1\{1 - q_1^5\gamma^2\}, \tag{4.49}$$

$\gamma^2 = 3\frac{\beta^2+\alpha^2}{2\beta^2}$.

Si tratta di un problema Lagrangiano con potenziale:

$$U(q_1) = q_1^2 - q_1^6\gamma^2. \tag{4.50}$$

Il potenziale ha tre punti critici, $q_1^1 = 0, q_1^2 = \sqrt{\gamma}, q_1^3 = -\sqrt{\gamma}$.

Il punto O è un punto di equilibrio instabile, $q_1^i, i = 2, 3$, sono stabili. Si tratta di una doppia buca. Tutte le soluzioni sono limitate. La separatrice ha equazione:

$$\dot{q}_1^2 = 2\{q_1^2 - q_1^6\gamma^2\} \tag{4.51}$$

4.0.13 CR,L,RU: Compito di Meccanica Razionale del 26.2.96

Siano (x, y) le coordinate del centra del disco C, relativamente ad un sistema piano fisso K. Denotiamo con ψ l'angolo che un sistema k, di coordinate (χ, η), origine in C, di assi solidali al disco forma col sistema fisso K. Sia poi ϕ l'angolo che individua il punto P sul bordo del disco, e precisamente l'angolo che CP forma con l'asse parallelo all'asse x.

Si ha allora:

$$\begin{aligned} x_P &= x + R\cos\phi \\ y_P &= y + R\sin\phi. \end{aligned} \tag{4.52}$$

La Lagrangiana del sistema è:

$$L = \frac{1}{2}\Big\{I\psi^2 + (M+m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2mR(\dot{y}\sin\phi - \dot{x}\cos\phi)\dot{\phi} + mR^2\dot{\phi}^2\Big\}. \tag{4.53}$$

Le coordinate x, y, ψ sono cicliche, e pertanto si hanno tre integrali primi del moto:

$$\begin{aligned} p_x &= (M+m)\dot{x} + mR\dot{\phi}\cos\phi \\ p_y &= (M+m)\dot{y} - mR\dot{\phi}\sin\phi \\ p_\psi &= I\dot{\psi}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Possiamo ottenere il moto del sistema considerando il livello $p_x = C_1, p_y = C_2, \dot{\psi} = \Omega$.

La lagrangiana ridotta diviene allora banalmente equivalente alla Lagrangiana assegnata dalla sola eneria cinetica $\frac{1}{2}m\dot{\phi}^2$. In conclusione, il moto del sistema è assegnato da:

$$\begin{array}{l} x(t) = \frac{C_1 t}{(m+M)} + \frac{mR}{(m+M)} \sin \omega t \\ y(t) = \frac{C_1 t}{(m+M)} + \frac{mR}{(m+M)} \cos \omega t \\ \phi(t) = \omega t + \psi(0) \\ \psi(t) = \Omega t + \psi(0), \end{array} \tag{4.55}$$

essendo $(\omega, \Omega) = (\dot{\phi}(0), \dot{\psi}(0))$.

Il compito puó essere variato, aggiungendo la considerazione di una forza agente su P, dipendente solo dall'angolo ψ. Nella Lagrangiana si ha allora una presenza del potenziale $U(\psi)$ che non impedisce la presenza dei tre integrali primi citati. Il problema si riconduce ad un problema ad un solo grado di libertà.

4.0.14 CR,L,S,RU Compito sessione estiva a.a. 93-94

4.0.15 L,S,H Secondo appello Meccanica Razionale a.a. 93-94.

4.0.16 L,S,N

Prima domanda. La simmetria del potenziale si puó meglio rappresentare utilizzando coordinate cilindriche:

$$\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z. \end{array} \tag{4.56}$$

In tale sistema di coordinate, il gruppo diventa:

$$h_\tau(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} r \\ \theta + \tau \\ z + \alpha\tau \end{pmatrix}. \tag{4.57}$$

Si ha allora:

$$V(r\cos(\tau + \theta), r\sin(\tau + \theta), z + \alpha\tau) \equiv V(r\cos\theta, r\sin\theta, z). \tag{4.58}$$

Deve allora aversi, posto $W(r, \theta, z) := V(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$:

$$W(r, \theta, z) \equiv W(r, \theta + \tau, z + \alpha\tau), \tag{4.59}$$

e perció:

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial W}{\partial z} \equiv 0. \tag{4.60}$$

Allora si ha:

$$W(r, \theta, z) \equiv W(r, \alpha\theta - z). \tag{4.61}$$

La Lagrangiana è:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + W(r, \alpha\theta - z). \tag{4.62}$$

Il gruppo ad un parametro è una rotazione nel piano (x, y) accoppiata ad una traslazione lungo l'asse z; palesemente è un'isometria in $\mathbb{R}^3$ e lascia dunque invariata l'energia cinetica.

L'integrale primo di Noether è:

$$P = m\left(r^2\dot{\theta} + \alpha\dot{z}\right). \tag{4.63}$$

Possiamo adattare ancora le coordinate alla simmetria, introducendo:

$$\phi := \alpha\theta - z. \tag{4.64}$$

La lagrangiana in r, θ, ϕ è:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r^2+\alpha^2)\dot{\theta}^2 - 2\alpha\dot{\theta}\dot{\phi} + \phi^2\right) + W(r,\phi). \tag{4.65}$$

Con questa scelta di coordinate la variabile θ è ciclica; per ottenere la Lagrangiana ridotta procediamo con iil metodo di Routh, operiamo, cioé, la trasformata di Legendere nella variabile $\dot{\theta}$:

$$P_\theta = m(r^2+\alpha^2)\dot{\theta} - \alpha m\dot{\phi}, \quad \dot{\theta} = \frac{P_\theta + \alpha m\dot{\phi}}{m(r^2+\alpha^2}. \tag{4.66}$$

La Lagrangiana cercata è $\tilde{L}(r,\dot{r},\phi,\dot{\phi}) = -R$:

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\frac{r^2}{r^2+\alpha^2}\dot{\phi}^2 + \frac{\alpha P_\theta}{r^2+\alpha^2}\dot{\phi} - \left(W(r,\phi) + \frac{P_\theta^2}{2m(r^2+\alpha^2)}\right). \tag{4.67}$$

dove P_θ è una costante. Si è dunque eliminata un grado di libertà, ottenendo l'energia potenziale efficace:

$$V^{(e)}(r,\phi) := W(r,\phi) + \frac{J^2}{\alpha^2+r^2}. \tag{4.68}$$

Si osservi che la sostituzione dell'integrale primo nell'espressione dell'energia totale, dà l'energia associata alla lagrangiana $\tilde{L}$:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\frac{r^2}{r^2+\alpha^2}\dot{\phi}^2 + \left(W(r,\phi) + \frac{P_\theta^2}{2m(r^2+\alpha^2)}\right), \tag{4.69}$$

ma essendo E l'energia di un sistema a **due** gradi di libertà, **non si puó** da essa risalire all'espressione corretta di $\tilde{L}$, che infatti contiene un termine lineare in $\dot{\phi}$, che non dà contributo all'energia.

Per ovviare alla difficoltà formale data dalla presenza di termini non diagonali nell'energia cinetica (e cioé del termine in $\dot{\theta}\dot{\phi}$), si puo' procedere nel modo seguente: detta $\bar{\theta} = \alpha\theta$, si vogliono scegliere $\phi = \bar{\theta} - z$ e γ come nuove variabili, con γ da determinare, in modo che il termine cinetico $\frac{r^2}{\alpha^2}\dot{\bar{\theta}}^2 + \dot{z}^2$ resti diagonale. La scelta giusta è $\gamma = \frac{1}{\frac{r^2}{\alpha^2}+1}\left(\frac{r^2}{\alpha^2}\bar{\theta} + z\right)$ (stiamo procedento in analogia all'eliminazione del moto del baricentro nel problema dei due corpi: $\frac{r^2}{\alpha^2}$, 1 giocano il ruolo delle masse, $\frac{r^2}{\alpha^2}+1$ della massa totale e $\frac{\frac{r^2}{\alpha^2}}{\frac{r^2}{\alpha^2}+1}$ della massa ridotta). Si ottiene:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{r^2+\alpha^2}{\alpha^2}\dot{\gamma}^2 + \frac{r^2}{r^2+\alpha^2}\dot{\phi}^2\right) - V(r,\phi) \tag{4.70}$$

. La lagrangiana ridotta è dunque:

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{r^2}{r^2+\alpha^2}\dot{\phi}^2\right) - \left(\frac{r^2+\alpha^2}{\alpha^2}\dot{\gamma}^2 + V(r,\phi)\right). \tag{4.71}$$

*Seconda domanda.*I punti critici dell'energia potenziale efficace sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{2rJ^2}{(\alpha^2+r^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \phi} = 0. \end{array} \tag{4.72}$$

Se $(\overline{r},\overline{\phi})$ è una soluzione, allora si ricava un moto uniforme:

$$\begin{array}{l} z(t) = z_0 - \frac{\alpha J t}{\overline{r}^2+\alpha^2} \\ \theta(t) = \theta_0 + \frac{Jt}{\overline{r}^2+\alpha^2}. \end{array} \tag{4.73}$$

Terza domanda. Gli equilibri sono assegnati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{2rJ^2}{(\alpha^2+r^2)^2} = -\frac{2}{r^3\cos 2\phi} - \frac{2rJ^2}{(\alpha^2+r^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \phi} = -2\frac{\sin 2\phi}{r^2\cos^2 2\phi} = 0. \end{array} \tag{4.74}$$

Consideriamo solo il caso $\alpha > 0$, lasciando al lettore il completamento della discussione. Si hanno soluzioni reali solo se $J^2 > 1$. Fissiamoci sul caso $J > 1$. Si ha:

$$\begin{array}{l} \phi = \frac{\pi}{2}, \\ \overline{r} = \sqrt{\frac{\alpha}{J-1}}. \end{array} \tag{4.75}$$

Il lettore completi l'analisi costruendo la matrice Hessiana di $U^{(e)}$, e computandola negli equilibri.

4.0.17 L,RU,H,HJ,AA Compito di Meccanica Razionale, 9/7/'96, II^o appello, sess. estiva

1) La Lagrangiana nelle variabili ρ e θ è:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2\left(1 + \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^3}\right)^2\right) + \frac{\rho^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}. \tag{4.76}$$

L'Hamiltoniana, negli impulsi $P = P_\rho$, $J = P_\theta$ è:

$$H = \frac{1}{2}\frac{P^2}{1 + \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^3}\right)^2} + \frac{J^2}{2\rho^2} - \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}. \tag{4.77}$$

2) Gli integrali primi sono l'energia e il momento $J = \rho^2\dot{\theta}$.

3) Il moto si puó ricondurre ad un moto unidimensionale di energia potenziale efficace

$$V_{eff} = \left(\frac{J^2}{2} - 1\right)\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho}, \tag{4.78}$$

che è limitato dal basso se $J^2 > 2$.

Se $J^2 \leq 2$ il tempo di arrivo in $\rho = 0$ che corrisponde a $z = -\infty$, è finito, dunque se $E < 0$ o se $\dot{\rho} < 0$ il moto esplode in tempo finito.

Cosidero dunque solo $J^2 > 2$: Il moto è limitato se $E < 0$, illimitato se $E \geq 0$.

4) L'espressione dell' orbita in forma implicita si ricava da:

$$E = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2\left(1 + \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^3}\right)^2\right) + \left(\frac{J^2}{2} - 1\right)\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}, \tag{4.79}$$

$$\dot{\rho} = \dot{\theta}\partial_\theta\rho = \frac{J}{\rho^2}\partial_\theta\rho. \tag{4.80}$$

Dunque l'angolo cercato è:

$$2\int_{\rho_{min}}^{+\infty} d\rho \frac{J}{\rho^2}\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^3}\right)^2}{2\left(E - \left(\frac{J^2}{2} - 1\right)\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\right)}}, \tag{4.81}$$

dove ρ_{min} è la minima distanza dall'asse z che il punto raggiunge.

Tale angolo è finito se $E \geq 0$.

5) L'equazione di H-J è resolubile per separazione di variabili.

6) Il moto è descrivibile in variabili azione angolo nella regione dello spazio delle fasi in cui $J^2 > 2$ e $E < 0$.

4.0.18 CR,L,RU,H,HJ Compito di Meccanica Razionale, 24/9/'96, I^o appello, sess. autunnale

1) Siano (x, y) le coordinate di P nel sistema fisso, e $(\xi, \eta = a\xi^2)$ nel sistema solidale alla guida.

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\theta - \eta\sin\theta \\ y &= \xi\sin\theta + \eta\cos\theta \end{aligned} \tag{4.82}$$

.

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\theta}^2\left(\xi^2 + \eta^2\right) + 2\dot{\theta}(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta), \tag{4.83}$$

dove:

$$\xi^2 + \eta^2 = (1 + a^2\xi^2)\xi^2;\;\; \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = (1 + 4a^2\xi^2)\dot{\xi}^2;\;\; \xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta = a\xi^2\dot{\xi}. \tag{4.84}$$

La Lagrangiana è:

$$L = \frac{1}{2}\left(I + m(1 + a^2\xi^2)\xi^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}(1 + 4a^2\xi^2)\dot{\xi}^2 + ma\xi^2\dot{\xi}\dot{\theta} - \frac{k}{2}(1 + a^2\xi^2)\xi^2. \tag{4.85}$$

La variabile θ è ciclica, si conserva oltre all'energia il momento della quantità di moto:

$$J = \partial_{\dot{\theta}}L = \left(I + m(1 + a^2\xi^2)\xi^2\right)\dot{\theta} + ma\xi^2\dot{\xi}. \tag{4.86}$$

2) Dall'espressione del momento:

$$\dot{\theta} = \frac{J - ma\xi^2\dot{\xi}}{F(\xi)}, \tag{4.87}$$

dove $F(\xi) = \left(I + m(1 + a^2\xi^2)\xi^2\right)$. Sostituendo nell'espressione dell'energia si ottiene:

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2F}(J - a\xi^2\dot{\xi})^2 + a\xi^2\dot{\xi} + \tfrac{(J - a\xi^2\dot{\xi})}{F} + \tfrac{m}{2}(1 + 4a^2\xi^2)\dot{\xi}^2 + \tfrac{k}{2}(1 + a^2\xi^2)\xi^2 \\ &= \tfrac{1}{2}T(\xi)\dot{\xi}^2 + U_e(\xi), \end{aligned} \tag{4.88}$$

dove:

$$T = m(1 + 4a^2\xi^2) - \frac{a^2\xi^4}{F(\xi)};\;\; U_e = \frac{k}{2}(1 + a^2\xi^2)\xi^2 + \frac{J^2}{F(\xi)}. \tag{4.89}$$

T è una funzione strettamente positiva, l'energia potenziale efficace ha un unico punto critico (stabile) in 0 se $\sqrt{\frac{2}{k}}J \leq I$. Altrimenti 0 è instabile e compaiono i due equilibri stabili simmetrici $\xi_\pm$, uniche due soluzioni di

$$\xi^2(1 + a^2\xi^2) = \frac{1}{m}\left(\sqrt{\frac{2}{k}}J - I\right) \tag{4.90}$$

($\xi^2(1 + a^2\xi^2)$ è una funzione strettamente convessa).

3) Dall'analisi qualitativa, si ottiene che $\xi(t)$ è sempre periodica se non è costante. Se $J = 0$,

$$\dot{\theta} = -\frac{ma\xi^2\dot{\xi}}{F(\xi)} \tag{4.91}$$

$$\theta(t) = \theta(0) + A(\xi(t)) - A(\xi(0)), \tag{4.92}$$

dove $A(\xi)$ è la primitiva di $-\frac{ma\xi^2}{F(\xi)}$. Quindi il moto complessivo è periodico dello stesso periodo di $\xi(t)$.

4.0.19 CR,L,RU,H,HJ,AA Compito di Meccanica Razionale, 8/10/'96, II^o appello, sess. autunnale

Indica con ϕ l'angolo sul piano $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ che il disco forma con l'asse delle $\mathbf{x}$, con θ l'angolo che OP forma con il piano $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, con I e J i momenti di inerzia del disco rispetto all'asse $\mathbf{u}$ e all'asse $\mathbf{z}$ rispettivamente. Le coordinate cartesiane del punto sono:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta\,\cos\phi \\ x &= R\cos\theta\,\sin\phi \\ x &= R\sin\theta. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Dunque:

$$L = \frac{1}{2}(J + mR^2\cos^2\theta)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(I + mR^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta, \tag{4.94}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{P_\phi^2}{J + mR^2\cos^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{P_\theta^2}{I + mR^2} + \frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta. \tag{4.95}$$

Il sistema è invariante per rotazioni intorno all'asse delle $\mathbf{z} =$, dunque si conserva l'energia meccanica e il momento della quantità di moto rispetto a questo asse:

$$P_\phi = (J + mR^2\cos^2\theta)\dot{\phi}. \tag{4.96}$$

Ottieni un problema unidimensionale sostituendo a $\dot{\phi}$ la sua espressione in termini di P_ϕ nell'espressione dell'energia totale:

$$E = \frac{1}{2}(I + mR^2)\dot{\theta}^2 + V_{eff}, \tag{4.97}$$

dove

$$V_{eff} = \frac{1}{2}\frac{P_\phi^2}{J + mR^2\cos^2\theta} + \frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta. \tag{4.98}$$

Derivando l'energia potenziale nella variabile θ, ottieni:

$$\partial_\theta V_{eff} = \left(-kR^2 + \frac{mR^2P_\phi^2}{(J + mR^2\cos^2\theta)^2}\right)\sin\theta\,\cos\theta. \tag{4.99}$$

Il problema e' simmetrico rispetto alle trasformazioni $\theta \to -\theta$, e $\theta \to \pi - \theta$, quindi ti limiti a studiarlo tra $[0, \frac{\pi}{2}]$. I valori 0 e $\frac{\pi}{2}$ sono soluzioni stazionarie per tutti i valori dei parametri. Inoltre esiste un'altra soluzione se

$$0 < P_\phi\sqrt{\frac{m}{k}} - J < mR^2. \tag{4.100}$$

Graficando l'energia potenziale efficace, ottieni che la posione $\theta = \frac{\pi}{2}$ è stabile fino a che $P_\phi\sqrt{\frac{m}{k}} < J$, mentre $\theta = 0$ è instabile. Appena si biforca, cioé quando $0 < P_\phi\sqrt{\frac{m}{k}} > 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ diventa instabile; quando la soluzione intermedia raggiunge $\theta = 0$, cioé quando $P_\phi\sqrt{\frac{m}{k}} - J > mR^2$, $\theta = 0$ diventa stabile.

4.0.20 TC

4.0.21 TC

4.0.22 TC,AA,P Secondo compito di esonero a.a.94.

Cerca $W = A(q_1, a_1, a_2) + B(q_2, a_1, a_2)$ (a_1, a_2 sono i nuovi impulsi). L'equazione da risolvere è:

$$\frac{1}{2}\left(q_2(\partial_{q_1}Aq_1)^2 + \partial_{q_2}B\right)^2 = a_2. \tag{4.101}$$

Stai cercando B in modo che non dipenda da q_2, ma solo da q_1. Dall'equazione puoi ricavare:

$$\partial_{q_2} B = \pm\sqrt{2a_2} - q_2(\partial_{q_1} A q_1)^2, \tag{4.102}$$

peró in questa espressione $\partial_{q_2} B$ dipendende da q_1, e da $A(q_1)$; l'unica possibilità che ho è dunque che la combinazione $\partial_{q_1} A q_1$ non dipenda da q_1, cioé: $\partial_{q_1} A q_1 = a_1$, ovvero $A(q_1) = a_1 \log q_1$. A questo punto posso risolvere anche l'equazione in B infatti $\partial_{q_2} B = \pm\sqrt{2a_2} - q_2 a_1^2$ è una funzione della sola q_2 e dei nuovi impulsi. Riassumendo, ottieni:

$$W = a_1 \log q_1 \pm \sqrt{2a_2} q_2 - \frac{1}{2} q_2^2 a_1^2. \tag{4.103}$$

La traformazione generata da W è:

$$\begin{array}{l} Q_1 = \log q_1 - a_1 q_2^2 \\ Q_2 = \pm\frac{q_2}{\sqrt{2a_2}} \\ p_1 = \frac{a_1}{q_1} \\ p_2 = \pm\sqrt{2a_2} - a_1^2 q_2. \end{array} \tag{4.104}$$

Le equazioni del moto per l'hamiltoniana $K(Q_1, Q_2, a_1, a_2) = a_2$ sono:

$$\begin{array}{ll} \dot{Q}_1 = 0 & \dot{Q}_2 = 1 \\ \dot{a}_1 = 0 & \dot{a}_2 = 0. \end{array} \tag{4.105}$$

Quindi Q_1, a_1, a_2 sono costanti e $Q_2(t) = Q_2(0) + t$. Tornando alle vecchie variabili ottieni:

$$\begin{array}{l} q_2(t) = \pm\sqrt{2a_2(0)}(Q_2(0) + t) \\ q_1(t) = e^{Q_1(0) + 2a_1(0)a_2(0)(Q_2(0)+t)^2} \\ p_1 = a_1(0) e^{-Q_1(0) - 2a_1(0)a_2(0)(Q_2(0)+t)^2} \\ p_2 = \pm\sqrt{2a_2(0)}(1 - a_1^2(0)(Q_2(0) + t)). \end{array} \tag{4.106}$$

Il segno $\pm$ lo determini a seconda del segno di $q_2(p_1 q_1)^2 + p_2 = \pm\sqrt{2a_2}$.
Nella soluzione compaiono $Q_1(0), Q_2(0), a_1(0), a_2(0)$ che determini imponendo i dati iniziali.

4.0.23 H,HJ,AA,S: II esonero 10/5/'96

a) Cerca una soluzione dell'equazione caratteristica di Hamilton-Jacobi del tipo:

$$W(x, y, \alpha, \beta) = A(x) + B(y). \tag{4.107}$$

Sostituendo:

$$\frac{1}{2}(\partial_x A)^2 + \frac{1}{2}(1 + x^2)\left((\partial_y B)^2 + y^2\right) = \alpha. \tag{4.108}$$

Ottengo la soluzione ponendo $(\partial_y B)^2 + y^2 = \beta$:

$$\begin{array}{l} B(y, \beta) = \pm\int^y dy\sqrt{\beta - y^2} \\ A(x, \alpha, \beta) = \pm\int^x dx\sqrt{2\alpha - \beta - \beta x^2}. \end{array} \tag{4.109}$$

b) La regione dello spazio delle fasi in cui il moto é multiperiodico è data da $\beta > 0$, $\alpha > \frac{\beta}{2}$.
c) Devi calcolare:

$$\begin{array}{l} I_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\beta}} dy\sqrt{\beta - y^2} \\ I_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha-\beta}{\beta}}} dx\sqrt{2\alpha - \beta - \beta x^2}. \end{array} \tag{4.110}$$

Ricorda che

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2h}}{\omega}} dq\sqrt{2h - \omega^2 q^2} = \frac{h}{\omega}. \tag{4.111}$$

Ottieni:

$$I_1 = \frac{\beta}{2}, \qquad I_2 = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\beta}}. \tag{4.112}$$

Dunque la nuova Hamiltoniana è:

$$K = \alpha = \sqrt{2I_1}I_2 + I_1. \tag{4.113}$$

Le frequenze:

$$\begin{array}{l} \omega_1 = \frac{I_2}{\sqrt{2I_1}} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\beta} \\ \omega_2 = \sqrt{2I_1} = \sqrt{\beta}. \end{array} \tag{4.114}$$

d) Sostituendo il valore del dato iniziale in α, β ottieni:

$$\omega_1 = 1 + \frac{a^2}{2}, \ \omega_2 = 1 \tag{4.115}$$

Il moto è periodico se e solo se $a^2 \in \mathbb{Q}$.

e) per $a = 1$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2}$, dunque $T = 3T_1 = 2T_2$. $T_2 = \frac{2\pi}{\omega\ 2} = 2\pi$, dunque $T = 4\pi$.

f) Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = P_x & \dot{y} = P_y(1+x^2) \\ \dot{P}_x = -x\left(P_y^2 + y^2\right) & \dot{P}_y = -y(1+x^2). \end{array} \tag{4.116}$$

Considera il dato iniziale:

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0 & y(0) = 0 \\ P_x(0) = \varepsilon & P_y(0) = 0, \end{array} \tag{4.117}$$

che è una piccola perturbazione della posizione stazionaria. La soluzione delle equazioni di Hamilton è:

$$\begin{array}{ll} x(t) = -t\varepsilon & y(t) = 0 \\ P_x(t) = \varepsilon & P_y(t) = 0. \end{array} \tag{4.118}$$

Dunque la posizione di equilibio è instabile.

4.0.24 CR,H,HJ,P: Esonero di Meccanica Razionale del 6-6-90

5 Alcuni esercizi svolti in dettaglio

Lo scopo di questa sezione è illustrare la parte "standard", quellache non si può non saper fare, degli esercizi nel formalismo Lagrangiano ed Hamiltoniano.

Quindi per tutti i problemi che seguono provvederò a rispondere alle seguenti domande:

i) Scrivi le equazioni del moto attraverso la Lagrangiana e l'Hamiltoniana.

ii) Determina le soluzioni di equilibrio e discutine la stabilità. Calcola le frequenze delle piccole oscillazioni intorno agli equilibri stabili.

iii) Trova le frequenze ed i modi normali delle piccole oscillazioni intorno agli equilibri stabili.

iv) Determina eventuali integrali primi.

v) Riduci i gradi di libertà se possibile.

Si giunge alle risposte attraverso procedimenti che non presentano difficoltà concettuali, tutt'al piú calcoli laboriosi.

Alcune domande un pò meno standard potrebbero essere:

vi) Discuti le condizioni iniziali per cui il moto è limitato.

vii) Discuti l'esistenza di dati iniziali per cui il moto è periodico

viii) Determina la reazione vincolare per dei moti particolari (specificati nel testo).

Le domande più difficili sono contrassegnate da un asterisco.

Tutti gli esercizi sono dimensionalmente consistenti, cioè la massa non è mai un numero, ma ha le dimensioni di una massa, e cosí le lunghezze, i raggi, l'accelerazione di gravità etc. . Questo permette la verifica dei calcoli attraverso l'analisi dimensionale, che può essere utile.

ATTENZIONE: nel caso in cui i parametri del problema non siano fisicamente consistenti, (ad esempio se la massa è 1 o il raggio è 3 o il punto è vincolato a muoversi su una curva $y = x^2$ etc.) l'analisi dimensionale è impossibile, a meno di non reintrodurre le dimensioni fisiche nel testo.

5.1 Problema

Un punto materiale di massa m, indicato con P, si muove senza attrito su una retta orizzontale. Un asta priva di massa e lunga L ha un estremo in P. All'altro estremo è fissato un punto materiale di massa m, indicato con Q. Sul sistema agisce la forza di gravità, nella direzione verticale discendente.

5.1.1 I gradi di libertà e la scelta delle cooordinate

Devi capire di quanti parametri hai bisogno per descrivere una generica configurazione del sistema. Per specificare la posizione di P è sufficiente il valore della sua ascissa, che chiamerò x, rispetto ad una origine fissata arbitrariamente. In tal caso, detto y l'asse verticale, le coordinate di P saranno $(x, 0)$. Per specificare la posizione di Q è sufficiente conoscere, ad esempio, l'angolo che l'asta forma con la verticale discendente passante per P, che chiamerò ϕ. Quindi le coordinate di Q saranno $(x + L\sin\phi, -L\cos\phi)$. Il problema ha dunque due gradi di libertà.

5.1.2 Il calcolo dell'energia cinetica

Devo calcolare l'energia cinetica di P e di Q e poi sommarle. Per far ciò devo calcolare le velocità dei due punti in termini delle variabili lagrangiane (x, ϕ) e delle loro derivate rispetto al tempo. Evidentemente la velocità del punto P è $(\dot{x}, 0)$, la velocità di Q è

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x + L\sin\phi \\ -L\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} + \dot{\phi}L\cos\phi \\ \dot{\phi}L\sin\phi \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Quadrando e sommando ottengo:

$$T = \frac{m}{2}(2\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}\dot{x}L\cos\phi + L^2\dot{\phi}^2).$$

Controllo dimensionale: T deve avere le dimensioni di una energia, cioè massa per lunghezza al quadrato su tempo al quadrato. L'espressione trovata è corretta perché $\dot{x}$ è una velocità, L è una lunghezza e $\dot{\phi}$ ha le dimensioni dell'inverso del tempo.

5.1.3 Il calcolo dell'energia potenziale

Devo sommare i contributi dell'energia potenziale, espressi in variabile lagrangiane, delle forze attive che agiscono sui punti. In questo caso la forza di gravità non ha effetto su P, che è vincolato ad una retta orizzontale. Dunque l'unico contributo all'energia potenziale è quello gravitazione sul punto Q. L'energia potenziale gravitazionale è data dalla massa per la quota per l'accelerazione di gravità.

Quindi $V = -mgL\cos\phi$.

5.1.4 La Lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange

$$L = T - V = \frac{m}{2}(2\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}\dot{x}L\cos\phi + L^2\dot{\phi}^2) + mgL\cos\phi.$$

Per scrivere le equazioni del moto, devo prima derivare la lagrangiana nelle variabili $\dot{x}$ e $\dot{\phi}$, e calcolare quindi gli *impulsi coniugati* alle variabili $\dot{x}$ e $\dot{\phi}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= 2m\dot{x} + mL\dot{\phi}\cos\phi \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= mL^2\dot{\phi} + mL\dot{x}\cos\phi \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ora devo considerare gli impulsi coniugati come funzioni del tempo attraverso le variabili x, ϕ, $\dot{x}$, $\dot{\phi}$, e scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{\partial L}{\partial \phi}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Come prima equazione ottengo

$$2m\ddot{x} + mL\ddot{\phi} - mL\dot{\phi}^2\sin\phi = 0,$$

Come seconda

$$mL^2\ddot{\phi} + mL\ddot{x}\cos\phi - mL\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi = -mL\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi - mgL\sin\phi,$$

che si può semplificare in:

$$mL^2\ddot{\phi} + mL\ddot{x}\cos\phi = -mgL\sin\phi.$$

Verifica che le equzioni sono dimensionalmente corrette, tenendo presente che g ha le dimensioni di una accelerazione.

5.1.5 L'Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton

Per il calcolo dell'Hamiltoniana si procede come segue. Per prima cosa si definiscono le nuove variabili, che sono gli impulsi coniugati:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + mL\dot{\phi}\cos\phi \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mL^2\dot{\phi} + mL\dot{x}\cos\phi. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Riconosci che p_x ha le dimensioni di una quantità di moto (massa per velocità) e che p_ϕ ha le dimensioni di un momento della quantità di moto (massa per lunghezza per velocità).

Dopo di che si ricavano le espressioni di $\dot{x}$ e $\dot{\phi}$ in termini delle nuove variabili. Per fare questo si deve risolvere il sisitema di equazioni lineare 5.4 rispetto alle variabili $\dot{x}$ e $\dot{\phi}$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{Lp_x - p_\phi\cos\phi}{mL(2-\cos^2\phi)} \\ \dot{\phi} &= \frac{-Lp_x\cos\phi + 2p_\phi}{mL^2(2-\cos^2\phi)} \end{aligned} \tag{5.5}$$

A questo punto l'Hamiltoniana è data da

$$H(p_x, p_\phi, x, \phi) = p_x\dot{x} + p_\phi\dot{\phi} - L(\dot{x}, \dot{\phi}, x, \phi),$$

dove bisogna sostituire a $\dot{x}$ e $\dot{\phi}$ i valori delle espressioni 5.5. Il lettore completi i calcoli (per una strada leggermente più veloce vedi sezione 6).

L'espressione dell'Hamiltoniana è:

$$H = \frac{1}{2mL^2(2-\cos^2\phi)}(p_x^2L^2 - 2p_xp_\phi L\cos\phi + 2p_\phi^2) - mgL\cos\phi.$$

Il lettore verifichi che tutti i termini hanno le dimensioni di una energia.

Le equazioni del moto in formalismo hamiltoniano sono

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}\\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi}\\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x}\\ \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Si ottiene

$$\begin{gathered}\dot{x} = \frac{Lp_x - p_\phi\cos\phi}{mL(2-\cos^2\phi)}\\ \dot{\phi} = \frac{-Lp_x\cos\phi + 2p_\phi}{mL^2(2-\cos^2\phi)}\\ \dot{p}_x = 0\\ \dot{p}_\phi = -mgL\sin\theta - 2\frac{\sin\phi\cos\phi}{mL^2(2-\cos^2\phi)^2}(p_x^2L^2 - 2p_xp_\phi L\cos\phi + 2p_\phi^2) + \frac{\sin\phi p_x p_\phi}{mL(2-\cos^2\phi)}.\end{gathered} \tag{5.7}$$

5.1.6 La determinazione degli equilibri

Astrattamente, le posizioni di equilibrio in formalismo lagrangiano si ottengono dalle equazioni trovando i valori di $x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}$ che risolvono identicamente le equazioni. Ovviamente, essendo il sistema di partenza meccanico, deve essere $(\dot{x}, \dot{\phi}) = (0, 0)$. Sostituendo questi valori nelle equazioni, le posizioni di equilibrio si ottengono cercando i valori di x e ϕ per cui $\ddot{x}$ e $\ddot{\phi}$ sono nulli. E' facile rendersi conto che ciò accade se e solo se

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x,\phi)}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial V(x,\phi)}{\partial \phi} &= 0.\end{aligned} \tag{5.8}$$

In definitiva le posizioni di equilibrio si ottengono annullando il gradiente, rispetto alle coordinate lagrangiane, dell'energia potenziale. In questo caso V non dipende da x, dunque la condizione si riduce a $\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = mgL\sin\phi = 0$, che ha come soluzioni $\phi = 0, \pi$. (Trascuro i multipli di 2π perché fisicamente le posizioni $\phi = 0, 2\pi, 4\pi$, *etc.* sono indistinguibili). Quante sono le posizioni di equilibrio? Ovviamente infinite! Infatti, qualunque sia $\bar{x}$, le posizioni $(x,\phi) = (\bar{x}, 0)$ e $(x,\phi) = (\bar{x}, \pi)$ sono di equilibrio: l'asta è verticale e nessuna forza attiva la sposta se la velocità iniziale è nulla.

5.1.7 La stabilità delle posizioni di equilibrio

I punti di minimo stretto dell'energia potenziale sono punti di equilibrio stabili, i punti non di minimo (punti di sella e punti di massimo) sono punti di equilibrio instabili.

È abbastanza evidente che quando $(x,\phi) = (\bar{x}, \pi)$, essendo l'asta verticale ma con l'estremo Q in alto rispetto a P, la posizione è instabile. Infatti l'energia potenziale $V(x,\phi) = -mg\cos\phi$ ha un massimo nella variabile ϕ quando $\phi = \pi$. V non dipende da x, ma questo implica solo che il massimo di V come funzione di due variabili ha un massimo non stretto, nel senso che è raggiunto qualunque sia x.

Le altre posizioni $(x,\phi) = (\bar{x}, 0)$ corrispondono al minimo di V nella variabile ϕ. In questo caso però il minimo non è stretto, infatti qualunque sia $\bar{x}$, l'energia potenziale assume il valore di minimo. Questo suggerisce che la posizione sia instabile. Infatti consideriamo un dato iniziale aribitrariamente vicino, per esempio $(x_0, \phi_0, \dot{x}_0, \dot{\phi}_0) = (\bar{x}, 0, \varepsilon, 0)$. La prima equazione di Lagrange mi dice che l'impulso di conserva (x è ciclica). Dunque, per tutti i tempi:

$$2\dot{x} + L\dot{\phi}\cos\phi = 2\varepsilon.$$

Fisicamente, p_x è la quantità di moto totale (verificare!), ovvero la derivata rispetto al tempo della velocità del baricentro. Ma allora l'equazione appena scritta afferma che il baricentro compie un moto rettilineo uniforme. Quindi se aspetto un tempo sufficiente, il baricentro sarà arbitrariamente lontano dalla posizione iniziale che era

$\bar{x}$. Più formalmente, integrando nel tempo l'equazione appena scritta, e ricordandomi che $\dot{\phi}\cos\phi = -\frac{d}{dt}\sin\phi(t)$, ottengo

$$x(t) = \bar{x} + \varepsilon t + \frac{L}{2}\sin(\phi(t)).$$

Ma allora $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \pm\infty$ (a seconda del segno di ε), infatti qualunque sia la legge oraria per $\phi(t)$, la funzione $\sin(\phi(t))$ è limitata.

5.1.8 Le piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili

Non ci sono posizioni di equilibrio stabili, quindi non ha senso parlare di piccole oscillazioni del moto nelle due variabili. Si potranno considerare le piccole oscillazioni del moto unidimensionale al quale posso ridurre il moto per la conservazione della quantità di moto.

5.1.9 Gli integrali primi e la riduzione dei gradi di libertà

La Lagrangiana non dipende dal tempo, dunque l'energia meccanica $E = T + V$ si conserva.

Inoltre, come già visto, l'equazione di Lagrange relativa ad x, afferma che

$$\frac{d}{dt}p_x = \frac{d}{dt}(2m\dot{x} + mL\dot{\phi}\cos\phi) = 0.$$

Infatti la variabile x è *ciclica*, cioè L non dipende da x. Quindi p_x, che nel seguito indico con P, si conserva.

Avendo a disposizione due integrali primi per un problema a due gradi di libertà, posso ridurre ad uno i gradi di libertà e portare il moto alle quadrature (cioè scrivere, almeno in forma implicita, la soluzione delle equazioni del moto).

Si procede cosí: scrivo l'energia meccanica, che è una quantità conservata:

$$E = \frac{m}{2}(2\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}\dot{x}L\cos\phi + L^2\dot{\phi}^2) - mgL\cos\phi$$

Usando la relazione

$$P = 2m\dot{x} + mL\dot{\phi}\cos\phi,$$

ricavo

$$\dot{x} = \frac{P}{2m} - \frac{L}{2}\dot{\phi}\cos\phi. \tag{5.9}$$

Sostituisco il valore trovato nell'espressione per E:

$$E = \frac{m}{2}\left(L^2\dot{\phi}^2\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\phi\right) + \frac{P^2}{2m^2}\right) - mg\cos\phi.$$

Poiché E si conserva anche dopo aver sostituito a $\dot{x}$ la sua espressione in termini di $\dot{\phi}$ e dell'altro integrale primo del moto, dall'espressione di E posso ottenere la formula di quadratura attraverso il solito procedimento: ricavo $\dot{\phi}$ in termini di E e ϕ e integro.

$$\dot{\phi} = \pm 2\sqrt{\frac{E - \frac{P^2}{4m} + mgL\cos\phi}{2 - \cos^2\phi}}, \tag{5.10}$$

$$t = \pm\frac{1}{2}\int^{\phi} d\phi\sqrt{\frac{2 - \cos^2\phi}{E - \frac{P^2}{4m} + mgL\cos\phi}}. \tag{5.11}$$

Questa espressioni differiscono da quelle tipiche dei moti unidimensionale solo per la presenza del fattore $2 - \cos^2\phi$, che comunque è sempre postivo. Dunque per l'analisi qualitativa del moto limitata alla variabile ϕ si procede come sempre.

In particolare, se l'energia meccanica e l'impulso P sono tali che

a) $E - \frac{P^2}{4m} = -mgL$: $\phi(t) = 0$ (equilibrio STABILE per il moto nella sola variabile ϕ)

b) $-mgL < E - \frac{P^2}{4m} < mgL$: il moto in ϕ è periodico.

c) $E - \frac{P^2}{4m} = mgL$: o $\phi(t) = \pi$ (equilibrio INSTABILE), oppure ϕ compie un moto a meta asintotica.

d) $E - \frac{P^2}{4m} > mgL$: ϕ compie periodicamente tutta la rotazione tra 0 e 2π.

Domande: Perché non è possibile che $E - \frac{P^2}{4m} < -mgL$? Scrivi il periodo nei casi b) e d). (*) Calcola il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile $\phi = 0$ e confrontalo con in periodo delle piccole oscillazioni che avresti nel caso che l'altro estremo dell'asta fosse fisso (risposta: è $\sqrt{2}$ volte più grande).

Osservazione: Ai fini dell'analisi qualitativa, limitata alla variabile ϕ, potevo sostituire $E - \frac{P^2}{4m}$ con E, infatti $\frac{P^2}{4m}$ è costante. L'ho lasciato com era per non perdere traccia dell'energia meccanica del sistema nelle due variabili.

Una volta noto, attreverso la formula di quadratura 5.11, il moto nella variabile ϕ, l'equazione 5.9 mi dice come è il moto nella variabile x. Infatti, integrando rispetto al tempo:

$$x(t) = x(0) + \frac{P}{2m}t + \frac{L}{2}(\sin(\phi(t)) - \sin(\phi(0))).$$

A questo punto si può rispondere anche ad altre eventuali domande:

a) Per quali valori iniziali il moto è limitato?

b) Trova almeno un moto periodico.

c) È possibile che l'asta rimanga verticale per tutti i tempi? In tal caso il sistema si può muovere? E che moto fà?

Risposte:

a) Se e solo se $P = 0$.

b) Il moto è periodico se $P = 0$ e $E \neq \pm mgL$.

c) Si, si, rettilineo uniforme.

5.1.10 La versione Hamiltoniana

Nelle equazioni di Hamilton che ho già scritto, c'è già la riduzione del grado di libertà. Infatti le equazioni per p_x e x mi dicono che p_x si conserva (x è ciclica) e che la derivata rispetto al tempo di x dipende solo dalla costante p_x e dal moto nella variabile ϕ. Le equazioni per ϕ dipendono solo dalla costante p_x. Ma allora posso pensare direttamente ad $H(p_x, p_\phi, \phi)$ come ad una Hamiltoniana ad un grado di libertà (ϕ), con p_x parametro.

Potrei a questo punto fare la trasformazione inversa nelle sole variabili p_ϕ, $\dot{\phi}$ per riottenere la lagrangiana unidimensionale. In realtà si può procedere all'analisi qualitativa del moto in ϕ e ottenere la formula di quadratura, direttamente nel formalismo Hamiltoniano. Infatti la stessa H è un integrale primo del moto (si conserva perché non dipende dal tempo, e infatti coincide con l'energia meccanica scritta in variabili hamiltoniane). Ma allora dall'espressione di H posso ricavare p_ϕ in termini di ϕ , e sostituendo tale espressione nell' equazione per $\dot{\phi}$ ottenere finalmente $\dot{\phi}$ in funzione degli integrali primi e della sola coordinata ϕ. Per esercizio verifica che ottieni gli stessi risultati della sezione precedente.

5.2 Problema

Un punto materiale di massa m, indicato con P, si muove senza attrito su una retta orizzontale. Un asta priva di massa e lunga L ha un estremo in P. All'altro estremo è fissato un punto materiale di massa m, indicato con Q. Sul sistema agisce la forza di gravità, nella direzione verticale discendente; inoltre una molla di costante elastica k lega il punto materiale P ad un punto fisso O della retta.

Evidentemente questo problema differisce dal precedente solo per la presenza della molla. Dunque per la Lagrangiana e l'Hamiltoniana devo solo aggiungere il contributo dell'energia potenziale della molla, che è $\frac{1}{2}kx^2$.

Quindi:

$$L = \frac{m}{2}(2\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}\dot{x}L\cos\phi + L^2\dot{\phi}^2) + mgL\cos\phi - \frac{1}{2}kx^2.$$

$$H = \frac{1}{2mL^2(2-\cos^2\phi)}(p_x^2L^2 - 2p_xp_\phi L\cos\phi + 2p_\phi^2) - mgL\cos\phi + \frac{1}{2}kx^2.$$

La presenza di questo ulteriore termine ha come conseguenza che il problema non è più invariante per traslazioni (e infatti x in questo caso non è ciclica).

5.2.1 La determinazione degli equilibri e la loro stabilità

Il gradiente dell'energia è

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= kx \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= mgL \sin\phi, \end{aligned} \tag{5.12}$$

che è nullo se e solo se $x = 0$ e $\phi = 0,\ \pi$. Le posizioni di equilibrio sono dunque

$$\begin{aligned} &(1)\ \ (x,\ \phi) = (0,\ 0) \\ &(2)\ \ (x\ \phi) = (0,\ \pi). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Dal fatto che V sia la somma di due funzioni una dipendente solo da x e l'altra dipendente solo da ϕ, risulta evidente che (1) è il minimo assoluto dell'energia potenziale e (2) è un punto di sella. Dunque (1) è stabile e (2) è instabile. In ogni caso, procedo al calcolo della matrice Hessiana, che in questo caso chiamo W:

$$W(x, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V(x,\phi)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V(x,\phi)}{\partial x \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 V(x,\phi)}{\partial x \partial \phi} & \frac{\partial^2 V(\theta,\phi)}{\partial \phi^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgL\cos\phi \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

A questo punto la calcolo nelle posizioni di equilibrio e ne determino gli autovalori. Nel caso (1)

$$W = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

con autovalori k e mgL, entrambi positivi, dunque il punto è di minimo e quindi l'equilibro è stabile. Nel caso (2)

$$W = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -mgL \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

con autovalori k e $-mgL$, uno positivo e uno negativo, dunque il punto è di sella e quindi l'equilibro è instabile.

5.2.2 Le piccole oscillazioni intorno all'equilibrio stabile

(1) è la sola posizione di equilibrio stabile. Per procedere nel calcolo della frequenza delle piccole oscillazioni e dei modi normali devo considerare l'approssimazione quadratica dell'energia cinetica e dell'energia potenziale (vedi sezione 6).

Per l'energia cinetica è sufficiente calcolare la matrice cinetica, nella posizione di equilibrio $(0, 0)$. Chi è la matrice cinetica? È la matrice attraverso la quale esprimi l'energia cinetica. Puoi riscrivere l'energia cinetica come

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2m & Lm\cos\phi \\ Lm\cos\phi & L^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}.$$

La matrice cinetica che chiamo T (da non confondere con il T con cui precedentemente ho espresso il valore dell'energia cinetica), calcolata nella posizione di equilibrio è

$$T = \begin{pmatrix} 2m & -mL \\ -mL & mL^2 \end{pmatrix}.$$

Per l'energia potenziale è sufficiente calcolare la matrice Hessiana W nella posizione di equilibrio. Ho già svolto questo conto.

Il problema agli autovalori risolto dalle frequenze delle piccole oscillazioni è

$$\det(\omega^2 T(0, 0) - W(0, 0)) = 0, \tag{5.17}$$

ovvero

$$\det\begin{pmatrix} 2m\omega^2 - k & -mL\omega^2 \\ -mL\omega^2 & \omega^2 mL^2 - mgL \end{pmatrix} = 0, \tag{5.18}$$

che è l'equazione:

$$m^2L^2\omega^4 - \omega^2(2m^2g + kmL^2) + kmgL = 0,$$

che ha soluzioni:

$$\omega_\pm^2 = \frac{g}{L} + \frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{g^2}{L^2} + \frac{k^2}{4m^2}}.$$

Entrambi i valori sono positivi, come deve essere. Quindi ho trovato le frequenze.

Verifica che ω^2 ha le dimensioni fisiche del quadrato di una frequenza, cioè del quadrato dell'inverso del tempo. Per il calcolo dei corrispondenti autovettori, devo considerare i due sistemi:

$$\begin{pmatrix} 2m\omega_\pm^2 - k & -mL\omega_\pm^2 \\ -mL\omega_\pm^2 & \omega_\pm^2 mL^2 - mgL \end{pmatrix} \mathbf{z}_\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

uno per ogni scelta di ω^2. Il determinante della matrice è 0, quindi i vettori $z_\pm$ che verificano il sistema sono della forma:

$$const. \begin{pmatrix} mL\omega_\pm^2 \\ 2m\omega_\pm^2 - k \end{pmatrix}.$$

Osservo che per la scelta + entrambi i valori sono positivi, quindi l'oscillazione di questo modo normale, che è quello a frequenza più alta, prevede che x e ϕ abbiano lo stesso segno. Pee la scelta $-$, il termine $2m\omega_\pm^2 - k$ è negativo. Dunque per questo modo normale di oscillazione, quando x è positivo ϕ è negativo e viceversa.

5.2.3 Reazione vincolare

Calcolare la reazione dei vincoli si P e su Q nella configurazione $x = L$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\dot{x} = 0$ e $\dot{\phi} = 0$.

La teoria generale dei moti vincolati afferma che lungo il moto la massa per l'accelerazione (in coordinate cartesiane) di un punto uguaglia le forze attive più le reazioni vincolari. Nel nostro caso:

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{pmatrix} = \mathbf{F}_P + \mathbf{R}_P,$$

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x}_Q \\ \ddot{y}_Q \end{pmatrix} = \mathbf{F}_Q + \mathbf{R}_Q,$$

dove $\mathbf{F}_P$ è la risultante delle forze attive su P, $\mathbf{F}_Q$è la risultante delle forze attive su P, e R_P e R_Q sono le reazioni che i vincoli esercitano rispettivamente su P e su Q. Per trovare le espressioni di R_P e R_Q ho bisogno delle espressioni delle risultanti delle forze attive e delle accelerazioni in termini delle coordinate lagrangiane.

Procedo con il calcolo delle forze attive. Sul punto P agiscono due forze: la forza di gravità che è $\binom{0}{-mg}$ e la forza di richiamo della molla, che è $\binom{-kx}{0}$. Dunque $F_P = \binom{-kx}{-mg}$. Analogamente per Q: $F_Q = \binom{0}{-mg}$. Per il calcolo delle accelerazioni devo solo derivare rispetto al tempo le espressioni per le velocità che ho già trovato quando ho calcolato l'energia cinetica. Allora:

$$\begin{gathered} \ddot{x}_P = \ddot{x} \\ \ddot{y}_P = 0 \\ \ddot{x}_Q = \ddot{x} + L\ddot{\phi}\cos\phi - L\dot{\phi}^2\sin\phi \\ \ddot{y}_Q = L\ddot{\phi}\sin\phi + L\dot{\phi}^2\cos\phi \end{gathered} \tag{5.20}$$

A questo punto sostituisco a $\ddot{x}$ e $\ddot{\phi}$ le loro espressioni in termini di $\dot{x}$, $\dot{\phi}$, x, ϕ, che ottengo dalle equazioni del moto, che sono

$$\begin{gathered} 2m\ddot{x} + mL\ddot{\phi} - mL\dot{\phi}^2\sin\phi = -kx \\ mL^2\ddot{\phi} + mL\ddot{x}\cos\phi = -mgL\sin\phi. \end{gathered} \tag{5.21}$$

Risolvendo questo sistema in $\ddot{x}$ e $\ddot{\phi}$ ottieni:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{2-\cos^2\phi}(\dot{\phi}^2\sin\phi - \frac{k}{m}x + g\sin\phi\cos\phi)\\ \ddot{\phi} &= \frac{1}{L(2-\cos^2\phi)}(-L\dot{\phi}^2\sin\phi\cos\phi + \frac{k}{m}x\cos\phi - 2g\sin\phi)\end{aligned} \tag{5.22}$$

A questo punto puoi ottenere le espressioni per le reazioni vincolari. Faccio notare che le reazioni vincolari sono forze che dipendono dalla velocità.

Nel caso paricolare assegnato, essendo $\sin\phi = 1$, $\cos\phi = 0$ e $\dot{\phi} = 0$, le espressioni precedenti sono particolarmente semplici:

$$\begin{aligned}m\ddot{P} &= \begin{pmatrix}-\frac{kL}{2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-kL\\ -mg\end{pmatrix} + R_P\\ m\ddot{Q} &= \begin{pmatrix}-\frac{kL}{2}\\ -gm\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -mg\end{pmatrix} + R_Q.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Dunque la reazione vincolare su P è mg sull'asse verticale e $\frac{kL}{2}$ su quello orizzontale; la reazione su Q è $\frac{kL}{2}$ sull'asse orizzontale e nulla sull'asse verticale. Dai l'interpretazione fisica di questo fatto.

5.3 Problema

Un punto materiale di massa M è vincolato a muoversi senza attrito su una guida circolare verticale di raggio R e centro O. Un'asta di massa trascurabile, lunga L, è fissata al punto materiale ad un estremo.

i) Scrivi le equazioni del moto attraverso la Lagrangiana e l'Hamiltoniana

ii) Determina eventuali integrali primi.

iii) Determina le soluzioni di equilibrio e discutine la stabilità.

iv) Riduci i gradi di libertà se possibile.

5.3.1 I gradi di libertà e la scelta delle cooordinate

Devi capire di quanti parametri hai bisogno per descrivere una generica configurazione del sistema.

Per prima cosa bisogna capire dov'è il punto di massa M, che chiamerò P. Le sue due coordinate non sono indipendenti, infatti $x^2 + y^2 = R^2$. La scelta più ragionevole è usare l'angolo al centro che P forma con l'asse verticale discendente, che chiamerò θ. Dunque

$$\begin{aligned}x_P &= R\sin\theta\\ y_P &= -R\cos\theta.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Nota la posizione di P, per specificare la posizione del punto di massa m, che chiamerò Q, mi serve solo un'altra coordinata, per esempio l'angolo ϕ che l'asta forma con la verticale discendente per il punto P. Infatti

$$\begin{aligned}x_Q &= x_P + L\sin\phi = R\sin\theta + L\sin\phi\\ y_Q &= y_P - L\cos\phi = -R\cos\theta - L\cos\phi\end{aligned} \tag{5.25}$$

5.3.2 Il calcolo dell'energia cinetica

Individuate le coordinate, per il calcolo della Lagrangiana è necessario calcolare l'energia cinetica e l'energia potenziale in termini delle coordinate che hai scelto.

L'energia cinetica del sistema è la somma delle energie cinetiche di tutte le masse in gioco, in questo caso del punto P e del punto Q. In coordinate cartesiane:

$$T = \frac{M}{2}(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}_Q^2 + \dot{y}_Q^2).$$

Per scrivere T in nelle coordinate lagrangiane, devo calcolare le velocità. Per il punto P:

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= R\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_P &= R\dot{\theta}\sin\theta. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Quindi la sua energia cinetica è $\frac{M}{2}R^2\dot{\theta}^2$.

Per il punto Q:

$$\begin{aligned} \dot{x}_Q &= R\dot{\theta}\cos\theta + L\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{y}_Q &= R\dot{\theta}\sin\theta + L\dot{\phi}\sin\phi. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Quindi la sua energia cinetica è : $\frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + 2RL\dot{\theta}\dot{\phi}(\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi) + L^2\dot{\phi}^2)$. L'energia cinetica totale è:

$$T = \frac{1}{2}(M+m)R^2\dot{\theta}^2 + mRL\dot{\theta}\dot{\phi}(\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2.$$

5.3.3 Il calcolo dell'energia potenziale

Per calcolare l'energia potenziale è necessario individuare tutte le forze attive che agiscono sulle masse. Su P , l'unica forza attiva è la forza di gravità. L'energia potenziale di una massa M ad una quota y è Mgy. Dunque l'energia potenziale per le forze che agiscono su P è: $V_P = Mgy_P = -MgR\cos\theta$. L'energia potenziale per le forze che agiscono su Q è: $V_Q = mgy_Q = -mgR\cos\theta - mgL\cos\phi$.

In defintiva l'energia potenziale è :

$$V = -(M+m)gR\cos\theta - mgL\cos\phi.$$

5.3.4 La Lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange

La Lagrangiana è $L = T - V$, dunque:

$$L = \frac{1}{2}(M+m)R^2\dot{\theta}^2 + mRL\dot{\theta}\dot{\phi}(\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2 + (M+m)gR\cos\theta + mgL\cos\phi. \tag{5.28}$$

Per scrivere le equazioni del moto, devo prima derivare la lagrangiana nelle variabili $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$, e calcolare quindi gli *impulsi coniugati* alle variabili $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= (M+m)R^2\dot{\theta} + mRL\dot{\phi}(\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= mL^2\dot{\phi} + mRL\dot{\theta}(\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi). \end{aligned} \tag{5.29}$$

Ora devo considerare gli impulsi coniugati come funzioni del tempo attraverso le variabili θ, ϕ, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, e scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{\partial L}{\partial \phi}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Come prima equazione ottengo

$$\begin{aligned} &(M+m)R^2\ddot{\theta} + mRL\ddot{\phi}(\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi) + mRL\dot{\phi}\dot{\theta}(\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi) + \\ &+ mRL\dot{\phi}^2(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi) = mRL\dot{\theta}\dot{\phi}(\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi) + (M+m)gR\sin\theta. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Come seconda equazione ottengo

$$\begin{aligned} &mL^2\ddot{\phi} + mRL\ddot{\theta}(\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi) + mRL\dot{\theta}^2(\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi) + \\ &+ mRL\dot{\theta}\dot{\phi}(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi) = mRL\dot{\theta}\dot{\phi}(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi) + mgL\sin\phi. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Nota bene. La derivata rispetto al tempo dei momenti coniugati ha vari termini: termini lineari nelle derivate seconde rispetto al tempo, e termini quadratici nelle derivate prime rispetto al tempo. Per Lagrangiane "naturali" non ci posso essere termini lineari nelle derivate prime (vedi sezione 6, esercizio 6.1). Nei membri di destra delle equazioni, non ci sono solo le derivate dell'energia potenziale con il segno cambiato, ma anche le derivate rispetto alle variabili della parte cinetica.

5.3.5 L'Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton

Per il calcolo dell'Hamiltoniana si procede come segue. Per prima cosa si definiscono le nuove variabili, che sono gli impulsi coniugati:

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = (M+m)R^2\dot\theta + mRL\dot\phi(\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi) \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = mL^2\dot\phi + mRL\dot\theta(\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Dopo di che, si ricavano le espressioni di $\dot\theta$ e $\dot\phi$ in termini delle nuove variabili. Per fare questo si deve risolvere il sisitema di equazioni lineare 5.33 rispetto alle variabili $\dot\theta$ e $\dot\phi$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot\theta &= \frac{Lp_\theta - Rp_\phi(\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi)}{LR^2(M+m-m(\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi)^2)} \\ \dot\phi &= \frac{-mLp_\theta(\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi)+(M+m)Rp_\phi}{mL^2R(M+m-m(\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi)^2)} \end{aligned} \tag{5.34}$$

A questo punto l'Hamiltoniana è data da

$$H(p_\theta, p_\phi, \theta, \phi) = p_\theta\dot\theta + p_\phi\dot\phi - L(\dot\theta, \dot\phi, \theta, \phi),$$

dove bisogna sostituire a $\dot\theta$ e $\dot\phi$ i valori delle espressioni 5.34. Il lettore completi i calcoli.

Una strada leggermente più veloce è la seguente (vedi sezione 6). Esplicito l'energia cinetica nella Lagrangiana come forma quadratica.

$$L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot\theta \\ \dot\phi\end{pmatrix} T(\theta,\phi)\begin{pmatrix}\dot\theta \\ \dot\phi\end{pmatrix} - V(\theta,\phi),$$

dove T è la *matrice cinetica*

$$T(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} (M+m)R^2 & mRL(\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi) \\ mRL(\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi) & mL^2 \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

A questo punto l'Hamiltoniana è data da:

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}p_\theta \\ p_\phi\end{pmatrix} T^{-1}(\theta,\phi)\begin{pmatrix}p_\theta \\ p_\phi\end{pmatrix} + V(\theta,\phi),$$

dove T^{-1} è l'inversa di T. Il calcolo dell'inversa della matrice è assolutamente standard. In realtà l'ho già calcolata prima, quando ho trovato $(\dot\theta, \dot\phi)$ in funzione di (p_θ, p_ϕ). Infatti

$$\begin{pmatrix}p_\theta \\ p_\phi\end{pmatrix} = T(\theta,\phi)\begin{pmatrix}\dot\theta \\ \dot\phi\end{pmatrix},$$

quindi

$$\begin{pmatrix}\dot\theta \\ \dot\phi\end{pmatrix} = T^{-1}(\theta,\phi)\begin{pmatrix}p_\theta \\ p_\phi\end{pmatrix}.$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} &T^{-1}(\theta,\phi) = \\ &\frac{1}{L^2R^2(M+m-m(\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi)^2)}\begin{pmatrix} L^2 & -RL(\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi) \\ -RL(\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi) & (M+m)R^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Dunque l'Hamiltoniana è:

$$\begin{aligned} H = &\frac{1}{2L^2R^2(M+m-m(\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi)^2)}\left(L^2p_\theta^2 - 2RL(\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi)p_\theta p_\phi + (M+m)R^2p_\phi^2\right) + \\ &-(M+m)gR\cos\theta - mgL\cos\phi. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Le equazioni del moto in formalismo hamiltoniano sono

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi}.\end{aligned} \tag{5.38}$$

Il lettore completi i calcoli.

5.3.6 La determinazione degli equilibri

Astrattamente, le posizioni di equilibrio in formalismo lagrangiano si ottengono dalle equazioni trovando i valori di $\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ che risolvono identicamente le equazioni. Ovviamente, essendo il sistema di partenza meccanico, deve essere $(\dot{\theta}, \dot{\phi}) = (0, 0)$. Sostituendo questi valori nelle equazioni, le posizioni di equilibrio si ottengono cercando i valori di θ e ϕ per cui $\ddot{\theta}$ e $\ddot{\phi}$ sono nulli. E' facile rendersi conto che ciò accade se e solo se

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(\theta, \phi)}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial V(\theta, \phi)}{\partial \phi} &= 0.\end{aligned} \tag{5.39}$$

In definitiva le posizioni di equilibrio si ottengono annullando il gradiente, rispetto alle coordinate lagrangiane, dell'energia potenziale. In questo caso:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(\theta, \phi)}{\partial \theta} &= (M+m) g R \sin\theta = 0 \\ \frac{\partial V(\theta, \phi)}{\partial \phi} &= m g L \sin\phi = 0.\end{aligned} \tag{5.40}$$

Le soluzioni sono $\theta = 0,\, \pi$ e $\phi = 0,\, \pi$. Dunque le posizioni di equilibrio sono:

$$\begin{gathered}(1)\;\; (\theta,\, \phi) = (0,\, 0) \\ (2)\;\; (\theta,\, \phi) = (0,\, \pi) \\ (3)\;\; (\theta,\, \phi) = (\pi,\, 0) \\ (4)\;\; (\theta,\, \phi) = (\pi,\, \pi).\end{gathered} \tag{5.41}$$

NB: il sistema è fisicamente periodico, nel senso che la posizione $\theta = 2\pi$ è la stessa di $\theta = 0$ e cosí via, quindi mi limito a considerare i valori tra 0 e 2π.

5.3.7 La stabilità delle posizioni di equilibrio

I punti di minimo dell'energia potenziale sono punti di equilibrio stabili, i punti non di minimo (punti di sella e punti di massimo) sono punti di equilibrio instabili.

Un modo possibile per determinare se un punto critico di V (cioè un punto in cui ∇V è nullo) è di minimo oppure no, è quello di calcolare la matrice Hessiana e determinarne il segno degli autovalori.

Procedo al calcolo della matrice Hessiana, che in questo caso chiamo W per non confonderla con H con cui ho indicato l'Hamiltoniana.

$$W(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V(\theta,\phi)}{\partial^2 \theta} & \frac{\partial^2 V(\theta,\phi)}{\partial \theta \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 V(\theta,\phi)}{\partial \theta \partial \phi} & \frac{\partial^2 V(\theta,\phi)}{\partial^2 \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M+m) g \cos\theta & 0 \\ 0 & m g \cos\phi \end{pmatrix}. \tag{5.42}$$

A questo punto la calcolo nelle posizioni di equilibrio e ne determino gli autovalori.

Caso (1):

$$W = \begin{pmatrix} (M+m)g & 0 \\ 0 & mg \end{pmatrix}, \tag{5.43}$$

con autovalori $(M+m)g$ e mg, entrambi positivi, dunque il punto è di minimo e quindi l'equilibro è stabile.

Caso (2):

$$W = \begin{pmatrix} (M+m)g & 0 \\ 0 & -mg \end{pmatrix},$$

con autovalori $(M+m)g$ e $-mg$, uno negativo e uno positivo, dunque il punto è di sella e quindi l'equilibro è instabile.

Caso (3):

$$W = \begin{pmatrix} -(M+m)g & 0 \\ 0 & mg \end{pmatrix},$$

con autovalori $-(M+m)g$ e mg, uno negativo e uno positivo, dunque il punto è di sella e quindi l'equilibro è instabile.

Caso (4):

$$W = \begin{pmatrix} -(M+m)g & 0 \\ 0 & -mg \end{pmatrix},$$

con autovalori $-(M+m)g$ e $-mg$, entrambi negativi, dunque il punto è di massimo e quindi l'equilibro è instabile.

5.3.8 Le piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabili

Cè una sola posizione di equilibrio stabile, è la (1). Per calcolare il moto delle piccole oscillazioni si può procedere scrivendo per prima cosa la Lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio. Bisogna scrivere l'approssimazione al secondo ordine dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. Per l'energia cinetica è sufficiente calcolare la matrice cinetica, definita nell'equazione 5.35, nella posizione di equilibrio $(0,0)$. Per l'energia potenziale è sufficiente calcolare la matrice Hessiana W nella posizione di equilibrio. Ho già svolto questo conto nell'equazione 5.43. In definitiva la Lagrangiana delle piccole oscillazioni è data da

$$L_{po} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M+m)R^2 & mRL \\ mRL & mL^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot\phi \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M+m)g & 0 \\ 0 & mg \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}. \tag{5.44}$$

Il problema agli autovettori da risolvere è

$$\det(\omega^2 T(0,0) - W(0,0)) = 0, \tag{5.45}$$

ovvero

$$\det \begin{pmatrix} \omega^2(M+m)R^2 - (M+m)g & \omega^2 mRL \\ \omega^2 mRL & \omega^2 mL^2 - mg \end{pmatrix} = 0. \tag{5.46}$$

Il calcolo è un pò complicato ma non presenta nessuna difficoltà concettuale. Per diminuire la fatica, conviene ricordarsi che il determinante è una funzione lineare delle singole righe. In particolare se moltiplico una sola riga per un numero anche il determinante sarà moltiplicato per lo stesso numero. Ma allora mi conviene dividere per $(M+m)R^2$ la prima riga e per mL^2 la seconda. Ovviamente i valori di ω^2 non cambiano. Introduco anche i parametri $\alpha = \frac{R}{L}$, $\nu^2 = \frac{g}{R^2}$ e $\mu = \frac{m}{M+m}$. L'equazione agli autovalori diventa:

$$\det \begin{pmatrix} \omega^2 - \nu^2 & \omega^2 \frac{\mu}{\alpha} \\ \omega^2 \alpha & \omega^2 - \nu^2\alpha^2 \end{pmatrix} = 0. \tag{5.47}$$

Quindi:

$$(1-\mu)\omega^4 - \nu^2(1+\alpha^2)\omega^2 + \alpha^2\nu^4 = 0,$$

che ha le due soluzioni

$$\omega_\pm^2 = \nu^2 \frac{1+\alpha^2 \pm \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\alpha^2\mu}}{2(1-\mu)}.$$

Tenedendo presente che $\mu < 1$, si riconosce che $\omega^2 > 0$ in entrambi i casi. Per il calcolo dei corrispondenti autovettori, dovrei considerare i due sistemi:

$$\begin{pmatrix} \omega_\pm^2 - \nu^2 & \omega_\pm^2 \frac{\mu}{\alpha} \\ \omega_\pm^2 \alpha & \omega_\pm^2 - \nu^2 \alpha^2 \end{pmatrix} \mathbf{z}_\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.48}$$

dove le incognite sono i due vettori $\mathbf{z}_\pm$. Il determinate della matrice è nullo, dunque per determinare il vettore mi basta considerare, ad esempio, la seconda riga. Non normalizzando, posso sceglire:

$$\mathbf{z}_\pm = \begin{pmatrix} \alpha\nu^2 - \omega_\pm^2 \\ \alpha\omega_\pm^2 \end{pmatrix}.$$

che sono i modi normali di oscillazione.

5.3.9 Gli integrali primi e la riduzione dei gradi di libertà

La Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, dunque l'energia meccanica si conserva. D'altra parte non ci sono variabili cicliche, né evidenti simmetrie del problema. Non avendo a disposizione altri integrali primi non posso procedere alla riduzione dei gradi di libertà.

5.3.10 Il controllo dimensionale

Il problema assegnato è formulato in modo dimensionalmente consistente, infatti R e L sono due lunghezze, M e m sono due masse e g è l'accelerazione di gravità che ha dimensioni fisiche $[L/T^2]$ (lunghezza diviso tempo a quadrato). Quindi anche i calcoli che avete fatto devono essere coerenti nelle dimensioni fisiche. Si può verificare che l'energia cinetica e l'energia potenziale hanno effettivamente le dimensioni fisiche di un'energia, etc. . In particolare le frequenze delle piccole oscillazioni sono delle frequenze. Infatti i parametri μ e α sono adimensionali, mentre il parametro ν^2 ha le dimensioni di $[g/R^2] = [1/T^2]$, cioè di una frequenza al quadrato.

5.4 Problema

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di equazione $z = -\sqrt{l^2 + x^2 + y^2}$. Il punto è all'estremo di una molla di costante elastica k, che ha l'altro estremo fissato nell'origine. Sul punto agisce anche la forza di gravità, verso la direzione negativa dell'asse delle z.

Questo esercizio è uno delle infinite varianti del moto centrale. Infatti la superficie su cui è vincolato a muoversi il punto è invariante per rotazioni intorno all'asse z, e lo stesso invarianti sono i due campi di forza. Ovviamente tale invarianza implicherà la conservazione del momento della quantità di moto.

5.4.1 Scelta delle coordinate ed equazioni del moto

L'invarianza per rotazioni intorno all'asse z suggerisce di utilizzare coordinate polari. Sia r la distanza dall'origine della proiezione del punto sul piano (x, y), cioè $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sia ϕ l'angolo che la congiungente dell'origine con la proiezione forma con l'asse delle x nella direzione positiva. Con queste due coordinate posso descrivere il sistema: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = -\sqrt{l^2 + r^2}$. Il calcolo delle velocità dà:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{z} &= -\tfrac{r\dot{r}}{\sqrt{l^2+r^2}} \end{aligned} \tag{5.49}$$

Il calcolo dell'energia cinetica dà:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\frac{l^2 + 2r^2}{l^2 + r^2} + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2.$$

L'energia potenziale ha due contributi: la forza di gravità che dà il contributo $-mg\sqrt{l^2 + r^2}$ e la molla che dà il contributo $\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}k(l^2 + 2r^2)$. Elimino il termine l^2 perchè non contribuisce alla determinazione del moto. In sintesi la lagrangiana è:

$$L = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \frac{l^2 + 2r^2}{l^2 + r^2} + \frac{1}{2} mr^2\dot{\phi}^2 + mg\sqrt{l^2 + r^2} - kr^2.$$

L'Hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2m} p_r^2 \frac{l^2 + r^2}{l^2 + 2r^2} + \frac{1}{2mr^2} p_\phi^2 - mg\sqrt{l^2 + r^2} + kr^2.$$

Il lettore proceda al calcolo delle equazioni del moto.

5.4.2 Posizioni di equilibrio

La derivata dell'energia potenziale, che dipende solo da r, è $\dfrac{\partial V}{\partial r} = -mgr\frac{1}{\sqrt{l^2+r^2}} + 2kr$. Dunque $r = 0$ è un equilibrio, qualunque sia ϕ. Altri equilibri esistono se e solo se: $\sqrt{l^2 + r^2} = \frac{mg}{2k}$. Quindi $r^2 = l^2\left(\left(\frac{mg}{2kl}\right)^2 - 1\right)$. L'equilibrio esiste se e solo se $\frac{mg}{2kl} \geq 1$. Ovviamente solo il valore positivo di r è accettabile, in quanto r è una variabile positiva. Sia $\bar{r} = l\sqrt{\left(\left(\frac{mg}{2kl}\right)^2 - 1\right)}$ quando esiste reale.

Quante sono le posizioni di equilibrio? Il potenziale non dipende da ϕ, quindi qualunque sia $\bar{\phi}$ $(0, \bar{\phi})$ e $(\bar{r}, \bar{\phi})$ sono posizioni di equilibrio. D'altra parte se $r = 0$, qualunque sia $\bar{\phi}$ fisicamente $(0, \bar{\phi})$ è l'origine del piano. Dunque se $\frac{mg}{2kl} \leq 1$ c'è solo una posizione di equilibrio, l'origine del piano; se $\frac{mg}{2kl} > 1$ esistono altre infinite posizioni di equilibrio a distanza $\bar{r}$ dall'origine.

Sviluppano con Taylor al secondo ordine V intorno a 0 si ottiene $V(r) = -mgl^2 + kr^2\left(1 - \frac{mg}{2kl}\right)$. Dunque è stabile se $\frac{mg}{2kl} < 1$ ed è instabile se $\frac{mg}{2kl} > 1$. Considerando anche i termini r^4 si ottiene che il l'origine è stabile anche per $\frac{mg}{2kl} = 1$.

Le altre infinite posizioni di equilibrio, quando esistono, sono instabili pur essendo dei minimi per V considerato nella sola variabile r. Infatti come funzione di (r, ϕ), sono dei minimi non stretti. La conservazione del momento della quantità di moto permette di costruire dati inziali arbitrariamente vicini all'equilibrio che si allontanano. Per esercizio dai la dimostrazione di questo fatto usando il metodo utilizzato nel problema 5.1.

Per $\frac{mg}{2kl} < 1$ posso calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni. Però se procedo come sempre mi accorgo che la matrice cinetica nel punto di equilibrio vale

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.50}$$

che è solo semidefinita positiva, avendo un autovalore nullo. D'altra parte la matrice Hessiana è

$$\begin{pmatrix} k(1 - \frac{mk}{2kl}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.51}$$

Quindi si trova un valore di una sola frequenza che è $\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{2l}}$. Dovè finita l'altra? Perchè il problema è degenere? Come si procedere correttamente?

Il fatto è che l'uso delle coordinate polare è regolare solo per $r > 0$. In questo caso siamo in $r = 0$, dunque per procedere correttamente, bisogna riscrivere la Lagrangiana in altre coordinate, per esempi (x, y), e studiare le piccole oscillazioni in $(0, 0)$. Il lettore proceda nel calcolo e verifichi che tutte e due frequenze di oscillazione sono uguali a $\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{2l}}$, e che ogni direzione (x, y) è una direzione normale di oscillazione. Inoltre provi per esercizio che le orbite delle piccole oscillazioni sono ellissi con il centro nell'origine.

5.4.3 Riduzione dei gradi di libertà e analisi qualitativa

L'invarianza per rotazioni ha come conseguenza che la variabile ϕ è ciclica. Dunque il momento coniugato si conserva: $P = p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ è un integrale primo del moto. Sostituendolo nell'espressione dell'energia meccanica si ottiene:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \frac{l^2 + 2r^2}{l^2 + r^2} + \frac{1}{2mr^2} P^2 - mg\sqrt{l^2 + r^2} + kr^2.$$

Indico con $V_e = +\frac{1}{2mr^2}P^2 - mg\sqrt{l^2+r^2} + kr^2$, l'energia potenziale efficace. La derivata di V_e è:

$$V_e' = -\frac{P^2}{mr^3} - r\frac{mg}{\sqrt{l^2+r^2}} + 2kr.$$

Come spesso accade la soluzione esplicita di $V_e'(r) = 0$ non sembra essere possibile esplicitamente (esce un'equazione in r^8, r^4 e r^2). Bisogna tentare di capire qualitativamente se esistono soluzioni. L'equazione è:

$$\frac{P^2}{mr^4} = k - \frac{mg}{\sqrt{l^2+r^2}}.$$

Disegnando il grafico delle due funzioni si capisce che esiste sempre una posizione di equilibrio. Inoltre è unica perché la funzione a sinistra è decrescente e la funzione a destra è crescente.

Disegnando il grafico dell'energia potenziale efficace si vede che l'equilibrio è un minimo, quindi è stabile.

Il lettore completi l'esercizio scrivendo le formule di quadratura per il moto complessivo, e discuta qualitativamente il moto.

5.4.4 La rappresentazione dell'orbita

Come in tutti i casi di potenziali centrali, può essere utile determinare l'orbita nelle variabili (r, ϕ), cioè la funzione $r(\phi)$.

Si procede nel modo seguente. Dalla relazione $\dot{\phi} = \frac{P}{mr^2}$ si scopre che la funzione $t \to \phi$ è strettamente monotona (crescente se P è positivo). Ma allora: $\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \phi}\dot{\phi}$. Quindi

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = \frac{mr^2}{P}\dot{r} = \pm\frac{mr^2}{P}\sqrt{\frac{2}{m}\frac{l^2+r^2}{l^2+2r^2}(E - V_e(r))}.$$

Da cui si ottiene l'espressione implicita per l'orbita:

$$\phi = \pm\int^r dr\frac{P}{mr^2}\sqrt{\frac{m}{2}\frac{l^2+2r^2}{l^2+r^2}}\frac{1}{\sqrt{E - V_e(r)}}.$$

5.4.5 Domande varie

a) Trova almeno due famiglie di moti periodici.

b) Determina le condizioni iniziali tali che il punto passi per $r = 0$.

c) Studia qualitativamente il moto per i dati iniziali tali che $\dot{\phi}_0 = 0$.

d) (**) Scrivere le equazioni del moto nel caso in cui sul punto materiale agisca una forza di attrito proporzionale alla velocità e diretta nel verso opposto della velocità stessa. Provare che l'energia meccanica decresce. Decresce anche il momento della quantità di moto?

Studiare il limite di $r(t)$ per $t \to +\infty$ al variare dei dati iniziali.

5.5 Problema

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di un toro, di equazione parametrica

$$\begin{aligned} x &= (L + R\sin\theta)\cos\phi \\ y &= (L + R\sin\theta)\sin\phi \\ z &= R\cos\theta, \end{aligned} \tag{5.52}$$

con $R < L$. La superficie assegnata è un toro in $\mathbb{R}^3$.

Caso 1 La forza di gravità agisce lungo l'asse delle z nella direzione discendente.

Caso 2 La forza di gravità agisce lungo l'asse delle x nella direzione decrescente.

Caso 3 La forza di gravità è trascurabile.

Per tutti e tre i casi:

a) Scrivi le equazioni del moto.

b) Determina eventuali integrali primi.

c) Determina le soluzioni di equilibrio e discutine la stabilità.

d) Riduci i gradi di libertà se possibile e analizza qualitativamenteil moto.

e) Nei casi 1) e 3) si considerino i moti di momento della quantità di moto non nullo. Si provi che tra essi, in entrambi i casi, esistono due moti periodici distinti. Si trovi inoltre almeno un'altra famiglia di dati iniziali per cui il moto è periodico.

f) Nel caso 1) si consideri il moto periodico di momento assegnato e si calcoli la reazione del vincolo durante il moto.

6 Le Lagrangiane e le Hamiltoniane "tipiche"

Una Lagrangiana che si ottiene da un sistema fisico conservativo in un sistema di riferimento inerziale, con forze puramente posizionali e vincoli perfetti bilateri è sempre del tipo

$$L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}} \cdot T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} - V(\mathbf{x}),$$

dove $T(\mathbf{x})$ è una matrice simmetrica e definita positiva, e $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$ sono in $\mathbb{R}^n$. Le equazioni del moto si possono sinteticamente scrivere come

$$\frac{d}{dt}(T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}) = -\nabla V(\mathbf{x}).$$

Esercizio 6.1 *Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ una funzione regolare da $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^n$, con $k < n$. Sto pensando che $\mathbf{x}$ sono le coordinate cartesiane e che $\mathbf{q}$ siano le coordiante lagrangiane necessarie per descrivere i vincoli che deve soddisfare $\mathbf{x}$. Assumo inoltre che le $\mathbf{q}$ siano delle buone coordinate, cioè la matrice $\frac{\partial x}{\partial q}$ abbia sempre rango massimo (in questo caso k). Prova che*

a)

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}},$$

(ovviamente è un prodotto righe per colonne).

b)

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},$$

dove la matrice cinetica è data da

$$T(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right)^t \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}},$$

(^{t} indica la matrice trasposta).

c) *La matrice T è simmetrica e definita positiva.*

Esercizio 6.2 *Verifica che data una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$, vale $\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.*

Il pasaggio all'Hamiltoniana è semplice. Infatti il vettore degli impulsi coniugati è dato da:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}},$$

ed essendo T definita positiva, in particolare è invertibile. Dunque

$$\dot{\mathbf{x}} = T(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{p}.$$

Ma allora l'Hamiltoniana è data da:

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}} \cdot T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + V(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \cdot T(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{p} - \frac{1}{2}\left(T(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{p}\right) \cdot T(\mathbf{x})T(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{p} + V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot T(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{p} + V(x).$$

Quindi per il calcolo dell'Hamiltoniana è sufficiente calcolare l'inversa della matrice T.

Esercizio 6.3 *Verifica che data una Hamiltoniana*

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot S(\mathbf{x})\mathbf{p} + V(x),$$

dove S è una matrice simmetrica e definita positiva, la corrispondente lagrangiana è data da

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}} \cdot S(\mathbf{x})^{-1}\dot{\mathbf{x}} - V(\mathbf{x}).$$

Esercizio 6.4 *Verifica che data una Hamiltoniana*

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot S(\mathbf{x})\mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) + V(x),$$

dove $S(\mathbf{x})$ è una matrice simmetrica e definita positiva, e $b(\mathbf{x})$è un vettore, la corrispondente lagrangiana è data da

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{b}(x)) \cdot S(\mathbf{x})^{-1}(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{b}(x)) - V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}} \cdot S(\mathbf{x})^{-1}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}} \cdot S(\mathbf{x})^{-1}b(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathbf{b} \cdot S(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{b} - V(\mathbf{x}).$$

Le equazioni del moto delle piccole oscillazioni intorno da una posizione di equilibrio stabile, si trovano linearizzando le equazioni del moto. Questo corrisponde a considerare l'approssimazione quadratica della lagrangiana intorno alla posizione di equilibrio.

Per Lagrangiane naturali del tipo $L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}} \cdot T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} - V(\mathbf{x})$ è molto semplice. Supponiamo che $\bar{\mathbf{x}}$ sia la posizione di equilibrio. Per prima cosa scrivo l'approssimazione quadratica dell'energia potenziale. La formula di Taylor in più variabili mi dice che

$$V(\mathbf{x}) = V(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla V(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot W(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + o(|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|^2).$$

Ora $V(\bar{\mathbf{x}})$ è un valore costante, dunque posso non scriverlo nella lagrangiana delle piccole oscillazioni. Il termine al primo ordine è nullo. Infatti $\bar{\mathbf{x}}$ è una posizione di equilibrio, dunque il gradiente dell'energia potenziale è nullo. Il primo termine significativo è il termine quadratico $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot W(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$, dove con $W(\bar{\mathbf{x}})$ ho indicato la matrice hessiana di V calcolata nel punto di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$. I termini successivi sono di ordine superiore, quindi li trascuro.

La variabile che compirà in questo caso è $\mathbf{y} = vex - \bar{\mathbf{x}}$, che infatti descrive la posizione rispetto all'equilibrio. In termini di $\mathbf{y}$ l'approssimazione quadratica dell'energia potenziale è $\frac{1}{2}\mathbf{y} \cdot W(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}$. L'energia cinetica nella variabile $\mathbf{y}$ è $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{y}} \cdot T(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y})\dot{\mathbf{y}}$, infatti $\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{x}}$. Sviluppando T in $\mathbf{y}$: $T(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y}) = T(\bar{\mathbf{x}}) + o(|\mathbf{y}|)$. Ma allora mi interessa solo l'ordine zero, infatti devo moltiplicare T per $\mathbf{y}$ due volte, quindi il termine è già almeno del secondo ordine.

In definitiva:

$$L_{po} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{y}} \cdot T(\bar{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{y}} - \frac{1}{2}\mathbf{y} \cdot W(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}.$$

Esercizio 6.5 *Calcola l'Hamiltoniana delle piccole oscillazioni.*

7 Bignamino di Formalismo Hamiltoniano

In questa sezione c'è un riassunto sulle trasformazioni canoniche, le funzioni generatrici, l'equazione di Hamilton-Jacobi, le variabili azione-angolo e la teoria delle perturbazioni. Sono argomenti su cui è facile fare esercizi in modo meccanico, ma è facile non capire di che si tratta. È il motivo per cui ripeto in sintesi i fatti della teoria e per cui si sono alcuni esercizi teorici.

7.1 Le trasformazioni canoniche

7.1.1 Il problema

Considera un Hamiltoninana $H(q, p, t)$, e una trasformazione regolare di coordinate

$$\begin{aligned} Q &= Q(q, p, t) \\ P &= P(q, p, t). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Esiste $K = K(Q, P, t)$ tale che

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{dp} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{dq} \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{dP} \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{dQ} \end{cases} \quad ? \tag{7.2}$$

In altre parole, il sistema di equazioni differenziali nelle variabili Q, P è hamiltoniano? E se lo è, qual è l'Hamiltoniana?

Risolvere questo problema è utile perché in alcuni casi il sistema nelle nuove variabili è piú facilmente risolubile di quello nelle vecchie.

7.1.2 Un esempio

Sia $H = \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2$ e sia data la trasformazione:

$$\begin{aligned} Q &= p + q \\ P &= q. \end{aligned} \tag{7.3}$$

La trasformazione inversa è

$$\begin{aligned} q &= P \\ p &= Q - P \end{aligned} \tag{7.4}$$

Le equazioni del moto, nelle vecchie variabili sono:

$$(1) \begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q. \end{cases} \tag{7.5}$$

Nelle nuove variabili le equazioni si ottengono utilizzando le equazioni (1) e le trasformazioni di coordinate. Si ottiene:

$$(2) \begin{cases} \dot{Q} = \dot{p} + \dot{q} = -q + p = Q - 2P \\ \dot{P} = \dot{q} = p = Q - P. \end{cases} \tag{7.6}$$

Un sistema differenziale è Hamiltoniano se esiste l'hamiltoniana, cioè se esiste una funzione $K(P, Q)$ tale che

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Nel nostro caso, questo accade se una delle seguenti condizioni equivalenti è soddisfatta:

i) la forma differenziale $(P - Q)dQ + (Q - 2P)dP$ è chiusa

ii) $\mathrm{div}_{Q,P}\binom{Q-2P}{Q-P} = 0$

Ed in effetti $\mathrm{div}_{Q,P}\binom{Q-2P}{Q-P} = 1 - 1 = 0$. Per la determinare la Hamiltoniana K bisogna trovare la primitiva della forma differenziale $(P - Q)dQ + (Q - 2P)dP$. Integrando nella variabile Q si ottiene: $K(P, Q) = -\frac{Q^2}{2} + QP + g(P)$, dove g si determina imponendo $\dfrac{\partial K}{\partial P} = Q - 2P$. Si ottiene $Q + \dfrac{\partial g}{\partial P} = Q - 2P$, quindi $g(P) = P^2$. In definitiva $K(P, Q) = -\frac{Q^2}{2} + QP + P^2$.

7.1.3 Un esempio molto particolare

Sia $H = \frac{p^2}{2}$, e sia $P = p^2$, $Q = q$ la trasformazione assegnata. Nelle nuove variabili il sistema differenziale è $\dot{Q} = \sqrt{P}$, $\dot{P} = 0$, che è hamiltonianio di halmiltoniana $K = \frac{2}{3}P^{\frac{3}{2}}$. D'altra parte per l'hamiltoniana $H = \frac{qp^2}{2}$, il sistema trasformato $\dot{Q} = \sqrt{P}$, $\dot{P} = -P^{\frac{3}{2}}$ non è hamiltoniano.

In questo esempio la trasformazione porta il sistema di Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2}$ in un sistema hamiltoniano, mentre porta il sistema di hamiltoniana $H = \frac{qp^2}{2}$ in un sistema che non è hamiltoniano.

Il fatto importante è che esistono invece trasformazioni che portano sistemi Hamiltoniani in sistemi Hamiltoniani *qualunque sia* l'Hamiltoniana di partenza. Nel seguito chiamerò trasformazioni canoniche tali trasformazioni.

Esercizio 7.1 *(teorico) Provare che ogni cambiamento lineare invertibile per sistemi a un grado di libertà di coordinate è canonico nel senso detto sopra.*

Una classe di trasformazioni canoniche è quella dei diffeomorfismi simplettici (nel seguito chiamate trasformazioni simplettiche):

$$\begin{aligned} Q &= Q(q,p) \\ P &= P(q,p) \end{aligned} \tag{7.8}$$

è un diffeomorfismo simplettico se lo jacobiano della trasformazione è simplettico per ogni valore di (q,p):

$$D = \begin{pmatrix} \partial_q Q & \partial_p Q \\ \partial_q P & \partial_p P \end{pmatrix} : \quad DJD^t = J \text{ dove } J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

(in dimensione $n > 2$, la matrice D è una matrice $2n \times 2n$, dove ogni blocco è definito nel modo ovvio: $\dfrac{\partial Q}{\partial q}$ è la matrice delle derivate delle n funzioni Q_i rispetto alle n variabili q_j, cioè $(\partial_q Q)_{i,j} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$ etc. . Per queste trasformazioni, nel caso in cui H *non dipenda dal tempo* la regola per trovare la nuova Hamiltoniana è $K(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P))$.

In sintesi esistono

a) trasformazioni che trasformano un sistema hamiltoniano di hamiltoniana H assegnata in un altro sistema hamiltoniano

b) trasformazioni **canoniche** che trasformano un sistema hamiltoniano in un sistema hamiltoniano qualunque sia l'hamiltoniana H

c) trasformazioni **simplettiche**, cioè quelle che verificano l'identità (7.9). In particolare queste trasformazioni sono canoniche. La nuova Hamiltoniana si ottiene semplicemente esprimendo la vecchia nelle nuove coordinate $K(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P))$.

Nel seguito mi interesserò solo alle trasformazioni simplettiche, che chiamerò, con abuso di linguaggio, canoniche.

7.2 Trasformazioni simplettiche indipendenti dal tempo

Condizioni equivalenti di simpletticità sono:

1) lo jacobiano è una matrice simplettica;

2) $\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\}$, $\forall i,j$, $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$ (le parentesi di Poisson sono definite da $\{f,g\} = \partial_q f \cdot \partial_p g - \partial_p f \cdot \partial_q g$, e sono un prodotto antisimmetrico per le funzioni regolari di (q,p));

3) la forma differenziale $p\,dq - P\,dQ = \sum_i (p_i\,dq_i - P_i\,dQ_i) = \sum_i (p_i\,dq_i - \sum_j (\partial_{q_j} Q_i\,dq_j + \partial_{p_j} Q_i\,dp_j))$ è chiusa (localmente esatta).

4) ne esistono altre (vedi "parentesi di lagrange" sui testi di meccanica analitica).

Esercizio 7.2 *(teorico) Verifica che le condizioni 1,2,3 sono equivalenti e che implicano la canonicità della trasformazione.*

Esercizio 7.3

$$\begin{aligned} Q &= \log\left(\tfrac{1}{q}\sin p\right) \\ P &= q \;\; ctg\, p \end{aligned} \tag{7.10}$$

Dove è definita? Qual è l'inversa? È canonica?

Soluzione

Perché la traformazione abbia senso deve essere $\frac{1}{q}\sin p > 0$, dunque $(q,\,p)$ devono essere nelle regioni $q > 0$ e $p \in (2k\pi, 2(k+1)\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$, o nelle regioni $q < 0$ e $p \in (2k-1\pi, 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. In entrambi i casio anche la seconda equazione ha senso, infatti essa ha singolarità solo per $\sin p = 0$. Quindi la trasformazione è definita nelle regioni descritte sopra.

Per calcolare l'inversa bisogna esprimere $(q,\,p)$ in funzione di $(Q,\,P)$. Comincio con l'invertire il logaritmo: $\sin p = qe^Q$. Dalla seconda $\sin p = \frac{q}{P}\cos p$. Ma allora $qe^Q = \frac{q}{P}\cos p$. Dunque

$$p = \pm\arccos\left(Pe^Q\right).$$

Inserendo questa relazione nella prima equazione ottengo

$$q = \pm\sqrt{1-P^2e^Q}e^{-Q}.$$

I segni si determinano a seconda della regione in cui si inverte la trasformazione.

Per verificare la canonicità è sufficiente calcolare verificare se $\{Q,P\} = 1$. Calcolo quindi lo Jacobiano della trasformazione.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q} & \text{ctg } p \\ \text{ctg } p & q(1-\text{ctg}^2 p) \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

Ma allora $\{Q,P\} = 1$.

Esercizio 7.4

$$\begin{aligned} Q &= 2a\log p + \log q \\ P &= -p^b q\log q \end{aligned} \tag{7.12}$$

Trovare per quali valori di a e b è canonica. Considera l'hamiltoniana $H = \frac{1}{2}p^2q^2(\log q)^2$, e il dato iniziale $(q(0),p(0)) = (e,\frac{1}{e})$. Trova la soluzione delle equazioni del moto utilizzando la trasformazione canonica trovata.

Soluzione Calcolo lo Jacobiano

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{q} & 2a\frac{1}{p} \\ -p^b(\log q+1) & -bp^{b-1}q\log q \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

Impongo $\{Q,\,P\} = 1$:

$$-\frac{1}{q}bp^{b-1}q\log q + 2a\frac{1}{p}p^b(\log q+1) = 1,$$

cioè:

$$p^{b-1}(-b\log q + 2a\log q + 2a) = 1.$$

Se deve fare 1, in particolare non deve dipendere da p. Dunque $b = 1$. Ottengo

$$(2a-1)\log q + 2a = 1.$$

Ma non deve dipendere nemmeno da q, dunque $2a = 1$. Quindi per $b = 1$ e $a = \frac{1}{2}$ la trasformazione è canonica.

La trasformazione cercata è

$$\begin{aligned} Q &= \log p + \log q \\ P &= -pq\log q. \end{aligned} \tag{7.14}$$

La nuova Hamiltoniana è $K(P,Q) = H(p(Q,P), q(Q,P)) = \frac{1}{2}P^2$. Ma allora le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= P \\ \dot{P} &= 0, \end{aligned} \tag{7.15}$$

che hanno soluzioni

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(0) + P(0)t \\ P(t) &= P(0). \end{aligned} \tag{7.16}$$

Impongo il dato iniziale e ottengo $Q(0) = 0$ e $P(0) = -1$. Quindi:

$$\begin{aligned} Q(t) &= -t \\ P(t) &= -1. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Ma allora posso cercare di esprimere la soluzione nelle vecchie variabili attraverso la trasformazione inversa. Dopo un pò di algebra si ottiene

$$\begin{aligned} q &= e^{-Pe^{-Q}} \\ p &= e^{Q+Pe^{-Q}}. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Dunque

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{e^t} \\ p(t) &= e^{-t-e^t}. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Come visto negli esercizi precedenti, la simpletticità si controlla sia calcolando l'esattezza della forma differenziale $p\,dq - P\,dQ$, sia calcolando le parentesi di Poisson. Nel caso di un sistema ad un grado di libertà, questi conti sono particolarmente semplici. Infatti, per antisimmetria, $\{Q,Q\} = \{P,P\} = 0$ qualunque siano le funzioni Q e P. Dunque la condizione di simpletticità è semplicemente $\{Q,P\} = 1$.

In più dimensioni il calcolo si complica. Ad esempio considera l'esercizio

Esercizio 7.5 *Verificare la canonicità di:*

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 q_2 \\ Q_2 &= q_1 + q_2 \\ P_1 &= \tfrac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} + 1 \\ P_2 &= \tfrac{q_2 p_2 - q_1 p_1}{q_2 - q_1} - (q_2 + q_1). \end{aligned} \tag{7.20}$$

In questo caso le relazioni per le parentesi di Poisson da verificare sono:

$$\begin{aligned} &\{Q_1, Q_2\} = \{P_1, P_2\} = \{Q_1, P_2\} = \{P_1, Q_2\} = 0 \\ &\{Q_1, P_1\} = \{Q_2, P_2\} = 0. \end{aligned} \tag{7.21}$$

7.3 Funzioni generatrici e trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo

La condizione di simpletticità 3), può essere riformulata nel modo seguente:

esiste $F(p,q)$ tale che $p\,dq - P\,dQ = dF$.

Un modo di usare questo fatto è pensare che la trasformazione assegnata permetta di considerare le q e le Q come variabili indipendenti. In tal caso anche nelle variabili $(q,\, Q)$ deve valere $p\,dq - P\,dQ = dF$, dove al posto di p e P avremo scritto la loro espressione in termini di $(q,\, Q)$. Ma allora la trasformazione deve verificare: esiste $F = F(q, Q)$ tale che:

$$\begin{aligned} p(q, Q) &= \partial_q F(q, Q) \\ P(q, Q) &= -\partial_Q F(q, Q). \end{aligned} \tag{7.22}$$

L'utilità di questo ragionamento è che per avere una trasformazione canonica è sufficiente dare una funzione $F(q, Q)$, di definire le funzioni $p(q, Q)$ e $P(q, Q)$ attraverso le definizioni 7.22 e poi invertire la prima rispetto a Q, in modo da ottenere $Q = Q(q, p)$ e $P = P(q, p)$. Ovviamente per fare ciò deve valere almeno la condizione di invertibilità locale $\det\left(\partial_q \partial_q F(q, Q)\right) \neq 0$.

Esercizio 7.6 *Trovare i valori dei parametri per cui la trasformazione seguente è canonica, costruendo la funzione generatrice di tipo $F = F(q, Q)$:*

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{p} e^{aq} \\ P &= -p^b e^q; \end{aligned} \tag{7.23}$$

La condizione di canonicità espressa tramite la funzione generatrice è particolarmente utile nel caso di trasformazioni dipendenti dal tempo. Infatti, una trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= Q(q, p, t) \\ P &= P(q, p, t) \end{aligned} \tag{7.24}$$

è canonica se è simplettica per ogni t. Questo è equivalente al fatto che, detta H la vecchia hamiltoniana (anche dipendente dal tempo) e detta K la nuova, esista una funzione $F(p, q, t)$ tale che:

$$p\, dq - H(p, q, t)dt = P\, dQ - K(P, Q, t) + dF(p, q, t).$$

Anche in questo caso, se si possono considerare le q e le Q come variabili indipendenti si ottiene

$$\begin{aligned} p(q, Q, t) &= \partial_q F(q, Q, t) \\ P(q, Q, t) &= -\partial_Q F(q, Q, t). \end{aligned} \tag{7.25}$$

E non solo, ottenuta la trasformazione, si ottiene anche la nuova hamiltoniana:

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \partial_t F(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t). \tag{7.26}$$

Esercizio 7.7 *Risolvere le equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana $H = -\frac{pq}{2t} \log\left(\frac{p}{2t}\right)$, utilizzando la trasformazione canonica generata da $F(q, Q, t) = q^2 e^{Qt}$.*

7.3.1 Altri tipi di funzioni generatrici

può essere conveniente pensare l'espressione

$$p\, dq - H\, dt = P\, dQ - K\, dt + dF \tag{7.27}$$

in termini di altre coppie di variabili. Considera ad esempio (q, P): è utile scivere $P\, dQ = d(PQ) - Q\, dP$ e definire $S = F + PQ$; ottieni:

$$p\, dq - H\, dt = -Q\, dP - K\, dt + dS, \tag{7.28}$$

dove p, Q, H, K, S le stai pensando come funzioni di (q, P, t). In tal caso la condizione di canonicità (e quindi la trasformazione in forma implicita, assegnata la funzione S) diventa:

$$\begin{aligned} p(q, P, t) &= \partial_q S(q, P, t) \\ Q(q, P, t) &= \partial_P S(q, P, t), \end{aligned} \tag{7.29}$$

e la relazione tra le hamiltoniane e S: $K = H + \partial_t S$.

Esercizio 7.8 *(teorico) Trovare tutte le relazioni che definiscono una trasfomazione canonica, assegnata una funzione di qualunque combinazione delle variabili; quante sono per un sistema a n gradi di libertà? Ad esmpio, usa come variabili indipendenti* (q, P), (P, q), (p, P), *e, a due gradi di libertà* (q_1, P_1, p_2, Q_2).

Esercizio 7.9 *(teorico) Data H e la trasformazione delle sole coordinate* $Q = Q(q,t)$, *puoi ottenere una trasformazione canonica nel seguente modo: scrivi la lagrangiana in* $(q, \dot{q})$, *cambia il sistema di coordinate e scrivi la nuova hamiltoniana; hai dunque trovato una legge di trasformazione degli impulsi. Prova che la trasformazione che hai ottenuto è generata da* $S = PQ(q,t)$.

Esercizio 7.10 *Determinare una trasformazione canonica tra quelle generate da* $F = \alpha q^a Q^b$, *che trasformi l'hamiltoniana* $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right)$ *nell'hamiltoniana di un oscillatore armonico.*

Esercizio 7.11 *Studiare il moto del sistema di Hamiltoniana*

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2, \tag{7.30}$$

mediante la trasformazione canonica generata da $F = kq_1Q_2 - p_2Q_2 + p_2P_1$.

Esercizio 7.12 *Determinare il moto del sistema di Lagrangiana*

$$L = q\dot{q}^2, \tag{7.31}$$

passando all'hamiltoniana e utilizzando la trasformazione canonica generata da $F(p,Q) = -\frac{p^3}{12Q}$.

7.4 Equazione di Hamilton Jacobi

Come si è visto una trasformazione canonica può rendere banalmente integrabile le equazioni di Hamilton. Peró, chi ti dice come trovare la trasformazione? Tentiamo allora di cercare una funzione generatrice $S(q, P, t)$ tale che la nuova hamiltoniana K sia esattamente 0. In tal caso, infatti, le equazioni nelle nuove varibili (Q, P) sono banali:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= 0 \\ \dot{P} &= 0, \end{aligned} \tag{7.32}$$

dunque nota la trasfomazione si può risalire al moto nelle variabili q, p. Come deve essere fatta una tale S? Deve valere: $\partial_q S = p$ e $K = 0$, cioè:

$$H\left(q, \partial_q S(q,P,t), t\right) + \partial_t S(q,P,t) = 0. \tag{7.33}$$

Per Hamiltoniane indipendenti dal tempo, si può cercare una soluzione del tipo $S(q,P,t) = W(q,P) - P_n t$, dove P_n è l'ultimo impulso: l'equazione di H.J. diventa (equazione caratteristica di H.J.):

$$H\left(q, \partial_q W(q,P,t)\right) = P_n. \tag{7.34}$$

In realtà, invece di cercare S dipendente dal tempo che renda nulla l'Hamiltoniana, puoi pensare che basta trovare W che rende costante l'Hamiltoniana. Infatti puoi pensare che la funzione generatrice W rende l'hamiltoniana uguale ad uno dei nuovi impulsi; anche cosí le equazioni di Hamilton sono banali:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \partial_{P_i} K = 0 \;\; i = 1, \dots n-1 \\ \dot{Q}_n &= \partial_{P_n} K = 1 \\ \dot{P}_i &= -\partial_{Q_i} K = 0 \;\; i = 1, \dots n. \end{aligned} \tag{7.35}$$

Come si procede in pratica? Sempre e solo per separazione di variabili; in alcuni rari casi ci si riesce (sistemi integrabili) in generale no. Separazione di variabili significa che cerchi la soluzione come somma di n funzioni ognuna delle quali dipende solo da una delle vecchie coordinate. Il fatto che si riesca a trovare la soluzione dipende dal fatto che dentro H la dipendenza delle variabili è *separtata*.

7.4.1 Esempio

$H = \frac{1}{2}\left(q_2(p_1q_1)^2 + p_2\right)^2$. Cerco la funzione $W((q_1, q_2, a_1, a_2) = A(q_1, a_1, a_2) + B(q_2, a_1, a_2)$. I parametri a_1, a_2 saranno i nuovi impulsi. La separazione di variabili in questo caso consiste nel cercare la funzione W come la somma di una funzione che dipende solo da q_1 e di una funzione che dipende solo da q_2.

L'equazione da risolvere è:

$$\frac{1}{2}\left(q_2(q_1\partial_{q_1}A)^2 + \partial_{q_2}B\right)^2 = a_2. \tag{7.36}$$

Stai cercando B in modo che non dipenda da q_2, ma solo da q_1. Dall'equazione puoi ricavare:

$$\partial_{q_2}B = \pm\sqrt{2a_2} - q_2(q_1\partial_{q_1}A)^2 \tag{7.37}$$

peró in questa espressione $\partial_{q_2}B$ dipendende da q_1 e da $A(q_1)$; l'unica possibilità che ho è dunque che la combinazione $q_1\partial_{q_1}A$ non dipenda da q_1, cioè: $q_1\partial_{q_1}A = a_1$, ovvero $A(q_1) = a_1 \log q_1$. A questo punto posso risolvere anche l'equazione in B infatti $\partial_{q_2}B = \pm\sqrt{2a_2} - q_2a_1^2$ è una funzione della sola q_2 e dei nuovi impulsi. Riassumendo, ottieni:

$$W = a_1 \log q_1 \pm \sqrt{2a_2}q_2 - \frac{1}{2}q_2^2a_1^2. \tag{7.38}$$

La trasformazione generata da W è:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \log q_1 - a_1q_2^2 \\ Q_2 &= \pm\frac{q_2}{\sqrt{2a_2}} \\ p_1 &= \frac{a_1}{q_1} \\ p_2 &= \pm\sqrt{2a_2} - a_1^2q_2. \end{aligned} \tag{7.39}$$

Usando la soluzione delle equazioni del moto per l'hamiltoniana K e tornando indietro con la trasformazione, ottieni:

$$\begin{aligned} q_2(t) &= \pm\sqrt{2a_2(0)}(Q_2(0) + t) \\ q_1(t) &= e^{Q_1(0)+2a_1(0)a_2(0)(Q_2(0)+t)^2} \\ p_1 &= a_1(0)e^{-Q_1(0)-2a_1(0)a_2(0)(Q_2(0)+t)^2} \\ p_2 &= \pm\sqrt{2a_2(0)}(1 - a_1^2(0)(Q_2(0) + t)). \end{aligned} \tag{7.40}$$

Il segno $+, -$ lo determini a seconda del segno di $q_2(p_1q_1)^2 + p_2 = \pm\sqrt{2a_2}$. Nella soluzione compaiono i termini $Q_1(0), Q_2(0), a_1(0), a_2(0)$, che trovi imponendo i dati iniziali.

OSSERVAZIONE 1. La separazione di variabili funziona perché la dipendenza da p_1, q_1 dell'hamiltoniana è isolata nel termine $(p_1q_1)^2$, cioè abbiamo potuto risolvere *separatamente* l'equazione per A nella variabile q_1 senza coinvolgere l'altra variabile.

OSSERVAZIONE 2. In effetti, ci sei riuscito perché oltre all'energia c'è un altro integrale primo, esattamente p_1q_1, infatti a_1 si conserva. L'esistenza di questo integrale primo ti ha permesso di portare il moto alle quadrature, così come accade nei problemi lagrangiani. In generale, peró, il tipico integrale primo che ti capita di trovare risolvendo l'equazione di H.J. non è un momento che proviene da una simmetria della lagrangiana. Considera ad esempio le Hamiltoniane: $H_1 = \frac{1}{2}\left(q_2^2(p_1q_1)^2 + p_2^2\right)$ e $H_2 = \frac{1}{2}\left(q_2^2(p_1^2 + q_1^2) + p_2^2\right)$. Per H_1 si conserva p_1q_1 e la lagrangiana è $L = \frac{1}{2}\left(\dot q_2^2 + \frac{\dot q_1^2}{q_2^2q_1^2}\right)$, che ha il gruppo ad un parametro di simmetrie $g_\tau\binom{q_1}{q_2} = \binom{e^\tau q_1}{q_2}$. Per H_2 si conserva $p_1^2 + q_1^2$, la lagrangiana è $L = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot q_1^2}{q_2^2} + \dot q_2^2 + q_1^2q_2^2\right)$ che non ha evidenti simmetrie.

OSSERVAZIONE 3. I nuovi impulsi li scegli tu, mentre risolvi l'equazione di H.J.. Infatti potevi, ad esempio, decidere che $\partial_{q_1}Aq_1 = a_2^2$, oppure $\log a_2$, o a_1a_2,..., o potevi decidere che $H = a_1 + a_2$. Avresti ottenuto una soluzione di H.J. con una diversa dipendenza dai nuovi impulsi, che comunque risolveva il problema. In sostanza, scegli come impulsi una qualche combinazione delle costanti da cui la soluzione di H.J. dipende. Inoltre la soluzione di H.J. *deve* dipendere da un numero di costanti pari ai gradi di libertà in modo non triviale (c'è comunque una costante additiva che si può aggiungere a W).

7.5 Costruzione delle variabili azione-angolo

7.5.1 Variabili azione-angolo per l'oscillatore armonico

Considera l' oscillatore armonico:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2).$$

La soluzione dell'equazione di H.J. è $W(q,\alpha) = \int^q dq\, \sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2}$. Nel piano delle fasi l'integrale primo dell'energia, cioè α, individua la curva chiusa C_α descritta da $p = \pm\sqrt{2(\alpha - \omega^2 q^2)}$, che interseca l'asse delle q in $\pm\frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega}$.

La variabile d'azione è:

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_\alpha} p\, dq = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega}} dq\, \sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2} = \\ &= \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega}} \sqrt{2\alpha}\sqrt{1 - \left(\tfrac{\omega q}{\sqrt{2\alpha}}\right)^2} d\left(\tfrac{\omega q}{\sqrt{2\alpha}}\right) = \tfrac{2}{\pi}\tfrac{2\alpha}{\omega} \int_0^1 d\xi \sqrt{1-\xi^2} = \tfrac{\alpha}{\omega}. \end{aligned} \tag{7.41}$$

Come determini la variabile angolare conigata ad I? Pensando W come funzione di I e derivandola rispetto ad I:

$$\begin{aligned} \phi &= \partial_I W(q,I) = \partial_I \int^q dq \sqrt{2\omega I - \omega^2 q^2} = \omega \int^q \tfrac{dq}{\sqrt{2\omega I}\sqrt{1 - \frac{\omega}{2I} q^2}} \\ &= \int^{\sqrt{\frac{\omega}{2I}}} \tfrac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin(\sqrt{\tfrac{\omega}{2I}} q), \end{aligned} \tag{7.42}$$

ovvero $q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin\phi$. Sostituendo nell'hamiltoniana: $K(I) = \alpha(I) = I\omega$. Quindi, dalle equazioni di Hamilton nelle variabili (ϕ, I):

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial K}{\partial \phi} = 0 \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial K}{\partial I} = \omega, \end{aligned} \tag{7.43}$$

cioè la frequenza della variabile angolare è la frequenza dell'oscillatore armonico.

7.5.2 Un esempio

Considera l'hamiltoniana: $H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}x^2(p_\phi^2 - \cos\phi)$.

a) Risolvi l'equazione di H.J. per separazione di varibili, e riduci il moto alle quadrature, cercando $W = A(x,\alpha,\beta) + B(\phi,\alpha,\beta)$ (α, β saranno i nuovi impulsi)

b) Determina la regione dello spazio delle fasi un cui il moto si può descrivere in variabili azione-angolo.

c) In questa regione trova le frequenze dei moti quasi periodici.

Soluzione

a) Cerca: $W = A(x,\alpha,\beta) + B(\phi,\alpha,\beta)$ (α, β saranno i nuovi impulsi). L'equazione da risolvere è:

$$\frac{1}{2}(\partial_x A)^2 + \frac{1}{2}x^2\left((\partial_\phi B)^2 - \cos\phi\right) = \alpha. \tag{7.44}$$

Riesci a risolverla ponendo $(\partial_\phi B)^2 - \cos\phi = \beta$. Ottieni:

$$B = \pm \int^\phi d\phi\, \sqrt{\beta + \cos\phi}, \qquad A = \pm \int^x dx\, \sqrt{2\alpha - \beta x^2}. \tag{7.45}$$

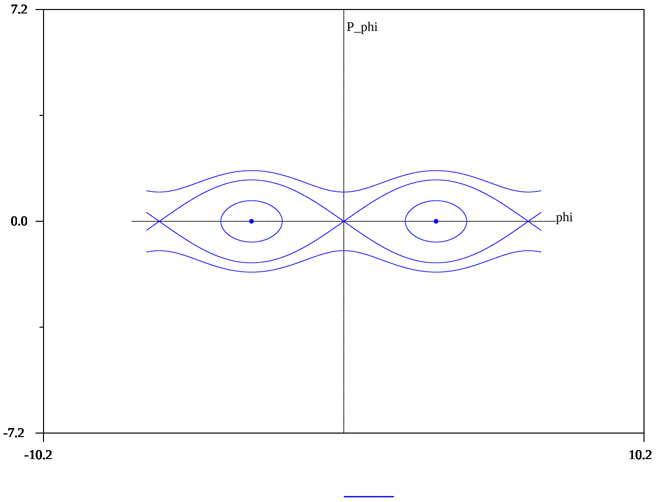
Hai risolto l'eq. di H.J. , quindi puoi scrivere le formule di quadratura (cioé la soluzione in forma implicita delle equazioni del moto) procedendo cosí: chiama q_α, q_β le nuove coordinate associate ai nuovi impulsi α, β; le determini attraverso W:

$$\begin{aligned} q_\alpha &= \partial_\alpha W = \pm \int^x \tfrac{dx}{\sqrt{2\alpha - \beta x^2}} \\ q_\beta &= \partial_\beta W = \pm \int^x \tfrac{-x^2\, dx}{2\sqrt{2\alpha-\beta x^2}} \pm \int^\phi \tfrac{d\phi}{2\sqrt{\beta + \cos\phi}}. \end{aligned} \tag{7.46}$$

Nota che ai fini della soluzione esplicita del moto, sono questi gli integrali che può essere utile calcolare esplicitamente, e non quelli che definiscono W. Le formule di quadratura le ottieni dalle equazioni di Hamilton nelle nuove variabili che ti dicono che α, β, $q_\beta = c_2$ sono costanti, mentre $q_\alpha(t) = c_1 + t$:

$$\begin{aligned} c_1 + t &= \partial_\alpha W = \pm \int^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2\alpha - \beta x^2}} \\ c_2 &= \partial_\beta = \pm \int^{x(t)} \frac{-x^2\, dx}{2\sqrt{2\alpha - \beta x^2}} \pm \int^{\phi(t)} \frac{d\phi}{2\sqrt{\beta + \cos\phi}}. \end{aligned} \tag{7.47}$$

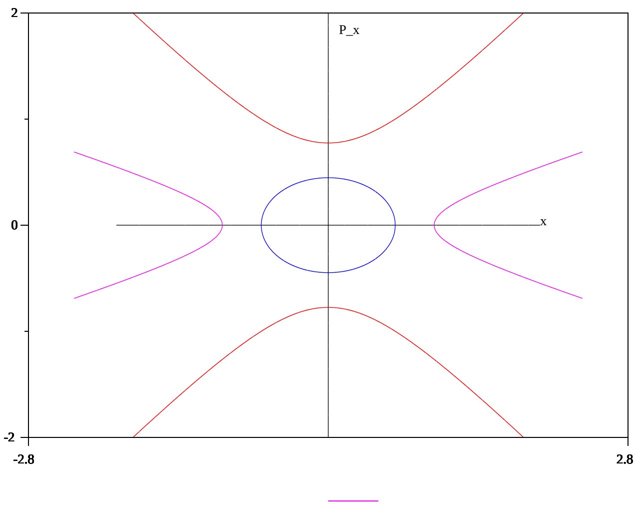
b) Hai due integrali primi α, β. Questo ti permette di capire come è fatto il moto (analisi qualitativa). Procedi cosí. Controlla per prima cosa quali sono i valori possibili per i due integrali primi: $\beta = p_\phi^2 + \cos\phi$, dunque $\beta \geq -1$. La proiezione dell'orbita sul piano coordinato $\phi\, p_\phi$, è costituita dai punti $(\pm\frac{\pi}{2}, 0)$ per $\beta = -1$; da due curve chiuse per $-1 < \beta < 1$; due separatrici (omocline per la periodicità di ϕ) ed un punto fisso per $\beta = 1$; due curve periodiche per $\beta > 1$.



La proiezione dell'orbita sul piano $x\, p_x$ è fatta cosí: se $\beta > 0$ deve essere $\alpha = \frac{1}{2}(p_x^2 + \beta x^2) > 0$, quindi la proiezione è una curva chiusa simmetrica rispetto agli assi, che interseca l'asse delle x nei punti $x = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}$; se $\beta < 0$, e $\alpha > 0$, la proiezione consiste in due curve aperte che intersecano l'asse delle p_x in $p_x = \pm\sqrt{2\alpha}$; se $\beta < 0$, $\alpha < 0$ due curve aperte che intersecano l'asse delle x in $x = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}$.
Dunque, se $\alpha > 0$ e $0 < \beta < 1$, l'orbita vive sul prodotto diretto delle due curve chiuse proiezioni sui due piani coordinati; chiama $C_\phi(\alpha, \beta)$, $C_x(\alpha, \beta)$ queste due curve rispettivamente. L'orbita vive dunque su una varietà in $\mathbb{R}^4$ diffeomorfa ad un toro bidimensionale. In questo caso ha senso tentare di scrivere le variabili azione-angolo, cioé di tentare di descrivere il moto attraverso delle variabili angolari che esprimano la rotazione sul toro. Ci riesci scegliendo come nuovi impulsi non α, β, ma delle loro opportune funzioni (variabili d'azione) che determini nel modo seguente: saranno gli integrali della forma $p\,dq$, divisi per 2π , sulle curve che hai ottenuto proiettando il moto sui piani coordinati; tali integrali dipendono evidentemente da α, β:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{C_\phi(\alpha,\,\beta)} p_\phi\, d\phi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\arccos(-\beta)} \sqrt{\beta + \cos\phi}\, d\phi \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{C_x(\alpha,\,\beta)} p_x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}} \sqrt{2\alpha - \beta x^2}\, dx. \end{aligned} \tag{7.48}$$

Hai introdotto I_1, I_2 come funzioni di α, β, in linea di principio puoi invertire questa funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, per ottenere α, β in funzione di I_1, I_2; la funzione generatrice adesso è W pensata come funzione di I_1, I_2 attraverso α, β. Questa scelta assicura che le coordinate coniugate sono delle variabili angolari, sono cioé periodiche di periodo 2π; chiama $\gamma_1\ \gamma_2$ queste nuove variabili. Chi è la nuova Hamiltoniana? Evidentemente $K(I_1, I_2) = \alpha(I_1, I_2)$, dunque



le equazioni del moto sono:

$$\begin{array}{ll} \dot{\gamma}_1 = \partial_{I_1}\alpha(I_1,\, I_2) & \dot{I}_1 = 0 \\ \dot{\gamma}_2 = \partial_{I_2}\alpha(I_1,\, I_2) & \dot{I}_2 = 0. \end{array} \tag{7.49}$$

Nota che la regione $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$ non è l'unica alla quale corrispondono moti quasi periodici sul toro. Infatti anche se $\alpha > 0$ e $\beta > 1$ il moto è quasi periodico sul toro; l'unica differenza è che la curva chiusa nel piano ϕ, p_ϕ é $\sqrt{\beta + \cos\phi}$ al variare di $\phi \in [0, 2\pi]$, quindi $I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\beta + \cos\phi}\, d\phi$. Nota che nonostante ϕ sia già una variabile angolare, che descrive con periodicità 2π la proiezione dell'orbita, non è la variabile angolare giusta perché la sua velocità angolare non è costante.

c) Le frequenze $\omega_i = \partial_{I_i}\alpha(I_1,\, I_2)$ sono costanti, in quanto dipendono da I_1, I_2 che sono delle costanti del moto; essendo γ_i degli angoli, in effetti ω_i sono le frequenze delle rotazioni. Il moto nelle singole variabili angolari è dunque una rotazione con velocità angolare costante; globalmente è un moto quasi-periodico su un toro.

Come calcoli le frequenze ω_i? Devi calcolare le derivate di α rispetto alle variabili d'azione, peró hai a disposizione solo l'espressione delle variabili d'azione in funzione di α, β. Dunque procedi cosí:

$$\begin{pmatrix} \partial_{I_1}\alpha & \partial_{I_2}\alpha \\ \partial_{I_1}\beta & \partial_{I_2}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\alpha I_1 & \partial_\beta I_1 \\ \partial_\alpha I_2 & \partial_\beta I_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\partial_\alpha I_1 \partial_\beta I_2 - \partial_\alpha I_2 \partial_\beta I_1} \begin{pmatrix} \partial_\beta I_2 & -\partial_\beta I_1 \\ -\partial_\alpha I_2 & \partial_\alpha I_1 \end{pmatrix} \tag{7.50}$$

Ora:

$$\begin{array}{ll} \partial_\alpha I_1 = 0 & l\partial_\alpha I_2 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha - \beta x^2}} dx \\ \partial_\beta I_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\arccos(-\beta)} \frac{1}{\sqrt{\beta + \cos\phi}} d\phi & \partial_\beta I_2 = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}} \frac{x^2}{\sqrt{2\alpha - \beta x^2}} dx. \end{array} \tag{7.51}$$

Infine:

$$\omega_1(\alpha, \beta) = -\frac{\partial_\beta I_2}{\partial_\alpha I_2 \partial_\beta I_1} \qquad \omega_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{\partial_\alpha I_2}. \tag{7.52}$$

7.5.3 Un altro esempio

Considera l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}P_y^2(1 + x^2) + \frac{1}{2}(1 + x^2)y^2. \tag{7.53}$$

a) Risolvi, per separazione di variabili, l'equazione di Hamilton Jacobi per H.

b) Determina la regione dello spazio delle fasi in cui il moto può essere descritto in variabili azione-angolo.

c) Calcola esplicitamente l'espressione dell'Hamiltoniana in termini delle variabili d'azione, e le frequenze dei moti multiperiodici.

d) Considera il moto di dato iniziale

$$\begin{array}{ll} x(0)=0 & y(0)=0 \\ P_x(0)=a & P_y(0)=1, \end{array} \tag{7.54}$$

con $a \in \mathbb{R}$; trova i valori di a per cui è periodico.

e) Trova il periodo del moto per $a=1$.

f) Discuti la stabilità della soluzione stazionaria

$$\begin{array}{ll} x(0)=0 & y(0)=0 \\ P_x(0)=0 & P_y(0)=0. \end{array} \tag{7.55}$$

Soluzione

a) Cerca una soluzione dell'equazione caratteristica di Hamilton-Jacobi del tipo:

$$W(x,y,\alpha,\beta)=A(x)+B(y). \tag{7.56}$$

Sostituendo:

$$\frac{1}{2}(\partial_x A)^2+\frac{1}{2}(1+x^2)\left((\partial_y B)^2+y^2\right)=\alpha. \tag{7.57}$$

Ottengo la soluzione ponendo $(\partial_y B)^2+y^2=\beta$:

$$\begin{array}{l} B(y,\beta)=\pm\int^y dy\sqrt{\beta-y^2} \\ A(x,\alpha,\beta)=\pm\int^x dx\sqrt{2\alpha-\beta-\beta x^2}. \end{array} \tag{7.58}$$

Nota che sono ammissibili solo i valori $\beta \geq 0$ e $\alpha \geq \frac{\beta}{2}$, altrimenti ottieni per A e B quantità immaginarie.

b) La regione dello spazio delle fasi in cui il moto é multiperiodico è data da $\beta>0$, $\alpha>\frac{\beta}{2}$.

c) Devi calcolare:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\beta}} dy\sqrt{\beta-y^2} \\ I_2 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha-\beta}{\beta}}} dx\sqrt{2\alpha-\beta-\beta x^2}. \end{aligned} \tag{7.59}$$

Ricorda che

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2h}}{\omega}} dq\sqrt{2h-\omega^2 q^2}=\frac{h}{\omega}. \tag{7.60}$$

Ottieni:

$$I_1=\frac{\beta}{2}, \qquad I_2=\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\beta}}. \tag{7.61}$$

Dunque la nuova Hamiltoniana è:

$$K=\alpha=\sqrt{2I_1}I_2+I_1. \tag{7.62}$$

Le frequenze:

$$\begin{array}{l} \omega_1=\frac{I_2}{\sqrt{2I_1}}+1=\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta} \\ \omega_2=\sqrt{2I_1}=\sqrt{\beta}. \end{array} \tag{7.63}$$

d) Sostituendo il valore del dato iniziale in α, β ottieni:

$$\omega_1 = 1 + \frac{a^2}{2},\ \omega_2 = 1 \tag{7.64}$$

Il moto è periodico se e solo se $a^2 \in \mathbb{Q}$.

e) per $a = 1$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2}$, dunque $T = 3T_1 = 2T_2$. $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi$, dunque $T = 4\pi$.

f) Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = P_x & \dot{y} = P_y(1+x^2) \\ \dot{P}_x = -x\left(P_y^2 + y^2\right) & \dot{P}_y = -y(1+x^2). \end{array} \tag{7.65}$$

Considera il dato iniziale:

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0 & y(0) = 0 \\ P_x(0) = \varepsilon & P_y(0) = 0, \end{array} \tag{7.66}$$

che è una piccola perturbazione della posizione stazionaria. La soluzione delle equazioni di Hamilton è:

$$\begin{array}{ll} x(t) = -t\varepsilon & y(t) = 0 \\ P_x(t) = \varepsilon & P_y(t) = 0. \end{array} \tag{7.67}$$

Dunque la posizione di equilibio è instabile.

7.6 Teoria delle perturbazioni

Supponi di avere $H(\phi, I) = H_0(I) + \varepsilon H_1(\psi, I)$, dove le variabili $(\psi,\ I)$ sono variabili azione-angolo per l'hamiltoniana cosiddetta imperturbata H_0.
Stai cioè pensando di perturbare con $\varepsilon H_1(\psi, I)$ un'hamiltoniana integrabile H_0, pensando che ε sia un parametro reale piccolo. Per l'hamiltoniana H l variabili d'azione non sono piú costanti del moto (infatti H dipende anche dalle ψ), e il nuovo sistema non sarà in generale integrabile; peró a tempi fissati ti aspetti di compiere un errore di oridine ε considerando la soluzione della hamoltoniana imperturbata (scrivi le equazioni del moto: troverai $\dot{I} = O(\varepsilon)$). Un modo per migliorare questa approssimazione è quello di cercare una trasformazione canonica che porti l'hamiltoniana data in una in cui all'ordine zero non ci sia dipendenza dalle variabili angolari, e la dipendenza da ε sia al secondo ordine, cioè $K(\psi, A) = K_0(A) + O(\varepsilon^2)$.

Come si fa? Conviene cercare una funzione generatrice vicina alla funzione generatrice dell'identità, infatti all'ordine 0 in ε la trasformazione che stiamo cercando non deve operare, perché l'hamiltoniana all'odine 0 è già in variabili azione-angolo, cioè integrabile. Dunque cerchiamo $S(\psi, A) = \psi \cdot A + \varepsilon W(\psi, A)$. La trasfomazione indotta da S è data implicitamente da:

$$\begin{array}{l} I = \partial_\phi S = A + \varepsilon \partial_\phi W(\phi, A) \\ \psi = \partial_A S = \phi + \varepsilon \partial_A W(\phi, A). \end{array} \tag{7.68}$$

Non è esplicita, peró $I = A + O(\varepsilon)$, $\psi = \phi + O(\varepsilon)$. Ma allora possiamo esplicitarla in $(A,\ \psi)$ almeno fino all'ordine ε che è quello che ci interessa:

$$\begin{array}{l} \phi = \psi - \varepsilon \partial_A W(\phi, A) = \psi - \varepsilon \partial_A W(\phi + O(\varepsilon), A) = \psi - \partial_A W(\psi, A) + O(\varepsilon^2) \\ I = A + \varepsilon \partial_\phi W(\psi + O(\varepsilon), A) = A + \varepsilon \partial_\phi W(\psi, A) + O(\varepsilon^2). \end{array} \tag{7.69}$$

La nuova Hamiltoniana sarà:

$$\begin{array}{l} K = H_0(A + \varepsilon \partial_\phi W(\psi, A) + O(\varepsilon^2)) \\ +\varepsilon H_1(A + \varepsilon \partial_\phi W(\psi, A) + O(\varepsilon^2), \psi - \varepsilon \partial_A W(\psi, A) + O(\varepsilon^2)). \end{array} \tag{7.70}$$

Sviluppando fino all'ordine ε:

$$K(\psi, A) = H_0(A) + \varepsilon\left(\partial_A H_0(A) \cdot \partial_\psi W(\psi, A) + H_1(\psi, A)\right) + O(\varepsilon^2). \tag{7.71}$$

Il problema è risolto se riusci a trovare W tale che l'ordine ε sia nullo, cioè:

$$\partial_A H_0(A) \cdot \partial_\psi W(\psi, A) + H_1(\psi, A) = 0. \tag{7.72}$$

Conviene lavorare in serie di Fourier, infatti le variabili ψ sono variabili angolari. Ti ricordo che stiamo lavorando in dimensione maggiore di uno, dunque nelle formule precedenti e seguenti, se d è la dimensione, ψ, A, k sono vettori di dimensione d. La serie di Fourier è definita da:

$$W(\psi, A) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{ik\cdot\psi} \hat{W}(k, A), \tag{7.73}$$

dove $k \cdot \psi = \sum_{j=1}^d k_j \psi_j$, e i coefficienti di Fourier sono dati da:

$$\hat{W}(k, A) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} d\psi_1 \ldots d\psi_d e^{-ik\cdot\psi} W(\psi, A), \tag{7.74}$$

dove T^d è il toro d-dimensionale su cui vivono le variabili angolari $\psi_1, \ldots \psi_d$.

Per trovare W ti basta dunque trovarne i coefficienti di Fourier; l'equazione per i coefficienti è:

$$i\hat{W}(k, A)\left(\partial_A H_0(A) \cdot k\right) + \hat{H}_1(k, A) = 0. \tag{7.75}$$

Quando puoi risolvere questa equazione lineare per $\hat{W}(k, A)$? Evidentemente ci riesci a meno che $\partial_A H_0(A) \cdot k = 0$ e $\hat{H}_1(k, A) \neq 0$ e riesci a risommare la serie che definisce W. Se H_1 ha solo un numero finito di coefficienti di Fourier possono accadere sostanzialmente tre cose.

a) I valori di k per cui $\partial_A H_0(A) \cdot k = 0$ annullano anche $\hat{H}_1(k, A)$; dunque

$$\hat{W}(k, A) = \begin{cases} i\frac{\hat{H}_1(k,A)}{\partial_A H_0(A)\cdot k} & \text{se} \quad \hat{H}_1(k, A) \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases} \tag{7.76}$$

quindi W l'hai trovata e dunque sei riuscito a portare la perturbazione al secondo ordine; la nuova hamiltoniana all'ordine 0 è $K_0(A) = H_0(A)$, (cioè sono uguali, ma la variabile A non è I...).

b) Termine di media non nullo: come sopra tranne che $\hat{H}_1(0), A) \neq 0$ (qui O dentro H è il vettore nullo in $\mathbb{Z}^d$; palesemente non puoi definire $\hat{W}(0, A)$ perché nell'equazione ha coefficiente 0 davanti; peró $\hat{H}_1(0), A) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} d\psi W(\psi, A)$ è il valor medio sul toro di H_1, dunque non dipende dalle variabili angolari, puoi cioè incorporarlo dentro H_0:

$$H(\phi, I) = \Big(H_0(I) + \varepsilon \hat{H}_1(0, I)\Big) + \varepsilon \tilde{H}_1(\phi, I), \tag{7.77}$$

dove $\tilde{H}_1(\phi, I) = H_1(\phi, I) - \hat{H}_1(0), I)$ ha ora media nulla, cioè $\hat{\tilde{H}}_1(0, I) = 0$; ti riduci cioè al caso precedente, peró la nuova hamiltoniana all'ordine 0 nella nupva variabile A è $K_0(A) = H_0(A) + \varepsilon \hat{H}_1(0, A)$;

c) risonanza: per qualche k diverso del vettore nullo, $\partial_A H_0(A) \cdot k = 0$ mentre $\hat{H}_1(k, A) \neq 0$; in tal caso *non puoi* rimuovere la perturbazione di ordine ε per quel particolare valore di k.

7.6.1 Esempi

Considera l'hamiltoniana $H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(q_1^2 + \omega^2 q_2^2\right) + \varepsilon q_1^2 q_2$, con $\omega \neq 0$. Per $\varepsilon = 0$ è intergabile, infatti è la somma delle hamiltoniane di due oscillatori armonici disaccoppiati: $H_0 = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega^2 q_2^2)$. Passa dunque alle variabili azione-angolo separatamente nella coppia di variabili coniugate. Ottieni

$$\begin{array}{ll} q_1 = \sqrt{2I_1} \sin\phi_1 & I_1 = \alpha_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) \\ q_2 = \sqrt{\frac{2I_1}{\omega}} \sin\phi_2 & I_2 = \alpha_1 = \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega^2 q_2^2). \end{array} \tag{7.78}$$

In variabili azione angolo per l'hamiltoniana con $\varepsilon = 0$, tutta l'hamiltoniana assegnata, diventa: $H = H_0 + \varepsilon H_1 = I_1 + \omega I_2 + \varepsilon\left(a \sin^2\phi_1 \sin\phi_2\right)$, dove $a(I_1, I_2) = 2\sqrt{\frac{2}{\omega}} I_1 I_2^{\frac{1}{2}}$. Tenta di rimuovere il primo ordine della perturbazione, cerca cioè una funzione $W(\psi, A)$ tale che valga in trasformata di Fourier:

$$i\hat{W}(k, A)\left(\partial_A H_0(A) \cdot k\right) + \hat{H}_1(k, A) = 0. \tag{7.79}$$

Ti serve trovare la trasformata di H_1. La dipendenza angolare è $\sin^2\phi_1 \sin\phi_2$. Ora

$$\sin\psi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\psi} - e^{-i\psi}\right). \tag{7.80}$$

Dunque, svolgendo il quadrato e i prodotti:

$$H_1 = \frac{a}{4i}\left(e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2}\right) - \frac{a}{8i}\left(e^{i(2\psi_1+\psi_2)} - e^{-i(2\psi_1+\psi_2)} + e^{-i(2\psi_1-\psi_2)} - e^{i(2\psi_1-\psi_2)}\right). \tag{7.81}$$

Dunque i valori di k per cui la trasformata di Fourier di H_1 non è nulla, sono

$$k = \pm\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}. \tag{7.82}$$

Per controllare se ti trovi nel caso a) o nel caso c) (il caso b) è escluso perché H_1 è a media nulla, cioè la trasformata per $k = (0,0)$ è zero), devi determinare $\partial_A H_0(A) = \binom{1}{\omega}$. Controlla se $k \cdot \partial_A H_0(A) = 0$. Vale $k \cdot \partial_A H_0(A) = k_1 + \omega k_2$, ma allora per poter rimuovere il primo ordine ti basta che $k_1 + \omega k_2 \neq 0$ per i valori di k che hai determinato sopra. Sostituendo: ω, $2+\omega$, $2-\omega$ devono essere diversi da zero, cioè $\omega \neq 0, 2, -2$. In tal caso puoi procedere e ottieni:

$$\begin{aligned}&\hat{W}(\pm(0,1), A_1, A_2) = \tfrac{I_1 I_2^{\frac{1}{2}}}{\omega\sqrt{2\omega}}; \quad \hat{W}(\pm(2,1), A_1, A_2) = -\tfrac{I_1 I_2^{\frac{1}{2}}}{2(2+\omega)\sqrt{2\omega}}\\ &\hat{W}(\pm(2,-1), A_1, A_2) = \tfrac{I_1 I_2^{\frac{1}{2}}}{2(2-\omega)\sqrt{2\omega}}.\end{aligned} \tag{7.83}$$

Chi è la nuova hamiltoniana all'ordine 0? $K_0 = A_1 + \omega A_2$.

Esercizio 7.13 *Considera $H = I_1\omega_1 + \frac{I_2^2\omega_2}{2} + \varepsilon I_1^2 I_2^2 \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2$. Rimuovi la perturbazioe al primo ordine.*

Soluzione
Usando l'espressione esponenziale del seno, si ottiene:

$$\begin{aligned}&\sin^2\psi_1 \sin^2\psi_2 = \\ &\frac{1}{16}\Big(4 + e^{i(2\psi_1-2\psi_2)} + e^{-i(2\psi_1-2\psi_2)} + e^{i(2\psi_1+2\psi_2)} + e^{i(2\psi_1+2\psi_2)} \\ &-2e^{i2\psi_1} - 2e^{-i2\psi_1} - 2e^{i2\psi_2} - 2e^{-i2\psi_2}\Big).\end{aligned} \tag{7.84}$$

Dunque:

$$\hat{H}_1(k_1, k_1, A_1, A_2) = A_1^2 A_2^2 \cdot \begin{cases} \frac{1}{4} & k = (0,0) \\ \frac{1}{16} & k = \pm(2,2), \pm(2,-2) \\ -\frac{1}{8} & k = \pm(2,0), \pm(0,2) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{7.85}$$

La media è nulla, dunque devi portare il termine di media in H_0, cioè l'hamiltoniana imperturbata che devi considerare è

$$\tilde{H}_0 = H = I_1\omega_1 + \frac{I_2^2\omega_2}{2} - \frac{\varepsilon}{4} I_1^2 I_2^2. \tag{7.86}$$

Sotto quali condizioni riesci a rimuovere la perturbazione al primo ordine? Calcola le frequenze $\partial_A H_1 = \binom{\omega_1}{A_2\omega_2}$. Allora deve essere:

$$\omega_1 \pm 2A_2\omega_2 \neq 0, \quad \omega_1 \neq 0, \quad A_2\omega_2 \neq 0. \tag{7.87}$$

In tal caso:

$$\hat{W}(\pm(2,-2), A) = \pm i\frac{A_1^2 A_2^2}{32(\omega_1 - A_2\omega_2)}, \hat{W}(\pm(2,2), A) = \pm i\frac{A_1^2 A_2^2}{32(\omega_1 + A_2\omega_2)}, \tag{7.88}$$

$$\hat{W}(\pm(2,0),A) = \mp i\frac{A_1^2A_2^2}{16\omega_1},\ \hat{W}(\pm(0,2),A) = \mp i\frac{A_1^2A_2^2}{16\omega_2}. \tag{7.89}$$

La nuova hamiltonianana all'ordine 0 (che in realtà dipende da ε, ma non dalle variabili angolari) è $K_0 = A_1\omega_1 + \frac{A_2^2\omega_2}{2} - \frac{\varepsilon}{4}A_1^2A_2^2$.

Che succede nelle risonanze, cioè, ad esempio, se ti interessa il moto nella regione intorno a $A_2 = \frac{2\omega_1}{\omega_2}$? Non puoi rimuovere tutto il primo ordine; in pratica sopravvive un termine di ordine ε che dipende dalle ψ. Operando come sopra, non puoi risolvere l'equazione per i coefficienti di W con $k = \pm(2,-2)$; i corripondenti termini di H_1 sopravvivono , e sono:

$$\frac{A_1^2A_2^2}{16}\left(e^{i(2\psi_1-2\psi_2)} + e^{-i(2\psi_1-2\psi_2)}\right) = \frac{A_1^2A_2^2}{8}\cos(2\psi_1-2\psi_2). \tag{7.90}$$

L'hamiltoniana che ottieni è:

$$K = A_1\omega_1 + \frac{A_2^2\omega_2}{2} - \frac{\varepsilon}{4}A_1^2A_2^2 + \varepsilon\frac{A_1^2A_2^2}{8}\cos(2\psi_1-2\psi_2). \tag{7.91}$$

8 Altri Esercizi in Formalismo Hamiltoniano

8.1 Trasformazioni Canoniche

Esercizio 8.1 (III Esonero 26/5/97, prima parte) *Considera la famiglia di trasformazioni da $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$:*

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{p}{q^3}\right)^\alpha \\ P &= -\left(\frac{p}{q^3}\right)^\beta (q^4+1), \end{aligned} \tag{8.1}$$

con α, $\beta > 0$.

a) *Trova i valori di α e β per i quali la trasformazione è canonica.*

b) *Determina la funzione generatrice del tipo $F(q,Q)$ della trasformazione.*

Esercizio 8.2 (Compito del 5/6/90, parte 2) *Si consideri la trasformazione*

$$\begin{aligned} Q &= -\arctan\frac{p}{2q} \\ P &= q^2 + \alpha p^2, \end{aligned} \tag{8.2}$$

definita nell'insieme $\{q > 0,\, p > 0\}$. Dimostrare che questa trasformazione è canonica per una scelta opportuna di α e scrivere, per tale valore, la trasformazione inversa.

Esercizio 8.3 (Esonero recupero 19/5/92, prima parte) *Trovare per quali valori di α, β la seguente trasformazione è canonica:*

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{p}e^{\alpha q} \\ P &= -2p^\beta e^{\frac{q}{2}}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

In corrispondenza di tali valori scrivere la fuinzione generatrice della trasformazione.

Esercizio 8.4 (III Esonero 1/6/95 (Marchioro), prima parte) *Data la seguente trasformazione: $(q,p) \leftrightarrow (Q,P)$*

$$\begin{aligned} q &= -\frac{1}{4}Q^\alpha P \\ p &= Q^\beta, \end{aligned} \tag{8.4}$$

con α, $\beta \in \mathbb{R}$, trovare i valori di α e β per cui essa è canonica e trovarne la funzioni generatrice $F(q,Q)$.

8.2 Hamilton-Jacobi e variabili azione-angolo

Esercizio 8.5 (by Negrini, 2000) *Si consideri l'hamiltoniana*

$$H = \frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{p_2^2}{q_2^2} + \sin(q_1^2 + q_2^2),$$

e si consideri la funzione generatrice

$$S = \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} P_1 + q_1^2 P_2.$$

a) *Si determini la trasformazione canonica individuata da S, nella regione $q_1, q_2 > 0$.*

b) *Si determini la nuova Hamiltoniana.*

c) *Si determinino le soluzioni delle equazioni del moto per la nuova Hamiltoniana.*

d) *Le soluzioni ottenute permettono di trovare le soluzioni delle equazioni del moto nelle vecchie variabili?*

Soluzione.

a) La funzione generatrice dipende dalle vecchie coordiante e dai nuovi impulsi. Pertanto la traformazione canonica è implicitamente definita da:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} & p_1 &= q_1 P_1 + 2q_1 P_2 \\ Q_2 &= q_1^2 & Q_2 &= q_2 P_1. \end{aligned} \tag{8.5}$$

La trasformazione canonica è dunque:

$$\begin{aligned} q_1 &= \pm\sqrt{Q_2} & p_1 &= \pm\sqrt{Q_2}(P_1 + 2P_2) \\ q_2 &= \pm\sqrt{2Q_1 - Q_2} & p_2 &= \pm\sqrt{2Q_1 - Q_2}P_1. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Nella regione $q_1, q_2 > 0$ il segno da scegliere è $+$.

b) Sostituendo nell'espressione di$H$ si ottiene l'hamiltoniana nelle nuove variabili:

$$K = (P_1 + 2P_2)^2 + P_1^2 + \sin(2Q_1).$$

c) La variabile Q_2 è ciclica, dunque P_2 si conserva, e K si conserva. Un modo per ottenere la quadratura del moto è di scrivere la lagrangiana unidimensionale per la variabile Q_1, pensando P_2 come un parametro fissato (un altro è la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi, per separazione di variabili, o l'ispezione diretta delle equazioni del moto). Si ottiene

$$L = P_1 \dot{Q}_1 - K,$$

dove

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial K}{\partial P_1} = 4P_1 + 4P_2.$$

La lagrangiana è:

$$L = \frac{1}{8}\dot{Q}_1^2 - \dot{Q}_1 P_2 - 2P_2^2 - \sin(2Q_1).$$

In questa lagrangiana il termine $-2P_2^2$ è costante, e posso eliminarlo, inoltre il termine $\dot{Q}_1 P_2$ è una derivata totale ripetto al tempo ($\dot{Q}_1 P_2 = \frac{d}{dt}(Q_1 P_2)$), quindi non influisce sulle equazioni del moto, e posso elimare anch'esso. In definitiva la Lagrangiana che descrive il moto è

$$L = \frac{1}{8}\dot{Q}_1^2 - \sin(2Q_1),$$

che ha come energia totale

$$E = \frac{1}{8}\dot{Q}_1^2 + \sin(2Q_1).$$

L'analisi qualitativa di questo moto è assolutamente standard.

Il moto di Q_1 è descritto da:

$$t = \pm \int^{Q_1} dQ_1 \frac{1}{\sqrt{8(E - \sin(2Q_1))}},$$

la determinazione del moto nelle altre variabili è determinato integrando le equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned} P_2(t) &= P_2(0) \\ P_1(t) &= \frac{1}{4}\dot{Q}_1(t) - P_2(0) \\ Q_2(t) &= Q_2(0) + Q_1(t) - Q_1(0) + 4tP_2(0). \end{aligned} \tag{8.7}$$

d) La trasformazione effettuata è valida solo fino a che $Q_2 \geq 0$ e $2Q_1 - Q_2 \geq 0$. Quindi posso ottenere le soluzioni nelle vecchie variabili solo fino a quando $Q_2(t) \geq 0$ e $2Q_1(t) - Q_2(t) \geq 0$. Dalle soluzioni delle equazioni di Hamilton si ottiene:

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= Q_2(0) + Q_1(t) - Q_1(0) + 4tP_2(0) \\ (2Q_1 - Q_2)(t) &= 2Q_1(0) - Q_2(0) + Q_1(t) - Q_1(0) - 4tP_2(0) \end{aligned} \tag{8.8}$$

Ne segue che se $P_2(0) \neq 0$, e il moto in Q_1 è limitato, il moto raggiunge o la frontiera $Q_2(t) = 0$ o la frontiera $2Q_1(t) - Q_2(t) = 0$. Infatti, o $Q_1(t) - Q_1(0) + 4tP_2(0)$ o $Q_1(t) - Q_1(0) + 4tP_2(0)$ tende a meno infinito.

Quindi la soluzione trovata non può essere estesa per tutti i tempi nelle vecchie variabili. Per ottenere la soluzioni per tutti i tempi bosogna considerare la trasfrmazione canonica nelle altre regioni dello spazio delle fasi.

Esistono, però, dati iniziali per cui si ottiene globalemente il moto nelle vecchie variabili. Sia ad esempio $P_2 > 0$ e consideriamo i moti illimitati in Q_1, con $\dot{Q}_1 > 0$ (che corrispondono a $E > 1$). Allora, se $\sqrt{8(E-1)} > 4P_2$, le condizioni per l'invertibilità sono sempre soddisfatte, infatti:

$$\frac{Q_1(t) - Q_1(0)}{t} = \dot{Q}_1(\tau) = \sqrt{8(E - \sin(2Q_1(\tau)))},$$

per un opportuno tempo intermedio $0 < \tau < t$. Dunque: $Q_1(t) - Q_1(0) \pm 4tP_2 > 0$.

Esercizio 8.6 ((III Esonero 26/5/97, seconda parte) *Un'asta omogenea di massa m e lunghezza l è vincolata a muoversi su di un piano orizzontale (O, x, y). Sul suo punto medio P è applicata una forza di energia potenziale*

$$V = \frac{J^2}{2m}\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2),$$

dove x, y sono le coordinate del punto P, e $k > 0$, J paramteri fissati.

Usa come variabili lagrangiane la distanza ρ di P dall'origine O, l'angolo θ che PO forma con l'asse delle x, e l'angolo ϕ che l'asta forma con l'asse delle x.

a) *Scrivi la Lagrangiana e l'Hamiltoniana;*

b) *risolvi l'equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili;*

c) *considera il dato iniziale*

$$\begin{array}{lll} P_\rho(0) = 0 & P_\theta(0) = 0 & P_\phi(0) = p_0 > 0 \\ \rho(0) = \rho_0 > 0 & \theta(0) = \theta_0 & \phi(0) = 0. \end{array} \tag{8.9}$$

Per quali valori di θ_0 il moto è multiperiodico (cioè è nella regione dello spazio delle fasi in cui il moto può essere descritto in variabili azione-angolo)?

d) *Sia ora $P_\phi(0) = 0$. Trova un valore di θ_0 per cui il moto è periodico.*

Esercizio 8.7 (III Esonero 1/6/95 (Marchioro) seconda parte) *In un piano verticale è posto un disco omogeneo di centro C, massa M e raggio R, che rotola senza strisciare lungo un asse orizzontale x. In tale piano è posta un'asta omogenea pesante di massa m e lunghezza $L = R$ ed i cui estremi A e B sono obbligati a scorrere senza attrito lungo una guida liscia solidale alla circonferenza del disco.*

Scegliamo come variabili Lagrangiane l'ascisa x_C del centro del disco e l'angolo θ che CH forma con la verticale discendente, ove H è il punto di mezzo dell'asta AB.

a) *Scrivere le equazioni del moto con il metodo di Lagrange.*

b) *Trovare due integrali primi e, tramite questi, considerando le seguenti condizioni inizilali:*

$$x_C(0) = 0; \ \ \dot{x}_C(0) = 0; \ \ \theta(0) = 0: \ \ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0,$$

trovare i valori di $\dot{\theta}_0$ per cui l'asta compie una rotazione completa.

c) *Scrivere prima l'Hamiltoniana e poi l'equazione di Hamilton-Jacobi.*

d) *(aggiunto) Risolvere per separazione di variabili l'equazione di Hamilton-Jacobi. Esiste una regione nello spazio delle fasi in cui il motot può essere descritto in variabile azione-angolo?*

Esercizio 8.8 (Esonero 19/5/92 (recupero), seconda parte) *Data la Lagrangiana*

$$L = (1 + q^2)\dot{q}^2 - \dot{q} + q,$$

a) *Scrivere la corrispondente Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.*

b) *Scirvere l'equazione di Hamilton-Jacobi relativa a tale Hamiltoniana e riportare il moto del sistema alle quadrature.*

c) *Scrivere l'energia meccanica totale corrispondente alla Lagrangiana L. Utilizzando la conservazione dell'energia, riportare il sistema alle quadrature. Confrontare il risultato con quanto ottenuto mediante l'equazione di Hamilton-Jacobi.*

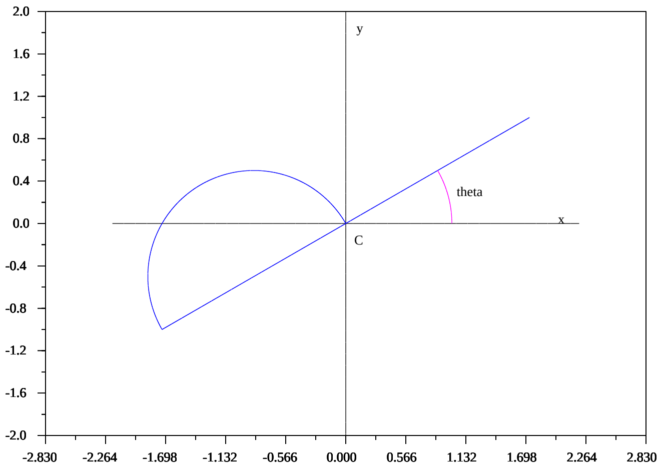
Esercizio 8.9 (Compito 12/10/94, seconda parte) *Si consideri il sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p - q^2 \\ \dot{p} &= 2q^3 - 2pq \end{aligned} \tag{8.10}$$

a) *Si riconosca che il sistema è hamiltoniano.*

b) *Si risolva il sistema usando il metodo di Hamilton-Jacobi.*

Esercizio 8.10 (Compito 23/9/91) *Un corpo rigido è formato da un semidisco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta di massa m e lunghezza $2R$. Esso è vicolato da una cerniera a ruotare attorno a C in un piano verticale, e sia θ l'angolo che l'asta forma con l'asse (vedi figura).*



a) *Scirvere la Lagrangiana e mostrare che essa assume la forma*

$$L = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 - a\sin\theta - b\cos\theta,$$

e scrivere le espressioni di I, a, b in funzione dei R, M, m.

b) *Determinata l'Hamiltoniana, scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi e risolvere il problema della dinamica del corpo riportando tale equazione alle quadrature.*

c) *Dire sotto quali condizioni la posizione $\theta = 0$ è di equilibrio. AQl di fuori di tali condizioni studiare il moto del corpo con condizioni iniziali $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Specificare se la rotazione avviene inizialemente in senso orario o antiorario, se esiste un tempo t^* in cui l'asta raggiunge una posizione verticale ed in tal caso determinare l'espressione di tale tempo t^*.*

Esercizio 8.11 (Compito 5/6/90, prima parte) *Una particella puntiforme di massa $m = 1$ si muove nel piano sotto l'azione di una forza conservativa di energia potenziale*

$$V(r) = -\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}},$$

esendo r la distanza dall'origine.

Si supponga che, all'istante $t = 0$, indicando con θ l'angolo polare rispetto all'origine:

$$r(0) = 1, \;\; \dot{r}(0) = v_0, \;\; \dot{\theta}(0) = 1.$$

Si chiede di dire per quali valori di v_0 il moto è quasi periodico.

8.3 Teoria delle perturbazioni

Esercizio 8.12 *Si consideri l'Hamiltoniana*

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + \varepsilon(q^3 + \lambda q p^2).$$

Si trovi una trasformazione canonica polinomiale, che trasforma H in una Hamiltoniana della forma:

$$K(Q,P) = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\omega^2 Q^2 + \varepsilon^2 V(Q,P,\varepsilon),$$

con $V(Q,P,\varepsilon)$ limitato in ε. Si utilizzi tale trasformazione per scrivere la soluzione generale delle equazioni del moto a meno di termini di oridine ε^2.

9 Ulteriori (Pochi) Esercizi in Formalismo Hamiltoniano

Esercizio 9.1 *Due aste omogenee di massa M e lunghezza L, una di estremi A e B e l'altra di estremi C e D, si muovono in un piano verticale. L'estremo B è incernierato, senza attrito, nel baricentro dell'asta CD. Una molla di costante elastica k lega A a C.*

1 *Determinare i gradi di libertà*

2 *Scrivere la Lagrangiana*

3 *Scrivere l'Hamiltoniana*

4 *Scrivere l'equazione di Hamilton Jacobi*

5 *Risolvere l'equazione di Hamilton Jacobi*

6 *Supponendo che inizialmente le aste sono ferme, con CD parallela all'asse delle x„ con l'ascissa di C minore dell'ascissa di D e con AC parallela all'asse delle y con l'ordinata di A maggiore dell'ordinata di B. Che angolo forma la direzione di CD con l'asse orizzontale quando C passa per il baricentro di AB?*

Esercizio 9.2 *Una circonferenza omogenea, di raggio R e massa M, è vincolata a muoversi in un piano orizzontale, passando sempre per un punto fisso O del piano. Un'altra circonferenza di raggio $r < R$ e massa m rotola senza strisciare sul bordo interno della prima.*

1 *Scrivere la lagrangiana*

2 *Scrivere l'hamiltoniana*

3 *Scrivere l'equazione di Hamilton Jacobi*

4 *discutere la riconducibilità del moto alle quadrature e, eventualmente, la regione dello spazio delle fasi in cui si possono definire le variabili azione-angolo*

Esercizio 9.3 *In un piano orizzontale, l'estremo A di un'asta omogenea di massa m e lunghezza L è vincolato a muoversi su di una guida circolare fissa del piano, di centro O e raggio $R > L$. L'altro estremo dell'asta è richiamato da O da una molla di costante elastica k.*

1 *Scrivi la lagrangiana*

2 *Scrivi l'hamiltoniana*

3 *Determina la regione nello spazio delle fasi in cui si possono introdurre le variabili azione-angolo*

4 *Discuti le posizioni di equilibrio e la loro stabilità.*

5 *Prova che esistono moti per cui l'asta rimane parallela al raggio che passa per A, sia interna che esterna alla guida. Osserva che sono moti periodici.*

6 *Discuti se le orbire descritte al punto 5 sono stabili, cioè se una piccola perturbazione dei dati iniziali fa ruotare l'asta in modo che rimanga per tutti i tempi vicina al raggio OA oppure no.*

7 *Trova un'altra famiglia di soluzioni periodiche, oltre a quelle descritte nel punto 5.*

Esercizio 9.4 *Sia*

$$H = \frac{1}{2}P_\rho^2 + \frac{1}{2\rho^2}P_\theta^2 - \rho\cos\theta - \frac{1}{2}\rho^2\sin^2\theta,$$

e sia, al tempo 0 $\theta(0) = P_\theta = 0$ e $\rho = P_\rho = 1$. Sia $S(\rho, \theta, P_1, P_2) = P_1\rho\cos\theta + \alpha P_2\rho\sin\theta$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ una funzione generatrice, con x_1, x_2, P_1, P_2 nuove coordinate ed impulsi. Determina i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che l'hamiltoniana nelle nuove variabili sia integrabile.

Utilizza tale trasformazione per determinare il valore di $\theta, \rho, P_\rho, P_\theta$ al tempo $t = \pi$.

10 Altro

Esercizio 10.1 *In un piano verticale (x, y) di origine O, considerate il sistema materiale formato da due punti P_1, P_2, di massa m_1, m_2, rispettivamente; un vincolo liscio obbliga O, P_1, P_2 ad essere allineati. Inoltre il punto P_1 è vincolato a muoversi lungo la circonferenza di centro (R, O) e raggio R, ed il punto P_2 è vincolato a muoversi lungo la retta $x = 2R$.*

a) Determinare la funzione di Lagrange;

b) Determinare per quali valori del parametro $a = \frac{m_2}{m_1}$ si possono avere posizioni di equilibrio;

c) Determinare le piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

Soluzione

Il problema è evidentemente ad un solo grado si libertà. Scelgo come variabile l'angolo ϕ che la direzione $O\,P_1\,P_2$ forma con l'asse delle x. Per i vincoli presenti, $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. Con un po' di trigonometria elementare si ottiene:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2R\cos^2\phi \\ 2R\sin\phi\cos\phi \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2R \\ 2R\tan\phi \end{pmatrix}, \tag{10.1}$$

quindi:

$$\dot{P}_1 = \dot{\phi}\begin{pmatrix} -4R\sin\phi\cos\phi \\ 2R(\cos^2\phi - \sin^2 phi \end{pmatrix} \quad \dot{P}_2 = \dot{\phi}\begin{pmatrix} 0 \\ 2R\frac{1}{\cos^2\phi} \end{pmatrix}, \tag{10.2}$$

L'energia potenziale dovuta alla forza di gravità è

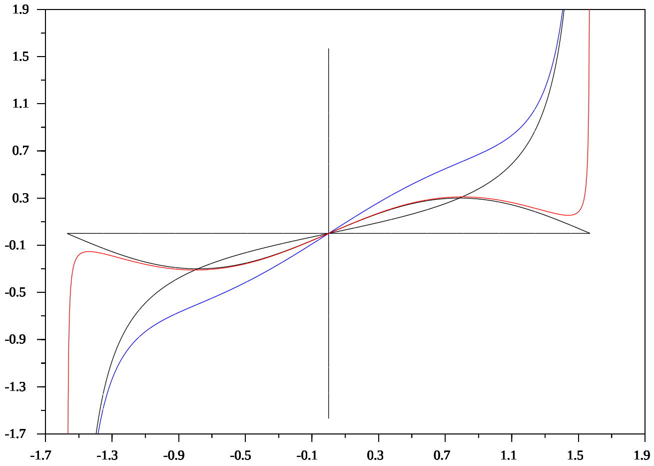
$$V = 2Rg(m_1 \sin\phi\cos\phi + m_2 \tan\phi), \tag{10.3}$$

dove g è l'accelerazione di gravità.

Quadrando e sommando i termini cinetici si ottiene la Lagrangiana:

$$L = 2R^2\dot{\phi}^2(m_1 + m_2\frac{1}{\cos^4\phi}) - 2Rg(m_1 \sin\phi\cos\phi + m_2\tan\phi). \tag{10.4}$$

Per analizzare le posizioni di equilibrio, prima del calcolo delle derivate, tento un grafico qualitativo dell'energia potenziale V, ricordandomi che $2\sin\phi\cos\phi = \sin(2\phi)$.



In nero ho disegnato il seno di $(2x)$ e la tangente di x, nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. La curva blu è la somma, con coefficienti davanti al seno e alla tangente, dello stesso ordine, la curva rossa l'ho ottenuta con un coefficiente davanti alla tangente molto piu' piccolo del coefficiente davanti al seno. I due coefficienti sono esattamente le masse. Dunque deve esistere un valore critico $\bar{a}$ del parametro $a = \frac{m_2}{m_1}$ tale che:

- per $a < \bar{a}$ ci sono quattro posizioni di equilibrio; nell'ordine crescente di ϕ: instabile stabile instabile stabile;
- per $a \to 0$ le posizioni estreme tendono a $0 = 2\pi$, le altre tendono alle posizioni di equilibrio per il potenziale $\sin(2\phi)$, che sono evidentemente $\pm\frac{\pi}{4}$;
- per $a \to \bar{a}^-$ le due posizioni di equilibrio a sinistra andranno a coincidere, cosí come le due a destra (vviamente saranno tutte instabili);
- per $a > \bar{a}$ non ci sono posizioni di equilibrio: qualunque sia il dato iniziale $\lim_{t\to+\infty}\phi(t) = -\frac{\pi}{2}$, cioè l'ordinata di P_2 va a $-\infty$ e $P_1 \to O$.

Procedendo esplicitamente:

$$V' = 2Rg(m_1(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + m_2\frac{1}{\cos^2\phi}) = 2Rg(m_1(2\cos^2\phi - 1) + m_2\frac{1}{\cos^2\phi}). \tag{10.5}$$

Le posizioni di equilibrio le ottengo annullando V', risolvendo, cioè:

$$2m_1\cos^4\phi - m_1\cos^2\phi + m_2 = 0. \tag{10.6}$$

Ottengo

$$\cos^2\phi = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{1-8a}\right). \tag{10.7}$$

Dunque il valore critico del parametro è $\bar{a} = \frac{1}{8}$. Per $a > \bar{a}$ non ci sono soluzioni. Per $a < \bar{a}$ si ha $0 < 1 - 8a < 1$, dunque

$$\cos\phi = \frac{1}{2}\sqrt{1 \pm \sqrt{1-8a}} \tag{10.8}$$

(scarto i valori negativi perchè $|\phi| < \frac{\pi}{2}$). In definitiva ho le quattro posizioni di equilibrio che mi aspettavo:

$$\phi = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{1 \pm \sqrt{1-8a}}\right). \tag{10.9}$$

Per $a = \bar{a}$ esse coincidono a due a due, nei punti

$$\phi = \pm\frac{\pi}{3}. \tag{10.10}$$

L' analisi della stabilità è facilmente ottenibile dal grafico.

Per $a < \bar{a}$ esistono due posizioni di equilibrio stabile: $\phi_1 = -\arccos\left(1 - \sqrt{1-8a}\right)$ e $\phi_2 = \arccos\left(1 + \sqrt{1-8a}\right)$. Il modo più pulito per determinare la frequenza delle piccole oscillazioni è quello di scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni. Per fare ciò bisogna calcolare la derivata seconda dell'energia potenziale. La indico con V''. Detto α_i lo scostamento dall'equilibrio ϕ_i $(i = 1, 2)$, le lagrangiane delle piccole oscillazioni sono:

$$L_i = 2R^2\dot{\alpha}_i^2(m_1 + m_2\frac{1}{\cos^4\phi_i}) - \frac{1}{2}V''(\phi_i)\alpha_i^2, \tag{10.11}$$

quindi le frequenze delle piccole oscillazioni intorno ai due equilibri stabili sono:

$$\omega_i = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{V''(\phi_i)}{m_1 + \frac{m_2}{\cos^4\phi_i}}}. \tag{10.12}$$

(Notare che, svolti i conti, esse dipendono solo dal rapporto tra le masse a).

Riferimenti bibliografici

[1] V. I. Arnold *Metodi Matematici della Meccanica Classica* Editori Riuniti

[2] V. I. Arnold *Equazioni Differenziali Oridinarie* Editori Riuniti

[3] F. Bampi, M. Benati, A. Morro *Problemi di Meccanica Razionale* ECIG

[4] G. Dell'Antonio *Elementi di Meccanica: Meccanica Classica* Liguori Editore

[5] G. Dell'Antonio, E. Orlandi, A. Teta *Esercizi di Meccanica Razionale* Dispense

[6] G. Gallavotti *Meccanica Elementare* Boringhieri

[7] F. R. Gantmacher *Lezioni di Meccanica Analitica* Editori Riuniti

[8] H. Goldstein *Meccanica Classica* Zanichelli

[9] L. D. Landau, E. M. Lifšits *Meccanica* Editori Riuniti

[10] E. Olivieri