Esercizi di meccanica dei Fluidi 2016–2018

18 dicembre 2018

Indico con * gli esercizi svolti durante le esercitazioni, o come parte della teoria, o comunuque utili per affrontare la teoria; questi esercizi fanno parte del programma di esame.

Indice

1 Le equazioni per il moto dei fluidi

1.1 * Sul teorema del trasporto

La seconda forma del teorema di trasporto afferma che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{A_t}\rho(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)=\int_{A_t}\rho(\mathbf{x},t)\,(\partial_t+\mathbf{u}\cdot\nabla)f(\mathbf{x},t).$$

Usando invece la prima forma del teorema del trasporto si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{A_t}\rho(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)=\int_{A_t}(\partial_t(\rho f)+\mathrm{div}\,(\rho \mathrm{f}))$$

da cui si deduce, usando l'arbitrarietà di A,

$$\partial_t(\rho f)+\mathrm{div}\,(\rho \mathrm{f})=\rho(\partial_{\mathrm{t}}+\mathbf{u}\cdot\nabla\rho)$$

Provare questa identià facendo le derivate al primo membro e usando l'equazione di conservazione per ρ.

1.2 * Variabili lagrangiane

Supponete di avere un sistema meccanico di N particelle $(\mathbf{x}_i,\mathbf{v}_i)\in\mathbb{R}^6$, ognuna di massa $1/N$, e sia $f(\mathbf{x},t)$ un osservabile nella sola variabile spaziale. Considerate la "misura" di f sul sistema, cioé

$$F^N(t)=\frac{1}{N}\sum f(\mathbf{x}_i(t),t)$$

Supponete che nel limite $N\to+\infty$, la distribuzione delle masse al tempo 0 tenda a ρ_0, cioè

$$\frac{1}{N}\sum\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i(0))\,\mathrm{d}\mathbf{x}\to\rho(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x$$

(nel senso delle distribuzioni). A cosa tende l'osservabile $F^N(t)$?

1.3 * Il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni

Nella derivazione delle equazioni dei fluidi si usa il seguente lemma.
Sia f una funzione su Ω; se per ogni $A\subset\Omega$ $\int_A f=0$, allora $f=0$.

Dimostrarlo nell'ipotesi f continua, e nell'ipotesi meno restrittiva di f misurabile (in tal caso si otterrà $f=0$ q.o.).

1.4 Sul teorema dei Cauchy

Si ipotizza che lo scambio energetico tra una regione A del fluido e il resto sia dato da

$$\int_{\partial A}h(\mathbf{x},\mathbf{n}(\mathbf{x}),t)\sigma(\mathrm{d}\mathbf{x})$$

dove h è uno scalare che dipende oltre che dal punto, anche da $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, normale esterna ad A nel punto.

Procedendo come per il teorema di Cauchy, si consideri un punto $\mathbf{x}_0$ e una regione $x_0 + \varepsilon A$. Risulta

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbf{x}_0+\varepsilon\,\partial A} h(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), t)\sigma(\mathrm{d}\mathbf{x}) = 0$$

Dedurre da questo fatto che

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), t) = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$$

dove il flusso di calore $\mathbf{q}$ non dipende da $\mathbf{n}$.

1.5 * Densità e jacobiano

Sia

$$\partial_t \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0$$

e sia $J(\mathbf{x}, t)$ il determinate dello jacobiano del flusso

$$J(\mathbf{x}, t) = \det \partial\Phi^t(\mathbf{x})$$

Provare che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\rho\left(\Phi^t(\mathbf{x}), t\right) J(\mathbf{x}, t)\right) = 0$.
Si provi che $\rho\left(\Phi^t(\mathbf{x}), t\right) J(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}, t)$ anche scrivendo le soluzioni delle equazioni per $\rho\left(\Phi^t(\mathbf{x}), t\right)$ e per $J(\mathbf{x}, t)$ ipotizzando noto il valore di $\nabla \cdot \mathbf{u}|_{\Phi^t(\mathbf{x}),t}$

2 Esempi di flussi

2.1 EDO non autonome ed esponenziali di matrici

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare e^{At} e e^{Bt} risolvendo $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}$.
Considerare l'edo in $\mathbb{R}^2$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = U(t)\mathbf{x}(t), \quad \text{con} \;\; U(t) = \begin{cases} A & \text{se} \quad t \in [0, 1) \\ B & \text{se} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Determinare $\mathbf{x}(2)$ in funzione del dato inziale $\mathbf{x}_0$.
Mostrare che l'affermazione

$$\mathbf{x}(2) = \mathrm{e}^{\int_0^2 U(t)\,\mathrm{d}t}\mathbf{x}_0$$

è falsa.

Sia $U(t)$ una matrice, con dipendenza regolare da t. Provare che se per ogni t e s la matrice $U(t)U(s) - U(s)U(t)$ è nulla, allora la soluzione di $\dot{\mathbf{x}}(t) = U(t)\mathbf{x}(t)$ è data da $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{W(t)}\mathbf{x}_0$, dove $W(t) = \int_0^t U(s)\,\mathrm{d}s$.

2.2 Un esempio di flusso piano

Sia $\Phi_t(\mathbf{x}) = (x(t),\, y(t))$ dato da

$$\begin{cases} x(t) = x\cos(\nu t) - y\sin(\nu t) \\ y(t) = x\sin(\nu t) + y\cos(\nu t) \end{cases}$$

dove $x = x(0)$, $y = y(0)$ e $\nu = \nu(|\mathbf{x}|)$ è una funzione del solo modulo $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2+y^2}$.
Determinare il campo di velocità $\mathbf{u}$ per questo flusso. Dipende dal tempo?

Per quali ν il flusso è una rotazione rigida intorno all'origine?

2.3 Un esempio di flusso piano dipendente dal tempo

Sia R_t la matrice di rotazione di angolo t in verso antiorario intorno all'origine

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

e sia A la matrice

$$A = R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che trasforma ogni vettore nel suo perpendicolare (in verso antiorario).
Mostrare che

$$R_t R_s = R_{t+s} = R_s R_t$$

e che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R_t = A R_t$$

(il che corrisponde ad affermare che $R_t = \mathrm{e}^{At}$).

Sia $\mathbf{x} = \binom{x}{y}$, $\mathbf{x}(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$, $\mathbf{z}$ un fissato punto del piano diverso dall'origine, e α parametro reale diverso da 1. Considera il flusso

$$\mathbf{x}(t) = R_t\mathbf{x} - \frac{1}{\alpha - 1}\,(R_{\alpha t} - R_t)\,\mathbf{z}$$

Determina il campo di velocità. Come è fatto?

2.4 Soluzioni stazionarie per un fluido incomprimibile

Determinare tutte le soluzioni stazionarie radiali di un flusso piano incomprimibile in un dominio circolare.

2.5 Soluzioni stazionarie per un fluido incomprimibile II

Determinare tutte le soluzioni stazionarie radiali irrotazionali di un flusso piano incomprimibile in una corona circolare.

2.6 Soluzioni stazionarie per un fluido comprimibile

Determinare tutte le soluzioni stazionarie radiali di un flusso piano comprimibile in un dominio circolare.

2.7 Invarianza per traslazioni

Sia D un dominio invariante per traslazioni nella prima componente (per esempio $\mathbb{R}^2$, o un canale orizzontale periodico e non, o il toro).
Sia $\mathbf{w} = \binom{c}{0}$, con c costante. Provare che $\mathbf{u}$ è soluzione dell'equazione di Eulero se e solo se lo è anche $\mathbf{u} + \mathbf{w}$.

2.8 Flusso nel canale periodico I

Sia $D = [0, 2\pi] \times [0, L]$, periodico nella prima variabile. Mostrare che il **flusso** $\int_0^L dy u_1(x, y)$ è indipendente da x, per la condizione di incomprimibilità.
Mostrare che $\int_0^{2\pi} dx u_2(x, y) = 0$ per ogni y, e spigarlo fisicamente.
Mostrare che le soluzioni di Eulero nel canale non sono uniche, perché si può sommare ad una soluzione un campo costante nella direzione orizzontrale, dipendente dal tempo, ottenendo una soluzione.
Notate che l'unicità si riottiene aggiungendo la condizione fisica che il flusso sia costante nel tempo.

2.9 Flusso nel canale periodico II

Sia $D = [0, 2\pi] \times [0, L]$, periodico nella prima variabile. Mostrare che esiste un solo campo a divergenza nulla $\mathbf{u}$ di vorticità assegnata e di flusso assegnato.
Mostrare che se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa vorticità, differiscono per un campo costante nella direzione positiva.
Assegnata ω, indicare con ψ_0 la funzione di corrente che genera il campo $\mathbf{u}$ di vorticità ω e di flusso nullo. Quali condizioni al contorno valgono per ψ_0? Mostrare che la funzione di corrente per il campo di flusso Γ è $\psi = \psi_0 + \Gamma y/L$. Quali condizioni al contorno valgono per ψ?

2.10 Vorticità per fluidi comprimibili

Scrivere l'equazione per la vorticità per un fluido comprimibile in 2 e 3 dimensioni. Notare la differenza con il caso incomprimibile.
Sia $\zeta = \omega/\rho$. Scrivere l'equazione per ζ in 2 e in 3 dimensioni.

2.11 * Campo di velocità di una distribuzione radiale

Sia $\omega = \omega(|\mathbf{x}|)$ una distribuzione radiale di vorticità nel piano. Determinare il campo di velocità nel punto $\mathbf{x}$, secondo le linee seguenti (tipiche dell'elettrostatica).
1. Sia C_r la circonferenza di centro nell'origine e raggio $r = |\mathbf{x}|$. Sia $\nu(\mathbf{x})$ il versore tangente a C_r nel punto $\mathbf{x}$, (in verso antiorario), cioè

$$\nu(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^\perp/|\mathbf{x}|.$$

2. Per l'invarianza per rotazioni di ω, anche $\mathbf{u}$ deve essere invariante.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{u}$ su C_r. Mostrare che deve essere nullo. Concludere che $\mathbf{u}$ ha solo la componente tangente.
4. Scrivere $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nu(\mathbf{x})u(|\mathbf{x}|)$, dove, a meno del segno, $u(|\mathbf{x}|)$ coincide con il modulo del campo.
5. Determinare $u(|\mathbf{x}|)$ calcolando la circuitazione di $\mathbf{u}$ lungo C_r e confrontandola con il flusso di ω.

2.12 Circuitazione di un campo assegnato

Siano C_r e $\nu(\mathbf{x})$ definiti come nell'esercizio 2.11. Sia

$$\mathbf{u} = -\frac{\gamma}{2\pi}\frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2}$$

Calcolare esplicitamente la circuitazione di $\mathbf{u}$ su C_r.

2.13 Un vortice

Sia

$$\mathbf{u} = -\frac{\gamma}{2\pi}\frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2}$$

un vortice nell'origine. Calcolare esplicitamente $\nabla \cdot \mathbf{u}$ e $\nabla^\perp \cdot \mathbf{u}$ per $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, e mostrare che sono entrambi zero.
Sia $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Mostrare che

$$\int d\mathbf{x} \nabla^\perp \phi \cdot \mathbf{u} = \gamma\phi(\mathbf{0})$$

e che

$$\int d\mathbf{x} \nabla\phi \cdot \mathbf{u} = 0.$$

La seconda affermazione è facile da provare, e vuol dire che la "divergenza" di $\mathbf{u}$ è nulla nel senso delle distribuzioni; la prima è più difficile e vuol dire che il rotore di $\mathbf{u}$ è pari a $\gamma\delta(\mathbf{x})$ nel senso delle distribuzioni.

3 Stevino, Bernoulli, Archimede

3.1 * Esempio di legge di Stevino

Un bicchiere contenente dell'acqua ruota uniformemente intorno al suo asse. Ipotizzando che l'acqua sia solidale con il bicchiere, determinare le curve di livello della pressione e la forma del pelo libero.

3.2 * Legge di Stevino per un fluido comprimibile

Qual è l'analogo della legge di Stevino per un fluido comprimibile? È vero che la pressione equilibra l'energia potenziale?

3.3 Equilibrio per un fluido poco comprimibile

Determinare la pressione a 10 000 metri sotto il livello del mare.

Ad alte pressioni, anche l'acqua è comprimibile. Leggetevi la pagina di wikipedia sulla comprimibilità.

`http://it.wikipedia.org/wiki/Modulo_di_compressibilit%C3%A0`

Ipotizzando che il modulo di comprimibilità dell'acqua sia costante e pari a 2, 2GPa, determinare come varia la densità dell'acqua in funzione della profondità (supponendo che la temperatura sia costante).
Calcolare pressione e densità a 10 000 metri sotto il livello del mare.

3.4 Esempi di legge di Stevino per fluidi isoentropici

Si consideri un fluido isoentropico, con $P(\rho) = \rho^\gamma$ con $\gamma > 1$.

1. Qual è la distribuzione di equilibrio della densità se il fluido è fermo ed è sottoposto alla forza di gravità (assunta costante)?

2. Qual è la distribuzione di equilibrio della densità se il fluido è all'interno in un cilindro ruotante in assenza di gravità, ed è fermo rispetto alle pareti?

3. Si risolva per questo gas il problema dell'esercizio 3.1.

3.5 * Legge di Archimede per un fluido incomprimibile

Sia A una regione regolare. Provare che

$$\int_{\partial A} \mathbf{n}\,\sigma(d\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

(il versore $\mathbf{n}$ è la normale esterna nel punto $\mathbf{x}$).
Provare che

$$\int_{\partial A} f(\mathbf{x})\mathbf{n}\,\sigma(d\mathbf{x}) = \int_A \nabla f\,\mathrm{d}x$$

per qualunque funzione scalare regolare.
Per un fluido, la forza di superficie che si esercita su una regione A è

$$\int_{\mathrm{d}A} S\mathbf{n}\,\sigma(\mathrm{d}x)$$

Utilizzare questo fatto e la legge di Stevino per formulare e dimostrare il teorema di Archimede.

3.6 * Legge di Archimede per un fluido isoentropico

Dimostrare la validità della legge di Archimede per un fluido comprimibile in un campo gravitazionale. Attenzione a un punto concettuale: nella formulazione del teorema compare "la massa del corpo spostata", che nel caso incomprimibile è semplicemente il volume per la densità, nel caso comprimibile è la massa che avrebbe il fluido nel caso non ci fosse il solido.

3.7 Teoremi di Bernoulli e Kelvin per fluidi comprimibili

Discutere la validità dei teoremi di Bernoulli e del teorema di Kelvin per un fluido comprimibile.

4 Onde

4.1 * Onde nei gas comprimibili

Con un abuso di espressione, chiamerò fluido compressibile un fluido in cui $P = P(\rho)$ (cioè un fluido perfetto a temperatura costante, o un fluido isoentropico). Le equazioni per tale fluido sono

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$
$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla U$$

dove U è il potenziale per unità di massa delle forze di volume (o meglio 'forze di massa', come la gravità o le forze di inerzia nei sistemi di riferimento mobili).

Trova la velocità di propagazione di piccole perturbazioni intorno a stati costanti, in assenza di forze esterne (in pratica la velocità del suono).

Suggerimento: linearizza l'equazione intorno a ρ_0, $\mathbf{u}_0$ costanti, cerca un'onda piana che risolva il sistema linearizzato. Nota come la velocità del suono rispetto alla velocità del mezzo $\mathbf{u}_0$ non dipenda da $\mathbf{u}_0$, ma solo da ρ_0 e da $p'(\rho)$.

Nel caso di un gas isoentropico $p\rho^\gamma = p_0\rho_0^\gamma$, dove γ è il coefficiente di dilatazione adiabatica, ed è il rapporto tra il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante. L'oscillazione che corrisponde a un'onda sonora è veloce rispetto alla scala della dei fenomeni termici, dunque non c'è tempo per scambio di calore tra le zone di compressione e di decompressione del fluido e l'entropia specifica si conserva.

4.2 Energia elastica

Mostrare che se

$$S = 2\lambda \mathcal{E} + \mu \operatorname{tr} \mathcal{E}\, \mathbb{1}\,, \quad \text{dove } \mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j s_i + \partial_i s_j),$$

allora la densità di lagrangiana per il moto di vibrazione di un solido è

$$\frac{1}{2}\rho \dot{\mathbf{s}}^2 - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(S\mathcal{E})$$

(cioè provare che le equazioni di Eulero-Lagrange sono effettivamente le equazioni delle piccole vibrazioni di un solido).

4.3 Lemma di decomposizione

Sia $T = [0, 2\pi]^3$ il toro tridimensionale e sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei campi vettoriali L^2 su T. Usando l'isometria tra $L^2(T)$ e l^2 data dal calcolo dei coefficienti di Fourier, provare che

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{DF} \otimes \mathcal{V}_\nabla$, dove $\mathcal{V}_{DF}$ e $\mathcal{V}_\nabla$ sono due sottospazi chiusi, in cui sono densi, rispettivamente, i campi regolari a divergenza nulla e i campi gradiente.
Equivalentemente, la divergenza distribuzionale dei vettori in $\mathcal{V}_{DF}$ e il rotore distribuzionale dei campi in $\mathcal{V}_\nabla$ sono nulli.
In particolare, ogni campo regolare si decompone in modo unico in un campo gradiente e in un campo a divergenza nulla.

4.4 * Onde nei solidi

Sia $\mathbf{s}$ è il vettore spostamento $\mathbf{s} = \Phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$. Per piccoli spostamenti, nel caso di materiali isotropi, il tensore degli sforzi S in funzione del tensore di deformazione$\mathcal{E}$, è

$$S = 2\lambda\mathcal{E} + \mu \operatorname{tr}\mathcal{E}\, \mathbb{1}\,, \quad \text{dove } \mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j s_i + \partial_i s_j).$$

Per $\mathbf{s}$ piccoli, confondendo variabili euleriane con variabili lagrangiane, si ottiene l'equazione lineare

$$\rho\ddot{\mathbf{s}} = \lambda\triangle\mathbf{s} + (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{s}.$$

1. Notate che in $\mathbb{R}^3$, in trasformata di Fourier, formalmente, i campi a divergenza nulla sono ortogonali ai campi a rotore nullo (*vedi anche* l'esercizio 4.3).
2. Trova le onde piane $\mathbf{n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot c - \omega t}$ a rotore nullo, usando il fatto che in tal caso $\mathbf{s} = \nabla\phi$ (onde P, primarie, longitudinali). Determinane la velocità e la relazione tra $\mathbf{n}$ e $\mathbf{k}$.
3. Trova le onde piane $\mathbf{n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot c - \omega t}$ a divergenza nulla (onde S, secondarie, trasversali). Determinane la velocità e la relazione tra $\mathbf{n}$ e $\mathbf{k}$. Si tratta di onde che conservano i volumi.

Si noti che le onde sonore sono onde di compressione, dunque longiutudinali, e la loro velocità è $\sqrt{(2\lambda + \mu)/\rho}$.

4.5 * Onde d'acqua

Il moto potenziale di un fluido $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ nella regione $-h < z < S(x, y, t)$ è governato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \nabla q & \\ \triangle q = 0 & \text{per } -h < z < s(x,y,t) \\ \partial_z q = 0 & \text{per } z = -h \\ \partial_t S + u_x\,\partial_x S + u_y\,\partial_y S = u_z & \text{per } z = S(x,y,t) \\ \partial_t q + \frac{1}{2}|\nabla q|^2 + gS = T\nabla_{xy}\cdot\frac{\nabla_{xy}S}{\sqrt{1+|\nabla_{xy}S|^2}} & \text{per } z = S(x,y,t) \end{cases}$$

dove h è la profondità, $z = S(x, y, t)$ descrive la superficie della regione occupata dal fluido, g è l'accelerazione di gravità, T la tensione superficiale.

Linearizza queste equazioni intorno a $S \equiv 0$, $q \equiv 0$, e riduci il sistema alle equazioni per la sola q nella regione $h < z < 0$.

Cerca una solzione indipendente da y, nella forma $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} f(z)$. Determina la relazione di dispersione.

Analizza velocità di fase e velocità di gruppo nei diversi regimi che puoi individuare dalla relazione di dispersione.

5 Dalla vorticità alla velocità

5.1 Da ω a $\mathbf{u}$ in domini non semplicemente connessi

Sia D un dominio non semplicemente connesso, con frontiera $\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, curve regolari, con Γ_1 interna.
Siano $\mathbf{w}$ un campo a divergenza nulla, con vorticità nulla, con circuitazione nulla su Γ_1 e tangente a ∂D.
Provare che $\mathbf{w}$ è nullo, secondo le seguenti linee:
1. poiché $\mathbf{w}$ ha rotore nullo, è localmente un gradiente
2. provare che per qualunque curva chiusa $\mathcal{C}$ che non abbraccia Γ_1 vale $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{w} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$
3. provare che per qualunque curva chiusa $\mathcal{C}$ che abbraccia una sola volta Γ_1, vale $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{w} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$
4. provare che per qualunque curva chiusa $\mathcal{C}$ vale $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{w} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$
5. dedurne che $\mathbf{w}$ è un gradiente di una funzione definita su D
6. mostrare che questo gradiente è nullo provando che la funzione risolve un opportuno problema di Laplace che ha solo soluzioni costanti.

5.2 Caso di più buchi

Sia $\mathbf{u}$ un campo a divergenza nulla e tangente al bordo di un dominio limitato con frontiera $\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \dots \Gamma_k$, con Γ_i curva regolare, e Γ_0 curva che contiene tutte le altre.
Mostrare come si ottiene $\mathbf{u}$ a partire da ω e dai valori assegnati di $\gamma_i = \oint_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$, per $i = 1, \dots k$ (NB, non $i = 0$).

5.3 Relazione tra le circuitazioni

Sia $\mathbf{u}$ un campo a divergenza nulla e tangente al bordo di un dominio limitato con frontiera $\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \dots \Gamma_k$, con Γ_i curva regolare, e Γ_0 curva che contiene tutte le altre.
Sia $\gamma_i = \oint_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$. Che relazione c'è tra $\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_k$?

5.4 Funzione di corrente per domini non semplicemente connessi

Sia $\mathbf{u}$ un campo a divergenza nulla e tangente al bordo di un dominio limitato con frontiera $\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \dots \Gamma_k$, con Γ_i curva regolare, e Γ_0 curva che contiene tutte le altre.
1. Mostrare che esiste la funzione di corrente Ψ tale che $\mathbf{u} = \nabla^{\perp}\Psi$.
2. Se $\omega = 0$, e le circuitazioni sono nulle, che equazione ellittica e che condizioni al contorno sono soddisfatte da Ψ?
3. Puoi affermare che nel caso 2 la funzione Ψ è costante?
4. Nel caso generale, con ω non necessariamente nulla, e con le circuitazioni non necessariamente nulle, quali condizioni al contorno vanno imposte per Ψ?

5. Come si generalizza la risposta al punto 4 nel caso di più buchi?

5.5 Campi invarianti per traslazioni

Sia $\omega = \omega(x_2)$ una distribuzione di vorticità in $\mathbb{R}^2$ limitata e a supporto compatto in x_2, cioè $\omega(x_2) = 0$ se $|x_2| \geq M$. Determinare tutti i possibili campi di velocità $\mathbf{u}$ di vorticità ω.

Sia $D = \{(x_1, x_2)|\, x_2 \geq 0\}$ e $\omega = \omega(x_2)$ a supporto compatto. Mostrare che esiste un unico campo $\mathbf{u}$ di vorticità ω , con $\lim_{x_2 \to +\infty} |\mathbf{u}| = 0$.

5.6 Campi potenziali nel piano

Sia $\mathbf{u}$ un campo a divergenza nulla nel piano, con $\omega = 0$.
Mostrare che se $\mathbf{u}$ è limitato, allora $\mathbf{u}$ è un campo costante.
Mostrare che se $|\mathbf{u}| \leq c_1 + c_2|\mathbf{x}|^\beta$, per qualche $\beta > 0$, allora $\mathbf{u}$ è costante.

Siano $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ due campi di pari vorticità ω. Mostrare che se sono limitiati, allora sono uguali a meno di un campo costante.

5.7 * Limitatezza del campo

Sia $\omega \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap L_\infty(\mathbb{R}^2)$.
Provare che

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x})| \leq c\sqrt{\|\omega\|_1 \|\omega\|_\infty}$$

In particolare $c = 1/\sqrt{4\pi}$.
Provare che se ω è a supporto compatto,

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x})| \leq c/(1 + |\mathbf{x}|)$$

Provare che se $\int |\mathbf{x}|^\alpha |\omega(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leq c$ per qualche $\alpha > 0$, allora

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x})| \leq c/(1 + |\mathbf{x}|^\beta)$$

per opportuni β.
Provare in generale che

$$\lim_{|\mathbf{x}| \to +\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$$

5.8 Limitatezza del campo II

Data $f(\mathbf{x}) \geq 0$ si chiama riarrangiato simmetrico la funzione radiale simmetrica monotona decrescente $f^*(|\mathbf{x}|)$ tale che

$$\int \mathcal{X}\{f(\mathbf{x}) \leq a\} = \int \mathcal{X}\{f^*(|\mathbf{x}|) \leq a\}$$

cioè le aree dei sottografici di f e di f^* sono uguali. Imponendo la simmetria radiale e la monotonia si ottiene

$$f^*(r) = a \quad \text{se} \quad \pi r^2 = \int \mathcal{X}\{f(\mathbf{x}) \leq a\}$$

(qualche cura andrebbe riservata alla differenza tra $<$ e $\leq$ nella definizione... controllare che va bene mostrando che $g(a) = \int \mathcal{X}\{f(\mathbf{x}) \leq a\}$ è una funzione monotona crescente continua a sinistra, che $\sqrt{g(a)/\pi}$ ha la stessa proprietà, e che f^* è l'inversa di questa funzione).
Sia $\omega \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap L_\infty(\mathbb{R}^2)$ una distribuzione positiva della vorticità. Provare che

$$\int_{|\mathbf{y}|<R} \omega(\mathbf{y})/|\mathbf{y}| \, \mathrm{d}\mathbf{y} \leq \int_{|\mathbf{y}|<R} \omega^*(\mathbf{y})/|\mathbf{y}| \, \mathrm{d}\mathbf{y}$$

dove ω^* è il riarrangiato simmetrico di ω intorno a $\mathbf{0}$.
Suggerimento, considerare prima una vorticità che assuma solo un numero finito di valori.

5.9 Regolarità del campo

Sia ω radialmente simmetrica e sia il $L_1 \cap L_\infty$. Provare che $\mathbf{u} = \mathbf{K} * \omega$ è lipschitziano.

5.10 * Regolarità hölderiana del flusso

Risolvere esplicitamente l'edo

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= L\phi(r) \\ r(0) &= r_0 \end{aligned}$$

con $0 < r_0 < 1$.
Usare il Lemma di confronto per dimostrare che

$$|\Phi^t(\mathbf{x}) - \Phi^t(\mathbf{y})| \leq \mathrm{e}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\mathrm{e}^{1-Lt}}$$

se $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 1$, e quinti Φ è hölderiana.

5.11 * Lemmi preliminari per dimostrare l'esistenza del flusso

Provare i seguenti lemmi preliminari
Lemma 1
Sia Φ un omeomorfismo limitato che conserva la misura, cioè

- Φ è continuo e ha inverso continuo
- $|\Phi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| \leq M$ (e dunque la stessa proprità vale per l'inverso)
- Per ogni misurabile A, vale $|\Phi(A)| = |A|$

(l'ultima proprietà è equivalente al fatto che per ogni $f \in \mathbf{C}_0^0$ $\int f(\Phi(x)) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}$).
Sia $\omega \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty$. Vale

$$\int \mathbf{K}(\mathbf{x} - \Phi(\mathbf{y}))\omega(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y} = \int \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\omega(\Phi^{-1}\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y}$$

cioè si può cambiare variabile di integrazione anche se lo jacobino di Φ non è definito, e l'integrando ha una singolarità.

Per dimostrarlo, è sufficiente dimostrare in generale che se $f \in L^1$, allora

$$\int f(\Phi) = \int f$$

infatti $\mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\omega(\Phi^{-1}\mathbf{y}) \in L^1(\mathrm{d}\mathbf{y})$.
Sia $f \geq 0$ e sommabile. Ricordo che vale

$$\int f(\Phi(\mathbf{x})) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}h \, |\{\mathbf{x} : \, f(\Phi(\mathbf{x})) < h\}|$$

Vale

$$\begin{aligned} |\{\mathbf{x} : \, f(\Phi(\mathbf{x})) < h\}| &= |\Phi\{\mathbf{x} : \, f(\Phi(\mathbf{x})) < h\}| \\ &= |\{\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}) : \, f(\Phi(\mathbf{x})) < h\}| = |\{\mathbf{y} : \, f(\mathbf{y}) < h\}| \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che Φ conserva la misura. Quindi

$$\int f(\Phi(\mathbf{x})) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}h \, |\{\mathbf{y} : \, f(\mathbf{y})) < h\}| = \int f(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y}$$

L'uguaglianza analoga vale per le f sommabili e negative. Data $f \in L^1$, dividendo nella parte positiva e nella parte negativa, si ottiene quindi la tesi.

Lemma 2.
Siano Φ e Ψ due omeomorfismi limitati. Allora

$$\int |\mathbf{K}(\mathbf{x} - \Phi(\mathbf{z})) - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \Psi(\mathbf{z}))| \, |\omega(\mathbf{z})| \, \mathrm{d}\mathbf{z} \leq c\phi \left(\|\Phi - \Psi\|_\infty \right)$$

Questo lemma di dimostra come la quasi-lipschitzianità del campo, usando $r = \sup_{\mathbf{z}} \|\Phi(\mathbf{z}) - \Psi(\mathbf{z})\|$ e dividendo l'integrale in tre parti:

$$|\mathbf{x} - \Phi(\mathbf{z})| < 2r, \quad 2r \leq |\mathbf{x} - \Phi(\mathbf{z})| \leq 2, \quad |\mathbf{x} - \Phi(\mathbf{z})| > 2$$

I dettagli sono lasciati al lettore.

Lemma 3.
Sia $\Psi_t(\mathbf{x})$ un omeomorfismo continuo che conserva la misura. Sia $\omega_0(\mathbf{x})$ in $L^1 \cap L^\infty$.
Il campo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ generato da $\omega(\Psi_t^{-1}(\mathbf{x}))$ è continuo il t, e il flusso generato $\Phi_t(\mathbf{x})$ (che esiste per la quasi-lipschitzianità del campo), conserva la misura.

Per la dimostrazione, si regolarizzi la funzione di Green con G_ε, in modo che G_ε in $|\mathbf{x}| < \varepsilon$ sia una funzione limitata e regolare e fuori coincida con G. Inoltre il relatvo nucleo K_ε coincide con K per $|\mathbf{x}| \geq \varepsilon$, ed è limitato da $c/|\varepsilon| < c|\mathbf{x}|$ per $|\mathbf{x}| < \varepsilon$.
Sia $\mathbf{u}_\varepsilon = K_\varepsilon * \omega(\Psi^{-1})$. Si verifichi che $\mathbf{u}_\varepsilon$ è regolare e ha divergenza nulla. Dunque il corrispondente flusso Φ_t^ε conserva la misura. Si provi che $\Phi_t^\varepsilon \to \Phi_t$ uniformemente (basta mostrare che l'integrale di $|K_\varepsilon - K|$ è stimato da cost. ε). Si provi, per convergenza dominata, che anche Φ_t conserva la misura.

5.12 * Regolarità hölderiana del campo

Se $\omega \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty$ è anche $\mathbf{C}^\alpha$, allora $\mathbf{u}$ è $\mathbf{C}^{1+\alpha'}$, e dunque le uguaglianze $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\nabla^\perp \cdot \mathbf{u} = \omega$ valgono in senso forte.
Questo risultato di regolarità si può formulare in termini di teoria del potenziale, asserendo che se $\omega \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty$ è $\mathbf{C}^\alpha$ allora

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{y})\omega(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

è $\mathbf{C}^{2+\alpha'}$.
Per dimostrare questo risultato, calcolo le derivate seconde distribuzionali di Ψ, mostrando che sono funzioni di classe $\mathbf{C}^{\alpha'}$. Per definizione, sia φ una funzione test, $\partial_{ij}\Psi$ nel senso delle distribuzioni è definito da

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int \partial_{ij}\Psi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int \partial_i\Psi(\mathbf{x})\,\partial_j\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&\textstyle= \int \partial_i G(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,\partial_j\varphi(\mathbf{x})\omega(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\\
&\textstyle= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \mathrm{d}\mathbf{y}\omega(\mathbf{y})\int_{|\mathbf{z}|>\varepsilon}\partial_i G(\mathbf{z})\,\partial_j\varphi(\mathbf{z}+\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{z}
\end{aligned}$$

dove ho usato che Ψ è di classe $\mathbf{C}^1$. Completare la prova spostando la derivata ∂_j su G.

6 Questioni di stabilità

6.1 Patch nel semicilindro

Sia $D = [0, 2\pi] \times [0, +\infty)$, con condizioni periodiche nella prima variabile.
Mostrare che

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x_1 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x_2\, x_2\omega(x_1, x_2)$$

è una costante del moto. Utilizzare questo fatto per provare che
Provare che $\bar{\omega}(\mathbf{x}) = \mathcal{X}\{x_2 < a\}$ è una soluzione di equilibrio stabile.

6.2 Quantità conservate

Sia $\omega_0 \in L_1 \cap L_\infty$. Si assuma per semplicità che ω_0 abbia supporto compatto.
Provare che ω_t ha supporto compatto e che

$$\int \mathbf{x}\omega(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \int |\mathbf{x}|^2\omega(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

sono quantità conservate dal flusso.

Estendere la prova al caso in cui ω non ha necessariamente supporto compatto, ma le tre quantità sono finite al tempo 0.

6.3 Quantità conservate II

Sia $\omega_0 \in L_1 \cap L_\infty$ e siano

$$\int \mathbf{x}\omega(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \int |\mathbf{x}|^2\omega(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

quantità finite. Determinare che relazioni hanno queste quantità con i due seguenti limiti:

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{|\mathbf{x}|<r} \mathbf{u}(\mathbf{x},t), \quad \lim_{r\to+\infty}\int_{|\mathbf{x}|<r} \mathbf{x}^\perp \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x},t),$$

Mostrare nel contempo che questi due limiti sono finiti. Osservare che il primo limite è la quantità di moto complessiva, e che il secondo limite è il momento della quantità di moto.

6.4 Stabilità dei flussi nel canale periodico

Sia $D = [0, 2\pi] \times [0, L]$, periodico nella prima variabile. Sia $\mathbf{u}$ una soluzione stazionaria. Provare che è stabile se e solo se lo è $\mathbf{u} + \binom{c}{0}$, dove c è una costante.
Sia $\omega = \omega(y)$ strettamente monotona, in modo che sia possibile determinare $y = y(\omega)$. Mostrare che esiste F_0 tale che $\psi_0 = F_0(\omega)$, dove ψ_0 è la funzione di corrente che genera $\mathbf{u}$ a flusso nullo. Mostrare che $\mathbf{u} + \binom{0}{c}$ è generato da $F_0(\omega) - cy(\omega)$. Mostrare che è possibile scegliere c in modo che siano soddisfatte le ipotesi del I teorema di Arnold, e concludere la stabilità del flusso.

6.5 Stabilità dei flussi con simmetria radiale

Sia $D = \{|\mathbf{x}| < R\}$, e sia $\bar{\omega}$ radiale. Discutere la stabilità del corrispondente flusso utilizzado come funzionale di Lyapunov

$$H(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int \mathbf{u}^2 + \int \phi(\omega) + \lambda \int \mathbf{x}^2\omega$$

Discutere le possibili estensioni al caso $D = \mathbb{R}^2$.

6.6 Disuguaglianza di Poincaré

Sia D un dominio limitato regolare con frontiera regolare $\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \ldots \Gamma_n$, con Γ_i curve chiuse, e con Γ_0 che contiene le altre. Sia Ψ una funzione regolare su D, nulla su ∂D. Vale la disuguaglianza di Poincaré

$$\|\Psi\|_2^2 \le \alpha \|\nabla\Psi\|_2^2$$

con α costante che dipende dal dominio. Questa disiguaglianza è vera per tutte le funzioni Ψ in H_0^1, che è lo spazio che si ottiene chiudendo le funzioni C^∞ a supporto compatto in D, nella norma $\sqrt{\|\Psi\|_2^2 + \|\nabla\Psi\|_2^2}$.
Siano Ψ_n e λ_n le autofunzioni e gli autovalori del problema

$$\triangle\Psi = -\lambda\Psi$$

con condizioni nulle ai bordi. Si verifica che, essendo D limitato, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$.
Discutere la relazione tra α e i valori λ_n

La disuguaglianza può essere estesa alle derivate successive, nel senso che vale

$$\|\nabla\Psi\|_2^2 \leq \alpha\|\triangle\Psi\|_2^2$$

Il primo passo per ottenere questa disuguagliaza è considerare il problema di Poisson

$$\triangle\Psi = \omega$$

con Ψ nulla al bordo. Moltiplicando per Ψ e integrando si ottiene

$$\int_D \Psi\triangle\Psi = \int_D \Psi\omega$$

Mostrare come da questa uguaglianza (integrando per parti, utilizzando Cauchy-Schwartz, e la disuguaglianza di Poincaré) si ottiene la tesi.

Osservazioni

1. Se $\mathbf{u}$ è un campo di velocità di vorticità ω e di funzione di corrente Ψ, posso affermare la tesi dimostrata sopra solo per domini semplicemente connessi. In tal caso, infatti, posso assumere che Ψ sia nulla al bordo, e posso dimostrare il II teorema di Arnold.

2. Se D ha più bordi (cioè non è semplicemente connesso), questa assunzione è falsa. Dunque posso utilizzare il II teorema di Arnold solo per provare la stabilità rispetto a perturbazioni che conservano le circuitazioni.

3. Posso però ottenere comunque la stabilità nello stesso modo. Sia $\mathbf{u}$ un campo vicino a $\bar{\mathbf{u}}$ (equilibrio), anche se con differenti circuitazioni. Sia $\tilde{\mathbf{w}}$ il campo di velocità che ha la stessa vorticità della soluzione di equilibrio, ma che ha le circuitazioni di $\mathbf{u}$. Usando il II teorema di Arnold si prova che $\mathbf{u}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ sono vicini in norma H^1 (equivalente alla norma L^2 per la differenza di vorticità). Provare a mostrare che in norma L^2 $\bar{\mathbf{u}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ sono vicini se le ciruitazioni differiscono di poco (questo credo sia proprio difficile da fare, passa attraverso una comprensione chiara delle condizioni al contorno per la funzione di corrente in un dominio non semplicemente connesso).

4. Le complicazioni del punto 3. non si applicano a un caso del toro, in cui non c'è bordo, ma posso assumere che Ψ ha media nulla (è definita a meno di una costante), e dunque la disuguaglianza di Poincaré è valida.

6.7 Stabilità dei flussi sul toro $[0, 2\pi] \times [0, L]$ parte I

Questo sta sul libro.
Si noti che la funzione di corrente esiste se e solo se $\mathbf{u}$ è a media nulla. Sia $\nu = 2\pi/L$. Utilizzando l'espansione in serie di Fourier, mostrare che il minimo α per cui è vera la disuguaglianza di Poincaré è 1 se $L \leq 2\pi$ ($\nu \leq 1$), $1/nu^2$ se $L > 2\pi$ ($\nu > 1$).
Mostrate che questo fatto impedisce di usare il II teorema di Arnold per provare la stabiità di soluzioni del tipo

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} A\cos(\nu y + b) \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.8 Stabilità dei flussi sul toro $[0, 2\pi] \times [0, L]$ parte II

Verificare, mi sembra che va al contrario.

Sia $\nu = 2\pi/L$. Si supponga $\nu > 1$ (cioè L piccolo). Sia W il sottospazio delle funzioni $\mathbf{u}$ con la prima componente nulla e la seconda del tipo $A\cos(x+b)$. Si indichi con Ω in corrispondente sottospazio per la vorticità (cioè il sottospazio generato da $e^{\pm ix}$). Si noti che ogni elemento di W è una soluzione di equilibrio, e che dunque W è un sottospazio invariante per la dinamica. Si sia una definizione di stabilità per W.
Si consideri l'integrale primo

$$H = \frac{1}{2}\int \omega^2 - \frac{a}{2}\int |\mathbf{u}|^2.$$

Scriverlo in termini dei coefficienti di Fourier, e riconoscere che

1. Se $a < 0$ H è definita positiva, dunque si può solo concludere l'ovvia stabilità del campo nullo.

2. La stessa conclusione vale per $a < 1$ (si ricordi che $\mathbf{u}$ è a media nulla).

3. Se $a > 1$, H non è definita in segno.

4. Se $a = 1$, H è semidefinita positiva, provare che

$$c_1\|\omega - P\omega\|_2^2 \leq H \leq c_2\|\omega - P\omega\|_2^2$$

   dove $P\omega$ è la proiezione di ω nel sotto spazio Ω. Dunque W è un sottospazio invariante stabile.

Se $\nu = 1$, si consideri il sottospazio $\Omega = \{A_1\cos(x+b_1) + A_2\cos(t+b_2)\}$ (cioè quello generato da $e^{\pm ix}$ e $e^{\pm iy}$). Si mostri che tutte le vorticità in ω sono soluzioni stazionarie. Si provi che Ω è un sottospazio stabile.

7 Altri esercizi

7.1 * Principi variazionali con vincoli

Si consideri il moto di un punto materiale di massa 1 in $\mathbb{R}^n$, soggetto ad una forza di energia potenziale V e soggetto a muoversi in accordo ad un vincolo ideale $F(\mathbf{x}, t) = c$, dove F è una funzione regolare e la superificie (eventualmente mobile) $\{\mathbf{x}|\, F(\mathbf{x}, t) = c\}$ è una superficie regolare.
La proprietà di vincolo ideale coincide con il fatto che le equazioni del moto si ottengono tramite principi variazionali.
Sia

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x}(t)|\, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T \ \text{ e } \ F(\mathbf{x}(t), t) = 0\}$$

lo spazio dei moti che soddisfano il vincolo.
Si scrivano le equazioni del moto in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ utilizzando i due metodi variazionali seguenti.

1. Determinare la variazione prima dell'azione lagrangiana rispetto ad un moto variato che soddisfi il vincolo e provare che le equazioni del moto sono

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\nabla V(x) + \mathbf{R}$$

dove $\mathbf{R}\cdot\nabla F = 0$. $\mathbf{R}$ è la reazione vincolare, e le equazioni del moto vanno risolte aggiungendo l'equazione del vincolo.

2. Considerare ammissibili anche moti variati che non soddisfano il vincolo, ma aggiungere all'azione lagrangiana un moltiplicatore di lagrange:

$$\int_0^T \mathrm{d}t\lambda(t)\,(F(\mathbf{x},t)-c)$$

La variazione rispetto all'incognita λ dà l'equazione del vincolo.
Mostrare che il principio variazionale dà la stessa equazione del punto precedente, ma con l'espressione esplicita $\mathbf{R} = \lambda\nabla F$. Come in tutti i casi di moltiplicatori di lagrange, il valore di λ va determinato risolvendo l'equazione con la condizione di vincolo.

3. Sia $\mathbf{q}$ un sistema di coordinate locali compatibili con il vincolo: $F(\mathbf{x}(\mathbf{q},t),t) = c$. Usando il principio variazionale del punto 1, mostrare che il moto è descritto dalle equazioni di Eulero-Lagrange che si ottengono scrivendo la lagrangiana in funzione di $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$.

7.2 Principi variazionali: moltiplicatori di lagrange

Sia

$$\mathcal{M} = \{\Phi^t(\mathbf{x})|\,\Phi^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x},\ \Phi^0(\mathbf{x}) = \bar{\Phi}(\mathbf{x}),\quad \text{e}\quad \Phi^t(\mathbf{x})\ \ \text{conserva la misura}\}$$

Determinare le equazioni del moto aggiungendo alla lagrangiana il moltiplicatore di Lagrange del vincolo di incomprimibilità:

$$\int_0^T \mathrm{d}t \int_D \lambda(\mathbf{x},t)\,(J(\mathbf{x},t)-1)\,,$$

dove $J(\mathbf{x},t)$ è il determinate dello jacobiano del flusso. Considerare variazioni generiche del moto (non necessariamente incomprimibili).

7.3 Principi variazionali: caso comprimibile

Consideriamo un gas comprimibile, con $P = P(\rho)$. L'equazione di continuità è

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0$$

l'equazione del moto è

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\times\mathbf{u}) = -\rho\nabla V - \nabla P,$$

dove $V = V(\mathbf{x},t)$ è l'energia potenziale di una forza esterna.

Si noti che poiché P dipende da ρ,

$$\frac{1}{\rho}\nabla P(\rho) = \frac{P'(\rho)}{\rho}\nabla\rho = W'(\rho)\nabla\rho = \nabla W(\rho)$$

La funzione $W(\rho)$ si chiama *potenziale di pressione* e si determina da P integrando

$$W'(\rho) = P'(\rho)/\rho$$

Mostrare che per l'equazione del moto vale un principio variazionale. La parte difficile da indovinare è quella della pressione. Provare a considerare un termine del tipo $\int_D \rho_0(\mathbf{x})V(\mathbf{x})$ per la forza esterna, e un termine del tipo $\int_D G(\rho(\mathbf{x}))$ per il termine di pressione. La funzione G avrà una particolare relazione con la funzione P, ma non mi sembra che coincida con il potenziale di pressione.

7.4 Principi variazionali: caso con bordo libero

Supponi che un fluido sia contenuto in un domino Ω, senza che lo occupi completamente. Per semplicità ipotizza che il dato iniziale e finale occupino A_0 e A_T, e che questi due domini abbiamo parte della frontiera in comune con quella di Ω.
Formula il principio variazionale, e determina le equazione del moto e le condizioni al bordo "libero" (cioè la parte di frontiera della regione occupata del fluido che non è dento $\partial\Omega$.

7.5 * Instabilità di Kelivin-Helmoltz

L'equazione di Birkhhoff-Rott

$$\partial_t \bar{z}(\gamma, t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\!\!\!\!\!\!-_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\gamma' \frac{1}{z(\gamma, t) - z(\gamma', t)}$$

descrive il moto di una linea singolare di vorticità, dove la curva è data da $(x(\gamma), y(\gamma))$ al variare di γ e con $z = x + \mathrm{i}y$. Il parametro γ ̀èproprio la vorticità la curva, nel senso che nel tratto di curva tra $z(\gamma_1)$ e $z(\gamma_2)$ è contenuta la voriticità $\gamma_2 - \gamma_1$.

Verificare che $z(\gamma) = \gamma$ è una soluzione stazionaria.

Linearizzare l'equazione intorno a $z(\gamma) = \gamma$.

Risolvere l'equazione linearizzata in trasformata di Fourier, notando l'esistenza di moti che divergono esponenzialmente in kt.

Dedurne che l'equazione linearizzata non è risolubile in spazi di funzioni che non siano almeno analitiche.

7.6 * Flusso piano intorno a un ostacolo I

Sia Ω un aperto limitato semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$ che contiene l'origine. Il problema

$$\begin{cases} \triangle\psi = 0 & \text{in } \Omega^c \\ \psi = 0 & \text{in } \partial\Omega \\ \nabla\psi \to 0 & \text{per } |\mathbf{x}| \to +\infty \end{cases}$$

ha infinite soluzioni. Per convincersene si pensi al caso in cui $\Omega = B_R(0)$, e $\mathbf{u}$ è il campo generato da un vortice in 0. L'unicità di ottiene se si impone che la circuitazione del campo sia 0 intorno a $\partial\Omega$.

Mostra che l'unico campo irrotazionale $\mathbf{u}$, in Ω^c, tangente a $\partial\Omega$, che tende asintoticamente a $\mathbf{u}_\infty$, e con circolazione Γ intorno all'ostacolo, si ottiene come

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_\Gamma + \tilde{\mathbf{u}}$$

dove $\mathbf{u}_\Gamma = \Gamma\nabla^\perp G(\mathbf{x})$, e $\tilde{\mathbf{u}} = \nabla q$, con $\triangle q = 0$, $\nabla q \to 0$ all'infinito e con opportune condizione di Nuemann sul bordo $\partial\Omega$.
Cerca la soluzione q come potenziale di singolo strato generato da una distribuzione μ su $\partial\Omega$. Mostra che

$$\int_{\partial Omega} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_\Gamma = 0$$

Usando la teoria dei potenziali di singolo strato, mostra che anche $\int_{\partial Omega} \mu = 0$. Deduci che q ha un andamento asintotico di dipolo, dunque va a zero come $1/|\mathbf{x}|$ e quindi $\tilde{\mathbf{u}}$ va a zero come $1/|\mathbf{x}|^2$.

7.7 * Flusso piano intorno a un ostacolo II - teorema di Kutta-Youkowski

Sia Ω un aperto limitato semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$ che contiene l'origine, e sia B_R la palla di centro $\mathbf{0}$ e raggio R. Sia $\mathbf{u}$ una soluzione stazionaria dell'equazione di Eulero in Ω^c, di valore asintotico $\mathbf{u}_\infty$ e di cicolazione Γ. Prova le seguenti affermazioni.

- Poichè $\mathbf{u}$ è stazionaria, $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla P = 0$. Integrando questa espressione in $B_R \backslash \Omega$, prova che
$$\int_{\partial\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u} + p\mathbf{n}) = \int_{\partial B_R} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u} + p\mathbf{n}).$$
- Osserva che $\mathbf{u}$ è tangente al bordo, dunque
$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u} = 0.$$
- Usando la decomposizione di $\mathbf{u}$ dell'esercizio precedente, prova che la forza $\mathbf{F}$ che il fluido esercita sull'ostacolo è
$$\mathbf{F} = -\int_{\partial\Omega} p\mathbf{n} = \Gamma\mathbf{u}_\infty^\perp$$

L'ultima asserzione è il contenuto del teorema di Kutta-Youkovski che asserisce che il fluido non esercita forze di trascinamento ("drag"), cioè forza nella direzione di $\mathbf{u}_\infty$, ma solo portanza ("lift"), cioè forza nella direzione ortogonale al campo asintotico.
Questo teorema sembra provare che un aereo può volare, ma non è così, perché un areo è tridimensionale (vedi anche l'esercizio successivo).

7.8 * Flusso intorno a un ostacolo III - paradosso di D'Alembert

In $\mathbb{R}^3$ un fluido stazionario irrotazionale (e dunque non viscoso) non esercita forze sugli ostacoli. Per dimostrare questa asserzione (paradosso di D'Alembert) prova le seguenti affermazioni, relative a un campo potenziale $\mathbf{u}$ di valore asintotico $\mathbf{u}_\infty$, nel dominio esterno Ω^c, con Ω dominio di $\mathbb{R}^3$.

- Mostra che $\mathbf{u}$ si decompone in $\mathbf{u}_\infty$ e ∇q, dove q risolve il problema di Lapalce in Ω^c, con opportune condizioni di Neumann al bordo, che indico con $\partial_n q^+$.

- In accordo con la teoria del potenziale, l'equazione per q è risolta da un potenziale di singolo strato su $\partial\Omega$, di densità di carica μ; il potenziale generato da μ risolve il problema di Laplace in Ω, con condizioni di Neumann $\partial_n q^- = \partial_n q^+ - \mu$. Usando questo fatto e l'espressione esplicita di $\partial_n q^+$, provare che $\int_{\partial\Omega} \mu(\mathbf{x})\sigma(\mathrm{d}\mathbf{x}) = 0$.

- Mostrare che per $|\mathbf{x}| \to +\infty$ q è asintoticamente

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3}$$

dove $\mathbf{m}$ è in momento primo di μ, cioè il momento di dipolo della distribuzione μ

$$\mathbf{m} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{y}\mu(\mathbf{y})\sigma(\mathrm{d}\mathbf{y})$$

Deducine che $|\nabla\mathbf{q}| = O(|\mathbf{x}|^{-3})$ per $|\mathbf{x}| \to +\infty$

- Procedendo come nell'esercizio precedente, mostrare che

$$\mathbf{F} = -\int_{\partial\Omega} p\mathbf{n} = 0$$

7.9 Campi potenziali e funzioni olomorfe

Se $\mathbf{u}$ è un campo di vorticità nulla, allora localmente $\mathbf{u} = \nabla q$; se $\mathbf{u}$ è un campo a divergenza nulla, allora $\mathbf{u} = \nabla^\perp\psi$. Dunque un campo a divergenza nulla e a vorticità nulla soddisfa

$$\mathbf{u} = \nabla q = \nabla^\perp\psi,$$

quindi

$$\begin{cases} \partial_x q = -\,\partial_y\psi \\ \partial_y q = \partial_x\psi \end{cases}$$

Indicando $z = x + \mathrm{i}y$, prova che la funzione $f(z) = \psi(z) + \mathrm{i}q(z)$ è una funzione olomorfa.

Dunque i flussi piani incomprimibili e irrotazionali sono descrivibili sia attraverso il gradiente di una funzione armonica (q) sia attraverso il gradiente ortogonale di un'altra funzione armonica (ψ) e le due funzioni sono parte reale e parte immaginaria di una funzione olomorfa.

Ricordando che la funzione $\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\log|\mathbf{x}|$ genera il campo del vortice puntiforme nell'origine, e che esso fuori dall'origine è un campo irrotazionale, travare la funzione (multivoca) q tale che $\mathbf{u} = \nabla q$. Discutere la relazione tra ψ, q e il logaritmo di un numero complesso.

8 Fluidi nel toro tridimensionale

8.1 *Regolarità di $f \in H_m, m > 3/2$

Sul toro tridimensionale, se $f \in H_m$, con $m > 3/2$, si prova facilmente che

$$\|f\|_\infty \le c\|\hat{f}\|_1 \le c|f|_m$$

In questo esercizio guidato proverai che f è hölderiana: $f \in C^\alpha$, con $\alpha < m - 3/2$. Suggerimento:

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq c \sum_{\mathbf{k}} |\hat{f}_{\mathbf{k}}| \left| e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \right|$$

Ricordando che se $a, b \in \mathbb{R}$

$$|e^{ia} - e^{ib}| \leq |a - b|$$

spezzando la somma, ottieni

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq c|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \sum_{|\mathbf{k}|<L} |\hat{f}_{\mathbf{k}}| + c \sum_{|\mathbf{k}|\geq L} |\hat{f}_{\mathbf{k}}| \frac{|\mathbf{k}|^m}{|\mathbf{k}|^m}$$

La seconda somma si stima via Cauchy-Shwartz con

$$c|f|_m \left(\int_{|vex|>L} \frac{1}{|x|^{2m}} \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \leq c|f|_m \frac{1}{L^{m-3/2}}$$

Nella prima somma, poiché $|\mathbf{k}| < L$, $|\mathbf{k}| < L^{1-\alpha}|\mathbf{k}|^\alpha$, e, poiché $\alpha < 3/2 - m$,

$$\sum_{\mathbf{k}} |k|^\alpha |\hat{f}_{\mathbf{k}}| \leq c|f|_m$$

Dunque, complessivamente:

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq c|f|_m(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|L^{1-\alpha} + \frac{1}{L^{m-3/2}})$$

Scegliendo $L = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}$, si ottiene la tesi notando che $m - 3/2 > \alpha$.

Per discutere la regolarità delle soluzioni dell'equazione di Eulero nel toro tridimensionale, è anche necessario indagare la regolarità nel tempo. Proviamo che se $f(\mathbf{x}, t)$ è in H_m in x, con $|f(\cdot, t)|_m \leq c$ per ogni t, e se $f(\mathbf{x}, t)$ è debolmente continua in t rispetto a L^2, allora f è continua in t.
Ricordo che la continuità debole equivale alla continuità dei coefficienti di Fourier.
Per provare la continuità in t, stimo

$$\|f(\cdot, t) - f(\cdot, s)\|_\infty \leq c \sum_{k} |\hat{f}_{\mathbf{k}}(t) - \hat{f}_{\mathbf{k}}(s)|$$

Divido la somma in $|\mathbf{k}| \leq M$ e in $|\mathbf{k}| > M$. La seconda si stima con $c|f|_m/M^{2m-3}$, come già fatto sopra. La prima, essendo una somma finita, tende a 0 se $s \to t$. La continutà in t segue Scegliendo dunque M abbastanza grande e successivamente $|s - t|$ abbasta piccolo, rendendo così piccolo a piacere $|f(\cdot, t) - f(\cdot, s)|$.

Per esercizio, mettendo insieme i punti precedenti, si mostri che f è continua nel complesso delle variabili $\mathbf{x}, t$.

8.2 *Dissipazione dell'energia per Navier-Stokes

Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{u}$ una solizione regolare dell'equazione di Navier-Stokes in Ω, con condizioni nulle al bordo.
L'energia è

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{u},\mathbf{u})$$

Mostra che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = -\nu \sum_{ij} \int_{\Omega} \partial_i u_j \, \partial_i u_j = -\nu \int_{\Omega} \mathrm{tr}\ (\partial\mathbf{u}\, \partial\mathbf{u}^t)$$

Mostra che

$$\mathrm{tr}\ (\partial\mathbf{u}\, \partial\mathbf{u}^t) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \big((\partial\mathbf{u} - \partial\mathbf{u}^t)(\partial\mathbf{u}^t - \partial\mathbf{u})\big) + \mathrm{tr}\ (\partial\mathbf{u}\, \partial\mathbf{u})$$

Infine, ricordando la realazione tra $\boldsymbol{\omega}$ e $\partial\mathbf{u} - \partial\mathbf{u}^t$, prova che

$$\int_{\Omega} \mathrm{tr}\ (\partial\mathbf{u}\, \partial\mathbf{u}) = 0$$

e che

$$\mathrm{tr}\ \big((\partial\mathbf{u} - \partial\mathbf{u}^t)(\partial\mathbf{u}^t - \partial\mathbf{u})\big) = 2|\boldsymbol{\omega}|^2.$$

Concludi che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = -\nu \int_{\Omega} |\boldsymbol{\omega}|^2$$