INTERPRETAZIONE STOCASTICA DI NS IN DIMENSIONE 2

VARIABILE ALEATORIA $\underline{a} : \Omega \to \mathbb{R}^N$

C'è una misura P su Ω t.c. $P(\Omega) = 1$

a induce una misura in $\mathbb{R}^N$: $\mu_a(A) = P(a^{-1}(A)) = \mathbb{P}(a \in A)$

PROCESSO STOCASTICO: $\{a(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, $a(t)$ variabile aleatoria

SUPPONIAMO CHE SIA DEFINITA $t \geq s$

$\mathbb{P}(a(t) \in A \,|\, a(s) = x)$

In questo modo DEFINIAMO UNA MISURA DI PROBABILITÀ E INDICHIAMO CON

$p(dz, t \,|\, x, s)$

LA MISURA

$$\mathbb{P}(a(t) \in A \,|\, a(s) = x) = \int_A p(dz, t \,|\, x, s)$$

$p(dz, t \,|\, x, s)$ è detta densità di probabilità di transizione

Ci restringiamo ai PROCESSI MARKOVIANI: LO STATO AL TEMPO s "DETERMINA" LO STATO AL TEMPO $t \geq s$

$$p(dz, t \,|\, x, s; \bar{x}, r) = p(dz, t \,|\, x, s) \quad \text{se } s > r$$

N.B. Scriviamo meglio la markovianità: $t \geq r \geq s$

$$p(dz, t \,|\, x, s) = \int_{dy} p(dz, t \,|\, y, r)\, p(dy, r \,|\, x, s)$$

DEF

MOTO BROWNIANO $\underline{b}(t) \in \mathbb{R}^N$

(i) $\underline{b}(0) = 0$

(ii) $\underline{b}(t) - \underline{b}(s)$ è indip da s

è v.a. gaussiana di media 0 e varianza $\mathbb{1}(t-s)$

$$\mathbb{E}(\underline{b}(t) - \underline{b}(s)) = 0$$

$$\mathbb{E}((\underline{b}(t) - \underline{b}(s)) \otimes (\underline{b}(t) - \underline{b}(s))) = \mathbb{1}(t-s)$$

La probabilità di transiz è

$$p(x, t \,|\, y, s) = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{N/2}} e^{-\frac{1}{2(t-s)}|x-y|^2}$$

OSS

$\underline{b}(t)$ è hölderiana di esponente $\alpha < 1/2$ con prob 1

OSS

Il TRASPORTO DELLE MISURE può avvenire in 3 modi:

- DETERMINISTICO
- STOCASTICO

• DETERMINISTICO + STOCASTICO

Spieghiamo con ~~2~~ esempi

DETERMINISTICO

- $\omega_0(dz)$ misura iniziale
- campo iniz assegnato $\underline{u}(\underline{x},t)$
- caratteristiche di $\underline{u}(\underline{x},t)$ sono le sol di

$\dot{\underline{x}} = \underline{u}(\underline{x},t)$

cioè la fam a due parametri

$\phi_{t,s}(\underline{x})$

$$\begin{cases} \phi_{s,s}(\underline{x}) = \underline{x} \\ \dfrac{d}{dt}\phi_{t,s}(\underline{x}) = \underline{u}(\phi_{t,s}(\underline{x}),t) \end{cases}$$

(vale la proprietà: $\phi_{t,s}(\phi_{s,r}(\underline{x})) = \phi_{t,r}(\underline{x})$)

Vogliamo def ~~…~~ $\omega(dx,t)$ la mis al tempo t

DEF

f cont

$$\omega_t(f) = \int \omega(dx,t)\, f(x)$$

$$= \int \omega_0(dx)\, f(\phi_{t,0}(x))$$

OSS

Interpretazione:

$\omega(dx,t)$ è il fenomeno

$\int \omega(dx,t)\, f(x)$ è il valore dell'osservabile f ~~…~~ al tempo t

ES

$f \equiv 1$

$\int \omega(dx,t)$ MASSA TOT

Usando la def

$$\int \omega(dx,t) = \int \omega_0(dx) = \text{MASSA INIZ}$$

OSS

Che equazione soddisfa $\omega_t(f)$?

$f \in C^1$

$$\frac{d}{dt}\omega_t(f) = \frac{d}{dt}\int \omega_0(dx)\, f(\phi_{t,0}(x))$$

$$= \int \omega_0(dx)\, \frac{d}{dt} f(\phi_{t,0}(x)) = \int \omega_0(dx)\, \nabla f\Big|_{\phi_{t,0}(x)} \frac{d}{dt}\phi_{t,0}(\underline{x}) =$$

$$= \int \omega_0(dx)\, (\nabla f \cdot u)\Big|_{\phi_{t,0}(x),t} = \omega_t(u \cdot \nabla f)$$

per def di $\omega_t(f)$

Dunque

① $\frac{d}{dt}\omega_t(f) = \omega_t(u\cdot\nabla f)$ LEGGE DI CONS IN FORMA DEBOLE

② Se ω_0 ha densità regolare $\omega_0(dx) = \omega_0(x)\,dx$ con ω_0 FUNZ REGOLARE

allora $\omega(dx,t) = \omega(t,x)\,dx$

e vale

$$\partial_t \omega(x,t) + \mathrm{div}(\omega u)(\underline{x},t) = 0$$

LEGGE DI CONS

[Riscriviamo ①:

$$\frac{d}{dt}\int \omega(\underline{x},t)\, f(x) = \int \omega(x,t)\,(u\cdot\nabla) f =$$

$$= -\int \mathrm{div}(u\omega)\, f$$

N.B. u qualunque, anche $\mathrm{div}\,\underline{u} \neq 0$

$$\Rightarrow \int \partial_t \omega(x,t)\, f = -\int \mathrm{div}(\underline{u}\,\omega)\, f \quad \forall f$$

$$\Rightarrow \partial_t \omega + \mathrm{div}(u\omega) = 0 \text{]}$$

OSS

SIGNIFICATO:

ALLE LEGGI DI CONSERVAZ

$$\partial_t \omega + \mathrm{div}(\omega \underline{u}) = 0$$

CORRISPONDONO OSSERVABILI TRASPORTATI DAL FLUSSO PER IL CAMPO $\underline{u}$

$$\boxed{\int \omega(\underline{x},t)\, f(x) = \int \omega_0(\underline{x})\, f(\phi_{t,0}(x))\,dx}$$

N.B. Se $\mathrm{div}\, u = 0 \Rightarrow \partial_t \omega + u\cdot\nabla\omega = 0$

$$\Rightarrow \omega(\underline{x},t) = \omega_0(\phi_{-t}(\underline{x}))$$

RIASSUMIAMO

$\partial_t \omega + \mathrm{div}(\underline{u}\,\omega) = 0$ eq in forma di div

Def

$\omega_t(f) := \int \omega(dz, t)\, f(z)$ f cont

ω_t soddisfa

$\frac{d}{dt}\omega_t(f) = \omega_t(\underline{u}\cdot\nabla f)$ eq in forma deb

Possiamo scrivere ω_t nella forme alternativa

$\omega_t(f) = \int \omega_0(dz)\, f(\phi_{t,0}(z))$

dove

$\phi_{t,s}(\underline{z}) = \underline{z} + \int_t^s d\tau\; u(\phi_{\tau,s}(z), \tau)$

Vogliamo mimare questo procedim per i proc stocastici

CASO STOCASTICO

$\phi_{t,s}(\underline{z}) = \underline{z} + \underline{b}_t - \underline{b}_s$

In particolare

$\phi_{s,s}(\underline{z}) = \underline{z}$

Per ogni realizz del processo $\underline{b}_t$ vale

$\phi_{t,s}(\phi_{s,r}(\underline{z})) = \phi_{t,r}(\underline{z})$

[Ex Sostituire...]

Definiamo

$\omega_t(f) = \int \omega(dz, t)\, f(z) =$

$= \mathbb{E} \int \omega_0(dz)\, f(\phi_{t,0}(z))$

$= \int \omega_0(dz) \int dy\, f(y)\; p(y, t \mid z, 0)$

dove

$p(y, t \mid z, 0) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{|y-z|^2}{2t}}$

Dunque, sostituendolo

(*) $\omega_t(f) = \int \omega_0(dz) \int dy\; f(y)\; \frac{e^{-\frac{(y-z)^2}{2t}}}{(2\pi t)^{n/2}}$ nucleo del cal in $\mathbb{R}^n$

Che eq soddisfa ω_t?

EX

$\frac{d}{dt}\omega_t(f) = \frac{1}{2}\omega_t(\Delta f)$ eq del calore in forma deb

EX

Verificare che (*) definisce

$$\omega(x,t) = \int \omega_0(dz)\, \frac{e^{-\frac{|x-z|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{n/2}}$$

Verificare che $\omega(x,t) \in C^\infty$ $\forall t > 0$ e

$\partial_t \omega = \frac{1}{2}\Delta\omega$ eq del cal in forma forte

CARATTERISTICHE

$$\dot{\phi} = u(\phi) \qquad\qquad \dot{\phi} = z + b$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\partial_t \omega + \mathrm{div}(\underline{u}\,\omega) = 0 \qquad \partial_t \omega = \frac{1}{2}\Delta\omega$$

<u>NS</u> $\partial_t \omega + \mathrm{div}(\underline{u}\,\omega) = \nu\Delta\omega$

(non è nessuna delle due! cosa facciamo?)

Definiamo

$$\phi_{t,s}(z) = \underline{z} + \underbrace{\underline{b}_t - \underline{b}_s}_{\text{continua per ogni realizzazione}} + \int_s^t d\tau\; \underline{u}(\phi_{\tau,s}(z), s)$$

Ex

Se $\underline{u}$ è regolare e b_t è una funz cont allora

$\phi_{t,s}(\underline{z})$ esiste $\forall z, \forall t, \forall s$ ed è flusso

$$\begin{cases} \phi_{s,s}(z) = z \\ \phi_{t,s}(\phi_{s,r}(z)) = \phi_{t,r}(z) \end{cases}$$

Definiamo

$$\omega_t(f) = \mathbb{E}\int \omega_0(dz)\, f(\phi_{t,0}(z))$$

Vogliamo provare

$$\partial_t\, \omega_t(f) = \omega_t(\underline{u}\cdot\nabla f) + \frac{1}{2}\omega(\Delta f)$$

<u>N.B.</u> Per ottenere ν dobbiamo usare

$$\sqrt{2\nu}\,(\underline{b}_t - \underline{b}_s)$$

Valutiamo

$$\omega_{t+\delta}(f) - \omega_t(f)$$

<u>N.B.</u> $\forall\, s < t$

$$\omega_t(f) = \mathbb{E}\int \omega(dz, s)\, f(\phi_{t,s}(z))$$

(segue dalla proprietà di flusso per ϕ)

Quindi

$$\omega_{t+\delta}(f) - \omega_t(f) = \mathbb{E}\int \omega(dz,t)\, [f(\phi_{t+\delta,t}(z)) - f(z)]$$

Calcoliamo fino all'ordine δ

$$f(\phi_{t+\delta,t}(\underline{z})) - f(\underline{z}) = \nabla f(\underline{z})\cdot(\phi_{t+\delta,t}(\underline{z}) - \underline{z}) + \frac{1}{2}\partial^2 f(\underline{z})\,(\phi_{t+\delta,t}(\underline{z}) - \underline{z})\cdot(\phi_{t+\delta,t}(\underline{z}) - \underline{z}) + O(|\phi_{t+\delta,t}(\underline{z}) - \underline{z}|^3)$$

Riscriviamo

$$\phi_{t+\delta,t}(\underline{z}) - \underline{z} = \underline{b}_{t+\delta} - \underline{b}_t + \int_t^{t+\delta} d\tau \, u(\phi_{\tau,t}(\underline{z}), \tau)$$

Passiamo ai moduli e al valore atteso:

$$\mathbb{E}|\phi_{t+\delta,t}(\underline{z}) - \underline{z}| \leq \mathbb{E}|\underline{b}_{t+\delta} - \underline{b}_t| + \|u\|_\infty \delta$$

In generale (momento k-simo)

$$\mathbb{E}|b_{t+s} - \underline{b}_t|^k = \int dz \, \frac{|z|^k e^{-\frac{z^2}{2s}}}{(2\pi s)^{n/2}} = c_{k,n} \, s^{k/2}$$

Dunque

$$\mathbb{E}|\phi_{t+\delta,t}(\underline{z}) - \underline{z}| \leq c\sqrt{\delta} + c\delta$$

$$\leq c\sqrt{\delta} \quad (\delta \to 0)$$

Nell'espressione che abbiamo scritto prima c'erano

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f \cdot (\phi - z) \\ \partial^2 f (\phi - z) \cdot (\phi - z) \end{array}\right\} \to \mathbb{E} \text{ da calc}$$

$O(|\phi - z|^3) \to \mathbb{E} = O(\delta^{3/2})$ (lo possiamo trascurare)

Dobbiamo calc:

$$\mathbb{E}(\phi_{t+\delta,t}(\underline{z}) - \underline{z}) = \underbrace{\mathbb{E}(\underline{b}_{t+\delta} - \underline{b}_t)}_{= 0} + \int_t^{t+\delta} d\tau \, u(\phi_{t,\tau}(z), \tau) =$$

Taylor

$$= \mathbb{E}\Big[\int_t^{t+\delta} d\tau \, [\underbrace{\underline{u}(\underline{z},t)}_{=\underline{u}(\underline{z},t)\delta} + \underbrace{O(|t-\tau|)}_{=O(\delta^2)} + \underbrace{O(|\phi_{\tau,t}(\underline{z}) - \underline{z}|)}_{=O(\sqrt{\delta})\cdot\delta}]\Big]$$

$$= \underline{u}(\underline{z},t)\,\delta + O(\delta^{3/2})$$

$$\mathbb{E}((\phi_{t+\delta,t}(\underline{z}) - \underline{z}) \otimes (\phi_{t+\delta,t}(\underline{z}) - \underline{z})) =$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}((\underline{b}_{t+\delta} - \underline{b}_t) \otimes (\underline{b}_{t+\delta} - \underline{b}_t))}_{=\delta \mathbb{1} \text{ (cov browniano)}} + 2\,\mathbb{E}\Big[(\underline{b}_{t+\delta} - \underline{b}_t) \otimes \int_t^{t+\delta} u(\phi_{\tau,t}(z), \tau)\, d\tau\Big] +$$

$$+ \underbrace{\mathbb{E}\Big[\int_t^{t+\delta} \underline{u}\, d\tau \otimes \int_t^{t+\delta} \underline{u}\, d\tau\Big]}_{=O(\delta^2)}$$

(il secondo termine) $= O(\delta^{3/2})$ (in realtà $O(\delta^2)$ [ex])

Si ha

$$\mathbb{E}[f(\phi_{t+\delta,t}(z)) - f(z)] =$$

$$= \nabla f \cdot \underline{u}\, \delta + \tfrac{1}{2} \Delta f \, \delta + O(\delta^{3/2})$$

<u>OSS</u>

$$\tfrac{1}{2} \partial^2 f\, w \cdot w = \tfrac{1}{2} \text{traccia}(\partial^2 f\, w \otimes w)$$

$$\text{tr}(\partial^2 f\, \mathbb{1}) = \text{tr}(\partial^2 f) = \Delta f$$

[1. A matrice simmetrica $n \times n$

w vettore di $\mathbb{R}^n$

$$Aw \cdot w = \sum_{i,j} A_{ij} w_i w_j$$

$$[A w \otimes w]_{hk} = \sum_i A_{hi} (w \otimes w)_{ik} = \sum_i A_{hi} w_i w_k$$

$$\operatorname{tr}(A\, w \otimes w) = \sum_h (A\, w \otimes w)_{hh} = \sum_{ih} A_{ih} w_i w_h = A w \cdot w$$

2. $A = \partial^2 f$

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$w = \phi(z) - z$

$\mathbb{E}(w \otimes w) = \delta \mathbb{1}$

$$\mathbb{E}(\operatorname{tr}(\partial^2 f\; w \otimes w)) = \operatorname{tr}(\partial^2 f\; \mathbb{E} w \otimes w) = \operatorname{tr}(\partial^2 f\; \mathbb{1} \delta) =$$

$$= \delta \operatorname{tr}(\partial^2 f) = \delta \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \delta \Delta f \Big]$$

Abbiamo provato che

$$\omega_{t+\delta}(f) - \omega_t(f) =$$

$$= \int \omega(dz, t) \left[\delta \nabla f \cdot \underline{v} + \frac{1}{2} \delta \Delta f + O(\delta^{3/2}) \right]$$

$\Rightarrow$ dividendo per δ e passando al lim $\delta \to 0$

$$\frac{d}{dt} \omega_t(f) = \omega_t\left(\underline{v} \cdot \nabla f + \frac{1}{2} \Delta f\right)$$

1) $\partial_t \omega + \mathrm{div}(\underline{u}\,\omega) = \nu \Delta \omega$

② $\int \omega(\underline{x},t) f(\underline{x}) = \int \omega_0(\underline{x})\, \mathbb{E} f(\Phi_{t,0}(\underline{x}))$

③ $\Phi_{t,s}(\underline{x}) = \underline{x} + \sqrt{2\nu}\,(\underline{b}_t - \underline{b}_s) + \int_s^t d\tau\ \underline{u}(\Phi_{t,\tau}(\underline{x}),\tau)\, d\tau$

OSS

(a) L'eq ③ induce esistenza della probabilità di transizione

$p(\underline{x},t \mid \underline{z},s)$

$\int_A p(\underline{x},t \mid \underline{z},s) = \mathbb{P}(\Phi_{t,s}(\underline{z}) \in A)$

Riscriviamo ②:

$\mathbb{E} f(\Phi_{t,s}(\underline{x})) = \int dz\ f(\underline{z})\ p(\underline{z},t \mid \underline{x},s)$

Inseriamo in ② e usiamo l'arbitrarietà di f

$\omega(\underline{x},t) = \int dy\ \omega_0(y)\ p(\underline{x},t \mid y,0)$

[$\int \omega(\underline{x},t) f(\underline{x}) = \int d\underline{x}\, d\underline{z}\ \omega_0(\underline{x})\, f(\underline{z})\, p(\underline{z},t \mid \underline{x},0)$

f arbitraria $\Longrightarrow$

$\omega(\underline{x},t) = \int dz\ \omega_0(\underline{z})\ p(\underline{x},t \mid \underline{z},0)$]

$p(\underline{x},t \mid \underline{z},0)$ risolve ① con dato iniziale δ

(è l'analogo del nucleo del calore)

In particolare

$\partial_t p(\underline{x},t \mid \underline{z},s) + \mathrm{div}_{\underline{x}}(p(\underline{x},t \mid \underline{z},s)\,\underline{u}(\underline{x},t)) = \nu \Delta_{\underline{x}}\, p(\underline{x},t \mid \underline{z},s)$

(KOLMOGOROV IN AVANTI)

(b) $\mathbb{E}(f(\Phi_{t,s}(\underline{x})))$ verifica un'equazione?

Ricordiamo come abbiamo ottenuto la ①:

$f(\Phi_{t+\delta,s}(\underline{x})) - f(\Phi_{t,s}(\underline{x})) =$

$= f(\Phi_{t+\delta,t}(\Phi_{t,s}(\underline{x}))) - f(\Phi_{t,s}(\underline{x}))$

$\frac{d}{dt} \mathbb{E} f(\Phi_{t,s}(\underline{x})) = \mathbb{E}\left(\nabla f\big|_{\Phi_{t,s}(\underline{x})} \cdot \underline{u}(\Phi_{t,s}(\underline{x})) + \nu \Delta f(\Phi_{t,s}(\underline{x}))\right)$

[EX]

Ma questo NON è un'EQ CHIUSA

Otteniamo invece un'eq chiusa se deriviamo in s:

ω_0 arbitrario e regolare

$\int \omega(\underline{x},s)\, \mathbb{E} f(\Phi_{t,s}(\underline{x})) = \int \omega(\underline{x},t) f(\underline{x})\, dx$

Deriviamo in s

$\int \partial_s \omega(\underline{x},s)\, \mathbb{E} f(\Phi_{t,s}(\underline{x})) + \int \omega(\underline{x},s) \frac{d}{ds} \mathbb{E}(f(\Phi_{t,s}(\underline{x}))) = 0$

$\int \partial_s \omega(\underline{x},s)\, \mathbb{E} f(\Phi_{t,s}(\underline{x})) = \int [-(\mathrm{div}(\underline{u}(\underline{x},s)\,\omega(\underline{x},s)) + \nu \Delta \omega(\underline{x},s)]\, \mathbb{E} f(\Phi_{t,s}(\underline{x}))$

Supponiamo che $\mathbb{E} f(\Phi_{t,s}(\underline{x}))$ sia regolare

$$\int \omega(\underline{x},s) \frac{d}{ds} \mathbb{E} f(\Phi_{t,s}(\underline{x})) = - \int \omega(\underline{x},s) \left[\underline{u}(\underline{x},s) \cdot \nabla + \nu \Delta \right] \mathbb{E} f(\Phi_{t,s}(\underline{x}))$$

Usiamo l'arbitrarietà di $\omega(\underline{x},s)$ e otteniamo
← possiamo usarla come dato iniz arbitr

$$\frac{d}{ds} \mathbb{E} f(\Phi_{t,s}(\underline{x})) = - \left[\underline{u}(\underline{x},s) \cdot \nabla + \nu \Delta \right] \mathbb{E} f(\Phi_{t,s}(\underline{x}))$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial s} p(\underline{x},t \mid \underline{z},s) = - \left[\underline{u}(\underline{z},s) \cdot \nabla_{\underline{z}} + \nu \Delta_{\underline{z}} \right] p(\underline{x},t \mid \underline{z},s)$$

(KOLMOGOROV ALL'INDIETRO)

(c) Per NS $\operatorname{div} \underline{u} = 0$

$\Rightarrow$

$$\partial_t \omega + \operatorname{div}(\underline{u}\omega) = \nu \Delta \omega$$

$$\partial_t \omega + (\underline{u} \cdot \nabla)\, \omega = \nu \Delta \omega$$ ← suscettibile di un'altra interpr stocastica (Kol all'

Quindi possiamo pensare che $\omega(\underline{x},t)$ sia il valore atteso di ω_0 di un qualche flusso ψ:

$$\omega(\underline{x},t) = \mathbb{E}(\omega_0(\psi_{0,-t}(\underline{x})))$$

dove

$$\psi_{\tau,t}(\underline{x}) = \underline{x} + \sqrt{2\nu}\,(\underline{b}_\tau - \underline{b}_s) + \int_\tau^t dr \left(-\underline{u}(\psi_{\tau,r}(\underline{x}), -r) \right)$$

NOTAZ

L'espressione "differenziale" per ③ è, ~~posto~~

Ⓐ $d\underline{x} = \underline{u}(\underline{x},t)\, dt + \sqrt{2\nu}\, d\underline{b}_t$ ← Kolmogorov in avanti
← differenziale stocastico

Ⓑ $d\underline{x} = -\underline{u}(\underline{x},-t)\, dt + \sqrt{2\nu}\, d\underline{b}_t$ ← Kolmogorov all'indietro

nel caso Ⓐ

$$\omega(\underline{x},t) = \int \omega_0(\underline{z})\, p(\underline{x},t \mid \underline{z},0)\, d\underline{z}$$

mentre nel caso Ⓑ

$$\omega(\underline{x},t) = \mathbb{E}\, \omega_0(\psi_{0,t}(\underline{x})) = \int \omega_0(\underline{z})\, \tilde{p}(\underline{z},0 \mid \underline{x},-t)\, d\underline{z}$$

OSS

Quello che abbiamo fatto finora è puramente interpretativo!

Abbiamo infatti supposto data $\underline{u}$ e ricavato la dinamica di ω

SI PUÒ FARE la COSTRUZIONE DELLE SOL DI NS attraverso i PROCESSI STOCASTICI

Φ^ν t.c.

$$\begin{cases} \Phi^\nu_{t,s}(\underline{x}) = \underline{x} + \sqrt{2\nu}\,(\underline{b}_t - \underline{b}_s) + \int_s^t \underline{u}^\nu(\Phi^\nu_{t,\tau}(\underline{x}), \tau)\, d\tau \\ \underline{u}^\nu(\underline{x},t) = \int K(\underline{x}-\underline{y})\, \omega^\nu(\underline{y},t)\, d\underline{y} = \mathbb{E} \int \omega_0(d\underline{z})\, K(\underline{x} - \Phi_{t,0}(\underline{z})) \end{cases}$$

(con un procedimento simile a quello per Eulero)

2 FATTI

$\omega_0(\underline{x}) > 0 \implies \int \omega^\nu(\underline{x}, t) = \int \omega_0^{\pm}(\underline{x})$

$\left(\text{N.B. } \int p(\underline{x}, t \mid \underline{z}, 0) = 1 \right)$

Se ω_0 non ha segno costante

$\implies$

$\int |\omega^\nu(\underline{x}, t)| \leq \int |\omega_0(\underline{x})|$

[Decomponiamo ω_0 in parte pos e parte neg:

$\omega_0(\underline{x}) = \omega_0^+(\underline{x}) - \omega_0^-(\underline{x})$

$\omega_0^{\pm}(\underline{x}) \geq 0$

$\omega_0^{\pm}(\underline{x})$ hanno supp disgiunti

Definiamo

$\omega^{\pm}(\underline{x}, t) = \int \omega_0^{\pm}(\underline{x})\, p(\underline{x}, t \mid \underline{z}, 0)$

Allora

$\int \omega^{\pm}(\underline{x}, t) = \int \omega_0^{\pm}(x)$

e quindi

$|\omega(\underline{x}, t)| \leq \omega^+(\underline{x}, t) + \omega^-(\underline{x}, t)$

$\implies \int |\omega(\underline{x}, t)| \leq \int |\omega_0(\underline{x})|\, d\underline{x}$]

Inoltre

$\|\omega(\underline{x}, t)\|_\infty \leq \sup_x \int dz\; \omega_0(\underline{z})\, \tilde{p}(\underline{z}, 0 \mid \underline{x}, -t) \leq$

$\leq \|\omega_0\|_\infty \sup_x \underbrace{\int dz\; \tilde{p}(\underline{z}, 0 \mid \underline{x}, -t)}_{= 1}$

$\implies \|\omega(x, t)\|_\infty \leq \|\omega_0\|_\infty$

LIMITE DI VISCOSITÀ NULLA IN $\mathbb{R}^2$

Data ω, il campo è

$$\underline{u}(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{(\underline{x}-\underline{y})^\perp}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}\,\omega(\underline{y})\,dy$$

$$\underline{K} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\underline{x}^\perp}{|\underline{x}|^2}$$

In $\mathbb{R}^2$ serve $\omega_0 \in L_1 \cap L_\infty$

$$\int |\omega_0(\underline{z})|\,|K(\underline{x}-\underline{z}) - K(\underline{y}-\underline{z})| \le C(\|\omega_0\|_1 + \|\omega\|_\infty)\,\varphi(|\underline{x}-\underline{y}|)$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} r(|\ln r| + 1) & r<1 \\ 1 & r>1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} \Phi_t^\nu = \Phi_{t,0}^\nu & \omega^\nu & \underline{u}^\nu & \text{NS} \\ & & & \downarrow ??? \\ \Phi_t & \omega & \underline{u} & \text{EULERO} \end{array}$$

Se riusciamo a far vedere che $\forall f$ osservabile

$$\int \omega^\nu(\underline{x},t)\,f(\underline{x}) \xrightarrow{\nu\to 0} \int \omega(\underline{x},t)\,f(\underline{x})$$

allora $\omega^\nu \to \omega$ almeno in senso deb.

Sia $f \in C^1$

$$\left|\int \omega^\nu(\underline{x},t)\,f(\underline{x}) - \int \omega(\underline{x},t)\,f(\underline{x})\right| =$$

$$= \left|\int \omega_0(dx)\,\mathbb{E}f(\Phi_t^\nu(\underline{x})) - \int \omega_0 f(\Phi_t(\underline{x}))\right|$$

$$\le \|\nabla f\|_\infty \int |\omega_0(\underline{z})|\,\mathbb{E}\,|\Phi_t^\nu(\underline{z}) - \Phi_t(\underline{z})|\,d\underline{z}$$

Scriviamoci la differenza

$\Phi_t^\nu(\underline{x}) - \Phi_t(\underline{x}) =$ che fine ha fatto $\underline{b}_0$? ma tanto $\underline{b}$ è def a meno di cost!

$$= \underline{x} + \sqrt{2\nu}\,\underline{b}_t + \int_0^t ds\,\underline{u}^\nu(\Phi_s^\nu(\underline{x}),s) - \left(\underline{x} + \int_0^t ds\,\underline{u}(\Phi_s(\underline{x}),s)\right) =$$

$$= \sqrt{2\nu}\,\underline{b}_t + \underbrace{\int_0^t ds\left[\underline{u}^\nu(\Phi_s^\nu(\underline{x}),s) - \underline{u}^\nu(\Phi_s(\underline{x}),s)\right]}_{\mathrm{I}}$$

$$+ \underbrace{\int_0^t ds\left[\underline{u}^\nu(\Phi_s(\underline{x}),s) - \underline{u}(\Phi_s(\underline{x}),s)\right]}_{\mathrm{II}}$$

Ora, per I usiamo la stima quasi-Lipschitz:

$$|\mathrm{I}| \le C(\|\omega_0\|_1 + \|\omega_0\|_\infty)\,\varphi(|\Phi_s^\nu(\underline{x}) - \Phi_s(\underline{x})|)$$

II è più delicato:

$$\underline{u}^\nu(\Phi_s(\underline{x}),s) - \underline{u}(\Phi_s(\underline{x}),s)$$

$$= \mathbb{E}\int K(\Phi_s(\underline{x}) - \Phi_s^\nu(\underline{z}))\,\omega_0(\underline{z}) - \int K(\Phi_s(\underline{x}) - \Phi_s(\underline{z}))\,\omega_0(\underline{z})$$

se passiamo ai moduli non sappiamo fare nulla, dobbiamo inte grare contro $|\omega_0|$:

$$\int dx\, |\omega_0(x)|\, |\underline{u}^\nu(\Phi_s(\underline{x}), s) - \underline{u}(\Phi_s(\underline{x}), s)| \le$$

$$\le \int dx\, |\omega_0(\underline{x})| \int dz\, |\omega_0(\underline{z})|\, \mathbb{E}\, |K(\Phi_s(\underline{x}) - \Phi_s^\nu(\underline{z})) - K(\Phi_s(\underline{x}) - \Phi_s(\underline{z}))| =$$

$$= \mathbb{E} \int dx\, |\omega_0(\underline{x})| \int dz\, |\omega_0(\underline{z})|\, |K(\Phi_s(\underline{x}) - \Phi_s^\nu(\underline{z})) - K(\Phi_s(\underline{x}) - \Phi_s(\underline{z}))|$$

$$= \mathbb{E} \int dx\, |\omega(\underline{x}, s)| \int dz\, |\omega_0(\underline{z})|\, |K(\underline{x} - \Phi_s^\nu(\underline{z})) - K(\underline{x} - \Phi_s(\underline{z}))| =$$

$$= \int dz\, |\omega_0(\underline{z})|\, \mathbb{E} \int dx\, |\omega(\underline{x}, s)|\, |K(\underline{x} - \Phi_s^\nu(\underline{z})) \le$$

$$\le C\, \mathbb{E} \int dz\, |\omega_0(\underline{z})|\, \varphi(|\Phi_s^\nu(\underline{z}) - \Phi_s(\underline{z})) - K(\underline{x} - \Phi_s(\underline{z}))|$$

Torniamo indietro:

$$\Phi_t^\nu - \Phi_t = \sqrt{2\nu}\, \underline{b}_t + \int_0^t ds\, \mathrm{I} + \int_0^t ds\, \mathrm{II}$$

$$\mathbb{E} \int |\omega_0(\underline{x})|\, |\Phi_t^\nu(\underline{x}) - \Phi_t(\underline{x})| \le C\sqrt{\nu t} + C \int_0^t ds\, \mathbb{E} \int |\omega_0(\underline{z})|\, \varphi(|\Phi_s^\nu(\underline{z}) - \Phi_s(\underline{z})|) \quad (*)$$

Per poter usare Gronwall dobbiamo eliminare la φ nel membro di destra

DISUGUAGLIANZA DI JENSEN

Sia $\varphi(r)$ concava:

$$\varphi(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \ge \lambda_1 \varphi(x) + \lambda_2 \varphi(y)$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \ge 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

Allora

$$\varphi\left(\frac{\int \mu(dz)\, f(z)}{\int \mu(dz)}\right) \ge \frac{\int \mu(dz)\, \varphi(f(z))}{\int \mu(dz)}$$

Come vogliamo usarla?

Scegliamo

$$\text{"}\mu(dz)\text{"} = \mathbb{E}\, \omega_0(\underline{z})\, d\underline{z}$$

$$\int \mu(dz) = \|\omega_0\|_1$$

e quindi

$$(*) \le C\sqrt{\nu t} + C\|\omega_0\|_1 \int_0^t ds\, \varphi\Bigg(\underbrace{\frac{1}{\|\omega_0\|_1}\, \mathbb{E} \int |\omega_0(z)|\, |\Phi_s^\nu(\underline{z}) - \Phi_s(\underline{z})|}_{=\gamma_s}\Bigg)$$

cioè

$$\gamma_t \le C\sqrt{\nu t} + C \int_0^t ds\, \varphi(\gamma_s)$$

$\dot r = \varphi(r)$ ha sol cont in $0 \iff \lim_{\nu \to 0} \gamma_t = 0$