NAVIER - STOKES ← INCOMPRIMIBILE (SUL TORO, SENZA BORDO)

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u = -\nabla p + \nu\Delta u \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

VISCOSITÀ

SONO ENTRATO NEL MONDO "PARABOLICO"

OSS

Prototipo di pb parabolico:

$$\begin{cases} \partial_t f = \Delta f \\ f(0) = f_0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}^d$$

Anche fourier

(EQ DEL CALORE)

$$f(x,t) = \int dy\, f_0(y) \frac{e^{-|x-y|^2/4t}}{(4\pi t)^{d/2}}$$

è una δ-approssimante (NUCLEO DEL CALORE)
è C^∞ se $t \neq 0$

$\forall t>0$ $f(x,t) \in C^\infty$ per quanto orribile sia f_0 ← anche una misura

(il laplaciano REGOLARIZZA ISTANTANEAMENTE)

OSS

Potremmo pensare che Δ ci dia $u \in H_m$ $\forall m$ ...

NO! Ma ci permette di dim in $\mathbb{R}^3$

TEO

$\exists$ sol globale debole

(presumibilmente non unica...)

OSS

In $\mathbb{R}^2$ abbiamo già $\exists$ globale per Eulero, il Δ migliora le cose

TEO

Se u_0 è suff regolare (anche no...)

$\Rightarrow \forall t>0$, $u \in C^\infty$

PROGRAMMA

1. EQ PER I COEFF DI FOURIER
2. STIME A PRIORI PER $\hat{u}_k$ GLOBALI IN t

1. Trasformando $\partial_t u + u\cdot\nabla u = -\nabla p + \nu\Delta u$ otteniamo

$$\partial_t \hat{u}_k = -i\sum_h (\hat{u}_{k-h}\cdot h)\,\hat{u}_h - ik\hat{p}_k - \nu k^2 \hat{u}_k$$

mentre l'eq div $u=0$ dà

$$k\cdot\hat{u}_k = 0$$

Sia $\hat{K}$ il versore del vett. K

$$\hat{K} = \frac{K}{|K|}$$

allora la proiez su K di un generico vett a si scrive

$$\Pi_K a = (a \cdot \hat{K})\hat{K} = (\hat{K} \otimes \hat{K}) a$$

e dunque

$\Pi_K = \hat{K} \otimes \hat{K}$ proiettore

$\Pi_K^\perp = \mathbb{1} - \hat{K} \otimes \hat{K}$ proiettore ortog

OSS

$K \cdot \hat{u}_K = 0 \implies \Pi_K^\perp \hat{u}_K = \hat{u}_K$

$\Pi_K^\perp K \hat{p}_K = 0$

Applichiamo dunque $\Pi_K^\perp$ all'eq

$$(ef_1) \quad \partial_t \hat{u}_K = \underbrace{-i \sum_h (\hat{u}_{K-h} \cdot h) \Pi_K^\perp \hat{u}_h}_{\Gamma^K(\hat{u})} - \nu K^2 \hat{u}_K$$

$\Gamma^K(\hat{u})$ PARTE NON LINEARE DELL'EQ

(è sparita la pressione)

Applichiamo il principio di Duhamel

Perturbiamo risp alla sol di $\partial_t \hat{u}_K = -\nu K^2 \hat{u}_K$

$$(ef_2) \quad \hat{u}_K(t) = e^{-\nu K^2 t} \hat{u}_K(0) + \int_0^t ds \; e^{-\nu K^2 (t-s)} \Gamma^K(\hat{u}(s))$$

Dunque abbiamo scritto la sol in forma integrale

② Assumiamo che (ef_1), (ef_2) abbiano sol

Consideriamo l'energia:

$$\frac{\sum |\hat{u}_K|^2}{2} = \int \frac{u^2}{2} = E(t)$$

Abbiamo

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt} \frac{(u,u)}{2} = (u, -\underbrace{(u \cdot \nabla) u)}_{0} - \underbrace{(u, \nabla p)}_{0} + \nu (u, \Delta u) =$$

$$= \nu \int u \cdot \Delta u = \nu \int u_i \cdot (\nabla \cdot \nabla u_i) =$$

$$= -\nu \int (\nabla u_i) \cdot \nabla u_i = -\nu \int \sum_i |\nabla u_i|^2 < 0$$

e dunque l'ENERGIA è DISSIPATA

($\nu \sim$ attrito $\sim$ dissipazione)

$\Rightarrow E(t) \leq E_0$

che dà

$$|\hat{u}_K| \leq \left(\sum |\hat{u}_K|^2\right)^{1/2} = (2E(t))^{1/2} \leq (2E_0)^{1/2}$$

Ora, riscriviamo la der di prima per Fourier:

$$\frac{d}{dt}\frac{\sum|\hat{u}_K|^2}{2} = -\sum \nu\, |K|^2\, |\hat{u}_K|^2$$

$$-\underbrace{\int_0^t ds \sum_K |K|^2\, |\hat{u}_K(s)|^2}_{\circledast} = \frac{E_0 - E(t)}{\nu} \le \frac{E_0}{\nu}$$

<u>OSS</u>

Questa stima non vale per $\nu = 0$

<u>OSS</u>

$\circledast$ è la norma H_1 di u $|u|_1^2$. Dunque la stima dice

$$\int_0^t |u|_1^2 < c$$

$\Rightarrow |u|_1$ è finita q.o. in t

③ "COSTRUZIONE DELLE SOL"

Come per Eulero $\hat{u}_K^N(t)$ risolve il pb proiettato sul sottosp S^N con dato iniz

$$\hat{u}_K^N(0) = \begin{cases} \hat{u}_K(0) & |K| \le N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $\hat{u}_K^N(t)$ ESISTE GLOBALE perchè $|\hat{u}_K^N(t)| \le c\sqrt{E_0}$
- $$|\Gamma^K(\hat{u})| \le \left|\sum_h (\hat{u}_{K-h}\cdot h)\Pi_K^\perp \hat{u}_h\right| = \left|\sum_h (\hat{u}_{K-h}\cdot(h-K))\Pi_K^\perp\hat{u}_h + \underbrace{\sum_h(\hat{u}_{K-h}\cdot K)\Pi_K^\perp\hat{u}_h}_{=0}\right|$$

$$\le |K| \sum_h |\hat{u}_{K-h}|\,|\hat{u}_h| \underset{\text{Cauchy - Schwartz}}{\le} |K| \sum_h |\hat{u}_h|^2 \le c\,|K|\, E_0$$

$|\Pi_K^\perp \hat{u}_h| \le |\hat{u}_h|$

La succ (in N)

$\hat{u}_K^N(t)$ è limitata $\forall K$ e ha der temp limitata $\forall K$

Consideriamo

$$(ef_1)\quad \partial_t \hat{u}_K = -\nu K^2 \hat{u}_K + \Gamma^K$$

Passando ai moduli otteniamo

$$|\partial_t \hat{u}_K| \le \nu K^2 |\hat{u}_K| + |\Gamma^K| \le c\,\nu K^2 \sqrt{E_0} + cK E_0$$

Poichè

$$|\hat{u}_K^N| \le c$$
$$|\partial_t \hat{u}_K^N| \le c$$

ASCOLI - ARZELÀ $\Rightarrow$

$\exists$ sottosequenza $(N \to +\infty)$ t.c. $\hat{u}_K^N(t) \to \hat{u}_K(t)$ unif in t

<u>OSS</u> Fin qui indip da ν $\Rightarrow$ vero anche per Eulero

$\hat{u}_K(t)$ risolve (ef_2) (per EULERO è FALSO)

NAVIER - STOKES IN $\mathbb{T}^3$ (toro 3-dim)

Eq per i coeff di Fourier:

$$\partial_t \hat{U}_K = \sum_{h \in \mathbb{Z}^3} \hat{U}_{K-h} \cdot K \ \Pi_K^{\perp} \hat{U}_h - \nu K^2 \hat{U}_K$$

$(u \cdot \nabla) u$ proiettato sui campi a div nulla

$$(ef_2) \quad \hat{U}_K(t) = e^{-\nu t K^2} \hat{U}_K(0) + \int_0^t ds \ \Gamma_K(\hat{U}(s)) \ e^{-\nu(t-s)|K|^2}$$

$$\Gamma_K = -i \sum_h \hat{U}_{K-h} \cdot K \ \Pi_K \hat{U}_h$$

Abbiamo dim

$$\sum_K |\hat{U}_K|^2 \leq c E_0$$

$$\sup_K |\hat{U}_K| \leq c \sqrt{E_0}$$

$$|\Gamma_K| \leq c |K| E_0$$

$$\int_0^t ds \sum_K |\hat{U}_K(s)|^2 |K|^2 \leq c E_0$$

Abbiamo allora

① $|\hat{U}_K|$ limitata in t

② $|\partial_t \hat{U}_K| \leq \nu |K|^2 |\hat{U}_K| + |\Gamma_K| \leq c < +\infty$ in t

Risolviamo il pb per i troncamenti

$$\hat{U}_K^N(t) = \begin{cases} 0 & |K| > N \\ \text{risolvono eq troncata per } |K| \leq N \end{cases}$$

$\hat{U}_K^N$ soddisfano le stesse stime a priori [ex] e quindi anche ① e ②

Poiché $\hat{U}_K^N(t)$ è equilimitata e con ∂_t equilimitata

Per Ascoli - Arzelà estraiamo una sottosucc convergente in norma uniforme sui compatti in t

$\hat{U}_K(t) : \lim_{\substack{N \to +\infty \\ \text{(sottoseq)}}} \hat{U}_K^N(t) = \hat{U}_K(t)$ ← in particolare $\hat{U}_K(t)$ è cont in t

<u>ATTENZIONE</u>: Rispetto all'enunciato di A-A serve (due volte) un argomento diagonale per provare la tesi

Vogliamo provare

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^t ds \ e^{-\nu K^2 (t-s)} \sum_h \hat{U}_{K-h}^N(s) \cdot K \ \Pi_K^{\perp} \hat{U}_h^N(s) =$$

$$= \int_0^t ds \ e^{-\nu K^2 (t-s)} \sum_h \hat{U}_{K-h} \cdot K \ \Pi_K^{\perp} \hat{U}_h$$

A tal fine spezziamo la somma:

$$\sum_h = \underbrace{\sum_{|h| \leq M}}_{\text{qui possiamo passare al lim (somma finita)}} + \overbrace{\sum_{|h| > M}}^{\text{tende a 0 per } M \to +\infty}$$

<u>Meglio</u> $\sum_{|k-h| \leq M}$ $\sum_{|k-h| \geq M}$

Stimiamo il 2° pezzo in modo da far vedere che $\to 0$:

$$\left|\sum_{|h|>\Pi}\right| \leq |K| \sum_{|h|>\Pi} |\hat{U}_{K-h}|\,|\hat{U}_h| \underset{1<\frac{|h|}{\Pi}}{\leq} \frac{|K|}{\Pi}\sum_{|h|>\Pi} |\hat{U}_{K-h}|\,|h|\,|\hat{U}_h| \leq$$

Possiamo assumere $\hat{U}_0 = 0$ ← vel media (conservata)
$\Rightarrow$ basta scegliere opportuno sist di rif Galileian

$$\leq \frac{|K|}{\Pi}\sum_{|h|>\Pi} |K-h|\,|\hat{U}_{K-h}|\,|h|\,|\hat{U}_h| \leq$$

$$\leq \frac{|K|}{\Pi}\sum |\hat{U}_h|^2\,|h|^2 \quad \text{(Schwartz)}$$

Dunque, passando all'integr in t

$$\left|\int_0^t ds\, e^{-\nu K^2(t-s)}\left(-i\sum_{|h|>\Pi}\hat{U}_{K-h}\cdot K\,\Pi_K^\perp\,\hat{U}_h\right)\right| \leq \int_0^t ds\,\frac{|K|}{\Pi}\sum_h |\hat{U}_h|^2|h|^2 \leq \frac{c\,t\,E_0|K|}{\Pi}$$

Riassumendo

$$\hat{U}_K(t) \quad e^{-\nu K^2 t}\hat{U}_K(0) \quad \int_0^t ds\, e^{-\nu K^2(t-s)}\left(-i\sum_{|h|\leq\Pi}\hat{U}_{K-h}(s)\cdot K\,\hat{U}_h(s)\right)$$

$$\hat{U}_K^N(t) = e^{-\nu K^2 t}\,\hat{U}_K^N(0) + \int_0^t ds\, e^{-\nu K^2(t-s)}\left(-i\sum_{|h|\leq\Pi}\hat{U}^N_{K-h}(s)\cdot K\,\hat{U}^N_h(s)\right) +$$

$$+\int_0^t ds\, e^{-\nu K^2(t-s)}\left(-i\sum_{|h|>\Pi}\hat{U}^N_{K-h}\cdot K\,\hat{U}^N_h\right) \leq c|K|E_0/\Pi$$

Fissiamo Π e passiamo al lim $N\to+\infty$ e poi al $\lim_{\Pi\to+\infty}$

Otteniamo

$$\hat{U}_K(t) = e^{-\nu K^2 t}\,\hat{U}_K(0) + \int_0^t ds\, e^{-\nu K^2(t-s)}\left(-i\sum_h \hat{U}_{K-h}(s)\cdot K\,\hat{U}_h(s)\right)$$

OSS

Abbiamo ottenuto

$\hat{U}_K(t)$ cont che risolve $\forall t$ N-S in Fourier

Quanto è debole/forte questa sol?

- $\sum_K |\hat{U}_K|^2 \leq C \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{iK\cdot x}\,\hat{U}_K(t)$ è una f^{ne} L^2
- $\hat{U}_K(t)$ è derivabile in t?
  L'integrando è limitato, ma potrebbe non essere continuo.
  Sappiamo dire solo che la derivata $\partial_t\hat{U}_K(t)$ esiste q.o. in t.
  (i pti in cui la der non esiste formano un insieme di misura nulla)
- $\hat{U}_K(t)$ soddisfa l'eq in forma differenziale q.o. in t:
  $$\partial_t\hat{U}_K(t) = \Gamma_K(\hat{U}) - \nu K^2\hat{U}_K$$
  Sia $\varphi\in C^\infty$ a divergenza nulla e consideriamo $\sum\hat{\varphi}_K\hat{U}_K$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_K\hat{\varphi}_K\hat{U}_K = -\nu\sum_K K^2\,\hat{\varphi}_K\cdot\hat{U}_K - i\sum_{h,K} K\,\hat{U}_{K-h}\otimes\hat{U}_h\,\hat{\varphi}_K$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\int\varphi u = \nu\int\Delta\varphi\cdot u + \sum_{i,j}\int\partial_j\varphi_i\,u_i u_j}$$ ← FORMULAZ DEBOLE (q.o. in t)

EULERO | NAVIER-STOKES

$$E(t) = \frac{1}{2}\int dx\, u^2(x,t) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_K |\hat{u}_K(t)|^2$$

Eulero:

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0$$

Navier-Stokes:

$$\frac{d}{dt}E(t) = \nu(u, \Delta u) =$$

$$= -\nu\sum_i \int |\nabla u_i|^2 = -\frac{\nu}{(2\pi)^3}\sum_K |K|^2|\hat{u}_K|^2 < 0$$

$$E(t) \leq E_0$$

$$\Downarrow$$

$$\Sigma|\hat{u}_K| \leq c E_0$$

$$|\hat{u}_K| \leq c\sqrt{E_0}$$

$$|\Gamma_K| \leq c|K|E_0$$

$$\Downarrow$$

$$|\partial_t \hat{u}_K| \leq c$$

La sottoseq convergente la estraiamo sia per Eul che per NS
Passaggio al lim nell'equaz?

Eulero: NO

N.B. Le norme L^p di ω si conservano solo in dimensione 2

Navier-Stokes: SI

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\Sigma|\hat{u}_K|^2}{(2\pi)^3} = -\frac{\nu}{(2\pi)^3}\Sigma|K|^2|u_K|^2$$

Integrando in t:

$$E_0 - E_t = \int_0^t ds \sum_K K^2|\hat{u}_K|^2$$

$$\Rightarrow \int_0^t ds \sum_K K^2|\hat{u}_K|^2 \leq \frac{cE_0}{\nu}$$

DISSIPAZIONE DELL'ENERGIA

Chi è $\Sigma|K|^2|\hat{u}_K|^2$?

- $\hat{\omega}_K = i\, K \wedge \hat{u}_K$
- $K \cdot \hat{u}_K = 0$ (divergenza nulla)
- $|\hat{\omega}_K| = |K|\,|\hat{u}_K|$
- $\sum_K |K|^2|\hat{u}_K|^2 = \Sigma|\hat{\omega}_K|^2 = c\int \omega^2\, dx$

e dunque la dissipaz che controlliamo è

$$\int_0^t ds \int \omega^2\, dx$$

OSS

Quale REGOLARITA' hanno le sol di NS che abbiamo trovato?

OSS

~~[illegible]~~ REGOLARITA':

in Fourier è il controllo delle norme H_m:

$$\sum_K |K|^{2m}|\hat{u}_K|^2$$

equivalentemente

$\sup_K |K|^\alpha |\hat{U}_K| = D_\alpha(U) < +\infty$

OSS

$$\hat{u}_K(t) = \underbrace{e^{-\nu K^2 t}\,\hat{U}_K(0)}_{\text{(PURO "CALORE")}} + \int_0^t ds\; e^{-\nu K^2(t-s)}\,\Gamma_K(\hat{U}_K(s))$$

$$|K|^\alpha e^{-\nu K^2 t} = \frac{(\sqrt{\nu t}\,|K|)^\alpha e^{-\nu K^2 t}}{(\nu t)^{\alpha/2}} \le \frac{C_\alpha}{(\nu t)^{\alpha/2}} \quad t>0$$

Dunque l'antitrasf di $e^{-\nu K^2 t}\hat{U}_K(0)$ è C^∞ se $t>0$

(Il pezzo che dà pb$_W$ è quello quadratico)

Per $t>0$ la funz di coeff $\hat{U}_K(0)\,e^{-\nu t K^2}$ è C^∞ in x

Cosa succede per il pezzo

$$\int_0^t ds\; e^{-\nu K^2(t-s)}\;\Gamma_K(\hat{U}(s))$$

se non ci fosse Γ_K, l'int farebbe $\frac{1}{\nu K^2}(1-e^{-\nu K^2 t})$ (2 derivate), ma non sappiamo stimare Γ_K unif risp a (solo $|\Gamma_K| \le |K|\, c\, E_0$)

QUINDI

$$|\hat{U}_K| \le e^{-\nu K^2 t}\,|\hat{U}_K(0)| + \frac{1}{\nu |K|^2}\,|K|\,c\,E_0$$

$\Rightarrow \forall\, t>0 \quad |K|\,|\hat{U}_K| \le C \;\Rightarrow\; |\hat{\omega}_K| \le C$

(un po' si è regolarizzato)

~~TEOREMA DI~~ ASCOLI - ARZELÀ

$f^N \in C(D)$

D compatto

$\sup |f^N| \le c < +\infty$ (equilimit)

$\forall\, \varepsilon>0 \;\exists\, \delta$ t.c. se $|x-y|<\delta \Rightarrow \forall N \; |f^N(x)-f^N(y)| < \varepsilon$ (equicont)

$\Rightarrow \exists\, f \in C(D)$ t.c. per sottos

$f^N \to f$ UNIF

OSS

Come lo abbiamo usato?

$U_K^N(t)$

a K fissato

$U_K^N(t)$ è equilim (unif in K)

è equicont $(|U_K^N(t) - U_K^N(s)| \le (t-s)\sup|\partial_t U_K^N(s)|$

$\forall K, \forall T$

$\exists\, U_K(t)$ t.c. $U_K^N(t) \to U_K(t)$ in $t\in[0,T]$ per sottoseq

La sottoseq dipende da T, K

Fissiamo K

Per $T = 1$

sottoseq $N_1^1, N_2^1, \dots, N_K^1, \dots \to u(t)$ per $t \leq 1$

Per $T = 2$

$N_1^2, N_2^2, \dots, N_K^2, \dots$ $u(t)$ per $t \leq 2$

Per $T = 3$

$N_1^3, N_2^3, \dots, N_K^3, \dots$ $u(t)$ per $t \leq 3$

Def $n_j = N_j^j$

n_j è sottoseq di tutte le N^i

$\Rightarrow$ troviamo $u(t)$ t.c. $u^{n_j}(t) \to u(t)$ $\forall t$

(unif solo sui cpt)

Nello stesso modo trattiamo la dipendenza da K e otteniamo un'unica sottoseq t.c.

$u_K^N(t) \to u_K(t)$

PUNTUALIZZIAMO:

① La "costruzione" delle sol debole richiede come hp (solo) $u_0 \in L^2$

② $\hat{u}_K(t)$ sono cont in t

Non sappiamo se $u(t)$ è continua in t

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_K \hat{u}_K(t)\, e^{iK.x}$$

③ Sono sol "particolarmente deboli"

$\hat{u}_K(t)$ è cont in t

$\Longrightarrow \forall\, \varphi \in C_0^\infty$

$$(\varphi, u(t)) \to (\varphi, u_0) \qquad \text{per } t \to 0$$

(u è DEBOLMENTE CONTINUA in t)

④ In particolare $\sum |\hat{u}_K|^2 = c\,E(t)$ PUÒ essere DISCONT in t

TEO DI AUTOREGOLARIZZAZIONE

Se $\sup_{[0,T]} \sup_K |K|^\alpha |\hat{u}_K(t)| \le C_\alpha < +\infty$ per $\alpha > d-1$ ~~dimensioni~~ con

d dimensione = 2 o 3

$\Rightarrow |K|^\beta |\hat{u}_K(t)| < +\infty \quad \forall\, \beta > \alpha$ per $0 < t \le T$ $\Longrightarrow u \in C^\infty$ per $t > 0$

Inoltre se u_0 è t.c.

$|K|^{\bar\beta} |\hat{u}_K(0)| < +\infty$ per $\bar\beta > \alpha \Longrightarrow |K|^\beta |\hat{u}_K(t)| < +\infty \quad 0 \le t \le T$

N.B. Se $\alpha > 3$ (in dim 3)

$|K|^\alpha |\hat{u}_K| \le c < +\infty \Longrightarrow u$ cont

(N.B. $\sum |K|^{2m} |\hat{u}_K|^2 < c \quad m > 3/2 \Longrightarrow u$ cont)

DIM

Abbiamo

$$\hat{u}_K(t) = e^{-\nu t K^2}\, \hat{u}_K(0) + \int_0^t ds\, e^{-\nu K^2 (t-s)}\, \Gamma_K(\hat{u})$$

$$\Gamma_K = -i \sum_h (\hat{u}_{K-h} \cdot h)\, \hat{u}_h = -i \sum_h (\hat{u}_{K-h} \cdot K)\, \hat{u}_h$$

Cosa possiamo dire di Γ_K? (supponiamo u a media nulla)

$$|\Gamma_K| \le |K| \sum_{\substack{h\neq 0\\ h \neq K}} \frac{|\hat{u}_{K-h}|\,|K-h|^\alpha}{|K-h|^\alpha} \cdot \frac{|\hat{u}_h|\,|h|^\alpha}{|h|^\alpha} \le C_\alpha^2 |K| \sum_{\substack{h\neq 0\\ h \neq K}} \frac{1}{|K-h|^\alpha} \frac{1}{|h|^\alpha}$$

Dobbiamo allora stimare la serie

$$\sum_{\substack{h\neq 0\\ h \neq K}} \frac{1}{|K-h|^\alpha} \frac{1}{|h|^\alpha} \le$$

$$\le C \int \frac{1}{|K-y|^\alpha + 1} \frac{1}{|y|^\alpha + 1}\, dy$$

Spezziamo l'integrale:

$$\int = \int_B + \int_{B^c}$$

$B = \{y : |y| < 2K\}$

$B^c = \{y : |y| > 2K\}$

In B^c abbiamo

$$|K-y| \geq ||y| - |K|| = |y| - |K| > |y| - |y|/2 = |y|/2$$

e dunque

$$\int_{B^c} \leq C \int_{2|K|}^{+\infty} d\rho \, \frac{\rho^{d-1}}{\rho^{2\alpha}} = C \frac{1}{|K|^{2\alpha-d}}$$

$< \infty$ sse $2\alpha - d + 1 > 1 \Rightarrow \alpha > d/2$

<u>N.B.</u> (EX) Se $\alpha > d/2$ $\int_{B^c} = +\infty$

$$\int_B = \frac{1}{|K|^\alpha} \int_{|y|<2|K|} \frac{|K|^\alpha}{1 + |K-y|^\alpha} \frac{1}{|y|^\alpha + 1} dy \leq$$

$$\leq \frac{C}{|K|^\alpha} \int_{|y|<2|K|} \frac{|K-y|^\alpha + |y|^\alpha}{(1+|K-y|^\alpha)(1+|y|^\alpha)} dy \leq$$

$$\leq \frac{C}{|K|^\alpha} \int_{|y|<2|K|} \left[\frac{dy}{1+|y|^\alpha} + \frac{dy}{1+|K-y|^\alpha} \right] \leq$$

$|y| \leq 2|K| \Rightarrow |K-y| \leq 3|K|$

$$\leq \frac{C}{|K|^\alpha} \left[\int_{|y|<2|K|} \frac{dy}{1+|y|^\alpha} + \int_{|y|<3|K|} \frac{dy}{1+|y|^\alpha} \right]$$

$$\leq \frac{C}{|K|^\alpha} \int_{|y|<3|K|} \frac{dy}{1+|y|^\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{C}{|K|^\alpha} \int_{1 \leq |y| \leq 3|K|} \frac{1}{|y|^\alpha} = \frac{C}{|K|^\alpha} \int_1^{3|K|} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha - d + 1}}$$

$$= \frac{C}{|K|^\alpha} \begin{cases} C\left(1 - \frac{1}{|K|^{\alpha-d}}\right) \leq C & \alpha > d \\ C(1 + \ln|K|) & \alpha = d \\ C(|K|^{d-\alpha} - 1) & \alpha < d \end{cases} \leq \begin{cases} \frac{C}{|K|^\alpha} & \alpha > d \\ \frac{C}{|K|^\alpha}(1 + \ln|K|) & \alpha = d \\ \frac{C}{|K|^{2\alpha-d}} & \frac{d}{2} < \alpha < d \end{cases}$$

e mettendo insieme le stime abbiamo

$$\int_{\text{totale}} = \int_B + \int_{B^c} \leq$$

$$\leq \begin{cases} \frac{C}{|K|^{2\alpha-d}} & \frac{d}{2} < \alpha \\ \frac{C}{|K|^\alpha}(\ln|K|+1) & \alpha = d \\ \frac{C}{|K|^\alpha} & \alpha > d \end{cases} =: S_\alpha(K)$$

Ora,

$$\left| \int_0^t ds \, e^{-\nu K^2(t-s)} \Gamma_K \right| \leq$$

$$\leq \int_0^t ds \, e^{-\nu K^2(t-s)} |K| \, S_\alpha(K) \, C_\alpha^2 \, c \leq c \, C_\alpha^2 \frac{|K|}{|K|^2} S_\alpha(K) = c \frac{S_\alpha(K)}{|K|}$$

e per l'altra parte abbiamo

$$e^{-\nu t K^2} |\hat{u}_K(0)| = e^{-\nu t K^2} \frac{|\hat{u}_K(0)|}{|K|^\beta} \frac{|K|^\beta (\nu t)^{\beta/2}}{(\nu t)^{\beta/2}} \leq \frac{C}{|K|^\beta} \frac{1}{t^{\beta/2}}$$

Dunque in definitiva

$$|\hat{u}_K(t)| \leq \frac{C}{|K|^\beta t^{\beta/2}} + C \frac{S_a(K)}{|K|} \quad \forall \beta$$

diverge in $t=0$ $\Rightarrow$ o.K. perchè non abbiamo supposto regolarità per il dato iniz

~~Dobbiamo far vedere~~

Dobbiamo far vedere che per $\alpha > d-1$ la regolarità aumenta

Sia $\alpha > d-1$, in particolare $\alpha = d-1+\varepsilon$ e $\alpha < d$

$$\frac{S_a(K)}{K} = C \frac{1}{|K|^{1+2(d-1+\varepsilon)-d}} = \frac{1}{|K|^{d-1+2\varepsilon}}$$

Scegliamo $\beta = d-1+2\varepsilon \Rightarrow t>0 \; |K|^{d-1+2\varepsilon} |\hat{u}_K| \leq C < +\infty$ dipende da t

Ripartiamo da $t_1 > 0$

abbiamo scoperto che per $t \geq t_1$ $|K|^{d-1+2\varepsilon} |\hat{u}_K| \leq C(t_1) < +\infty$

Riesequiamo le stime e troviamo che per $t > t_1$

$$|K|^{d-1+4\varepsilon} |\hat{u}_K| < +\infty$$

e continuiamo ...

Per $d-1+\varepsilon$, $0<\varepsilon<1 \Rightarrow d-1+2\varepsilon$

Se $\alpha > d \Rightarrow$ arriviamo ad $\alpha + 1$

Se $\alpha = d \Rightarrow$ arriviamo ad $\alpha + \delta \; \forall \delta < 1$

N.B. La divergenza in $t=0$ delle costanti non c'è se supponiamo

$$|K|^{\bar\beta} |\hat{u}_K(0)| \leq C < +\infty$$

Infatti invece delle stime

$$e^{-\nu K^2 t} |\hat{u}_K(0)| \leq \frac{1}{|K|^\beta} \frac{C\sqrt{E_0}}{(\nu t)^{\beta/2}} \quad \text{per } \beta < \bar\beta$$

possiamo usare semplicemente

$$e^{-\nu K^2 t} |\hat{u}_K(0)| \leq \frac{C}{|K|^{\bar\beta}}$$

(fino a $\bar\beta$, dopo dobbiamo tornare a quell'altra) #

EX

Se

$$|K|^{\bar\beta} |\hat{u}_K(0)| \leq C < +\infty$$

$\Rightarrow$

$$e^{-\nu K^2 t} |\hat{u}_K(0)| \leq \frac{C_{\beta,\bar\beta}}{|K|^\beta (\nu t)^{\beta - \bar\beta/2}} \quad \forall \beta > \bar\beta$$

OSS

In generale NON abbiamo informazioni di regolarità delle sol

Tali informaz le abbiamo però in dim 2

OSS

In DIMENSIONE 2 le sol deboli sono C^∞ per $t>0$ (sono FORTI)

MOTIVO:

Eq della vorticità:

$\mathbb{T}^2$ $\quad \partial_t \omega + (u\cdot\nabla)\omega = \nu \Delta \omega$ ← $\nu=0$ (Eulero) ω cons lungo caratt + conservate norme L^p

$\mathbb{T}^3$ $\quad \partial_t \omega + (u\cdot\nabla)\omega = (\omega\cdot\nabla)u + \nu\Delta\omega$ ← termine di stretching

Mettendoci in $\mathbb{T}^2$

$$\frac{d}{dt}\int\omega^2 = 2\int\omega\left(-(u\cdot\nabla)\omega + \nu\Delta\omega\right) = \nu\int\omega\,\Delta\omega = -\nu\int|\nabla\omega|^2 \le 0$$

$\int\omega^2 \le \int\omega_0^2$. in Fourier è $\int\omega^2(x) = \sum |K|^2|\hat{u}_K|^2$

$(K\cdot\hat{u}_K = 0\ ,\ \hat{\omega}_K = K\wedge\hat{u}_K\ ,\ |\hat{\omega}_K| = |K||\hat{u}_K|)$

Abbiamo quindi in $\mathbb{T}^2$

$$\sum_K |K|^2|\hat{u}_K|^2 \le C < +\infty \quad \forall t \quad \text{se} \quad \int\omega_0^2 < +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$|K||\hat{u}_K| \le C < +\infty$$

è suff per innescare il bootstrap di regolarità? $1=\alpha \not> d-1 = 1$ NO

Torniamo a stimare Γ_K

$$|\Gamma_K| \le \sum_{\substack{h\neq 0\\ h\neq K}} |\hat{u}_{K-h}||h||\hat{u}_h| \le \sum_h |K-h||\hat{u}_{K-h}||h||\hat{u}_h| \le \sum_h |h|^2|\hat{u}_h|^2 \le C < +\infty$$

(in gen $|\Gamma_K| \le c|K|$)

Allora

$$|\hat{u}_K(t)| \le e^{-\nu K^2 t}|\hat{u}_K(0)| + \int_0^t ds\, e^{-\nu K^2(t-s)}|\Gamma_K|$$

$$\le \frac{C}{\sqrt{\nu t}}\frac{1}{|K|^2} + C\frac{1}{\nu|K|^2}\left(1 - e^{-\nu K^2 t}\right)$$

$\Rightarrow$ sapendo che $\sum|K|^2|\hat{u}_K(0)|^2 < +\infty$ troviamo che

$$|\hat{u}_K(t)| \le \frac{1}{|K|^2}\left(C + \frac{C}{\sqrt{t}}\right)$$

Ora inneschiamo l'autoregolarizzazione

$$|K|^2|\hat{u}_K| \le C < +\infty \quad \forall t>0$$

$$\alpha = 2 > d-1 = 1 \Rightarrow u\in C^\infty \text{ per } t>0$$

TEO (UNICITÀ IN DIM 2)

(i) Se per $\bar{\alpha} > 3$

$$|K|^{\bar\alpha}|\hat{u}_K(0)| \le c < +\infty$$

$\Rightarrow$ la sol è unica

DIM

a. Per autoregolarizz $|K|^{\bar\alpha}|\hat{u}_K(t)| \le C < +\infty \quad \forall t\in[0,+\infty[$

b. $|K|^\alpha |\hat{U}_K| \leq C$ per $\alpha > 3 \Rightarrow \|\nabla u\|_\infty \leq C < +\infty$

($\|\nabla u\|_\infty \leq \sum |K| |\hat{U}_K|$)

c. (Vedi unicità Eulero in dim 3)

$\frac{d}{dt} \|u-v\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_\infty \|u-v\|_2^2$ dove u, v sono 2 sol

d. Usando b., Gronwall e usando a. $\Rightarrow$ u è cont in t risp ad L^2 in x

Otteniamo unicità

(N.B. $\sum |K|^\alpha |\hat{U}_K| \leq C \Rightarrow \sum |\hat{U}_K|^2$ è assolutam conv

$\Rightarrow$ essendo $\hat{U}_K(t)$ cont in t lo sono anche le $\sum_K$) #

(ii) Se $\int \omega_0^2 < +\infty$

$\Rightarrow \exists!$ sol di N-S in $\mathbb{T}^2$

OSS

1. La sol debole esiste se $u_0 \in L^2$

Abbiamo usato che

$\int u^2$ decresce $\Rightarrow \int_0^t ds \sum |K|^2 |\hat{U}_K|^2 < +\infty$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\int_0^t ds \int \omega^2(x,s)\, dx \Rightarrow \int \omega^2(x,t)$ è finito q.o. in t

In particolare $\exists\, t_K \to 0$ t.c.

$\int \omega^2(x, t_K)\, dx < +\infty$

Usando il teo di regolarizz in dim 2 scopriamo che $u(x,t) \in C^\infty$ per $t > 0$

Non sappiamo se c'è unicità

DIM

EX

Nelle hp di (ii)

$u(t) \to u(0)$ in L^2

per $t \to 0$

$\|\nabla u\|_\infty \leq C/t$ non va bene ... servirebbe $\leq C/t^\beta$ $\beta < 1$

Come si fa? Boh! Se qualcuno ci riesce, ha passato l'esame.

Mostriamo che se

$\int \omega_0^2 < +\infty$

$\Rightarrow u(t) \to u(0)$ in L^2

$\hat{U}_K(t) = e^{-\nu K^2 t}\, \hat{U}_K(0) + \int_0^t ds\, e^{-\nu K^2 (t-s)}\, \Gamma_K$

$\Rightarrow |\hat{U}_K(t) - e^{-\nu K^2 t}\, \hat{U}_K(0)| \leq \int_0^t ds\, e^{-\nu K^2 (t-s)}\, |\Gamma_K| \leq \frac{C}{K^2}$

(abbiamo usato $\int \omega^2 < +\infty$ come nel teo di regolarizz in dim. 2)

Stimiamo

$$\sum_K |\hat{u}_K(0) - e^{-\nu K^2 t}\, \hat{u}_K(0)|$$

Poiché

$$|\hat{u}_K(0)(1 - e^{-\nu K^2 t})| \leq |\hat{u}_K(0)|$$

e

$$\sum_K |\hat{u}_K(0)|^2 < +\infty$$

abbiamo

$$\lim_{t\to 0} \sum_K |\hat{u}_K(0) - e^{-\nu K^2 t}\, \hat{u}_K(0)|^2 = 0 \quad \text{per conv dominata}$$

Allora

$$\left(\sum_K |\hat{u}_K(t) - \hat{u}_K(0)|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \Big(\underbrace{\sum_K |\hat{u}_K(t) - e^{-\nu K^2 t}\, \hat{u}_K(0)|^2\Big)^{1/2}}_{\downarrow \text{ conv dominata } (*)\ \ 0} + \Big(\underbrace{\sum_K |\hat{u}_K(0) - e^{-\nu K^2 t}\, \hat{u}_K(0)|^2\Big)^{1/2}}_{\downarrow \text{ conv dominata}\ \ 0}$$

$(*)$ $|\hat{u}_K(t) - e^{-\nu K^2 t}\, \hat{u}_K(0)| \leq \dfrac{C}{K^2}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \sum_K |\hat{u}_K(t) - \hat{u}_K(0)\, e^{-\nu K^2 t}|^2 = 0 \quad \text{per conv dominata}$$

infatti $\sum \frac{1}{|K|^4} < +\infty$

$|\hat{u}_K(0) - e^{-\nu K^2 t}\, \hat{u}_K(0)| \leq |\hat{u}_K(0)|$ che è quadrato-sommabile

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \sum_K |\hat{u}_K(0) - e^{-\nu K^2 t}\, \hat{u}_K(0)|^2 = 0 \quad \text{per conv dominata}$$

Insieme

$$\lim_{t\to 0} \|u(t) - u(0)\|_2 = 0$$

.... #

TEO

Anche in dim. 3

se $\int \omega^2 < +\infty \Rightarrow u \in C^\infty$

(N.B. Anche se $\int \omega_0^2 < +\infty$, non sappiamo che $\int \omega^2 < +\infty$!)

DIM

Come per $d=2$ proviamo che $|\Gamma_K| \leq C$

otteniamo $|\hat{u}_K(t)| \leq \left(\frac{C}{\sqrt{t}} + C\right)\frac{1}{|K|^2}$

Ma la potenza 2 non innesca l'autoregolarizzazione

Serve un'ulteriore stima di Γ_K:

$$|\Gamma_K| \leq \sum_h |\hat{U}_{K-h}|\,|h|\,|\hat{U}_h| = \sum_h |K-h|\,|\hat{U}_{K-h}|\,|h|^2\,|\hat{U}_h|\,\frac{1}{|K-h|}\,\frac{1}{|h|} \leq$$

$|h|^2\,|\hat{U}_h| \leq C(t)$

$$\leq C \sum_h |K-h|\,|\hat{U}_{K-h}|\,\frac{1}{|K-h|}\,\frac{1}{|h|}$$

$$\leq C\left(\int \omega^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{h\neq 0\\ h\neq K}} \frac{1}{|K-h|^2}\,\frac{1}{|h|^2}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C\left(\frac{1}{|K|^{2\cdot 2-3}}\right)^{1/2} = \frac{C}{|K|^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^t ds\; e^{-\nu K^2 (t-s)}\,|\Gamma_K| \leq \frac{C}{|K|^{2+1/2}}$$

$2+\frac{1}{2} > d-1 = 2 \Rightarrow$ innneschiamo reg $\Rightarrow u \in C^\infty$ #

ALTRE SOL DEBOLI

(Abbiamo ottenuto le sol deb troncando i modi di Fourier)

- Proiez eq su sottosp finito-dim
- $\partial_t u + u_\lambda \cdot \nabla u = -\nabla p + \nu \Delta u$ regol alla Leray

  regolarizzata di u

  $u_\lambda \in C^\infty$ $\quad u_\lambda \to u$

Passando al lim $\lambda \to 0$ otteniamo sol deb per NS

TEO (CAFFARELLI - KOHN - NIRENBERG)

Dim in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ delle singolarità delle sol è 1

http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/fluidi

(1) $\int_0^d \int \omega^2 < +\infty \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ [illegible] q.o. in t $\Rightarrow$ sing. in tempo ha misura 0 (?)

a Leray.

(2) Leray C.K.N. $S \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ punti singolari

$\mu_1(S) = 0$.

$\mathbb{R}^2$: EULERO VS NAVIER-STOKES

EX

Su $\mathbb{T}^2$

(i) In Fourier rifare teoria dell' esistenza e unicità per Eulero in H_m per m opportuno per tempi piccoli.
(mimate la teoria in $\mathbb{T}^3$)

(ii) Idem per Navier-Stokes

(iii) Se $\underline{u}^\nu$ è sol di NS e $\underline{u}$ è sol di Eulero con lo stesso dato iniz, allora

$$\underline{u}^\nu \to \underline{u} \quad \text{in } L^2 \quad \text{se } \nu \to 0$$

[In sostanza

$$\|\nabla \underline{u}^\nu\|_\infty \leq C$$

uniformemente nella viscosità ν]

N.B. Non lo possiamo fare (così) per le sol deboli di NS perchè le stime di regolarità divergono per $\nu \to 0$

AFF

Se ν è piccolo le sol di NS sono vicine alle sol di Eulero.

SPECIFICHIAMO MEGLIO LA PICCOLEZZA DI ν: RISPETTO A COSA?

Scriviamo la VERSIONE ADIMENSIONALE dell' equazione:

$\frac{x}{L}$ è adimensionale

L è la scala delle lunghezze

Sia T la scala dei tempi

Sia U la scala delle velocità

per es. $U = O(\|u_0\|_\infty)$

Rapporto tra T, U, L

Vogliamo $U = L/T$

(Sui tempi di ordine T le particelle di fluido percorrono distanze di ordine L, dunque la velocità è L/T)

Sia

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{u}{U}(Lx, Tt)$$

x, t adim

(riscaliamo la sol)

Calcoliamo le derivate

$$\partial_t \tilde{u}(x,t) = T \frac{\partial_t u}{U}(Lx, Tt) = \frac{T^2}{L} \partial_t u$$

$$\nabla \tilde{u}(x,t) = L \frac{\nabla u}{U}(Lx, Tt) = T \nabla u$$

$$\Delta \tilde{u}(x,t) = L^2 \frac{\Delta u}{U}(Lx, Tt) = LT \Delta u$$

Dunque

$$\partial_t \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} =$$

$$= \frac{T^2}{L} \partial_t u + \frac{T^2}{L} u \cdot \nabla u = \frac{T^2}{L} (\partial_t u + u \cdot \nabla u) =$$

$$= \underbrace{\frac{T^2}{L}(-\nabla p)}_{= -\nabla \tilde{p}} + \nu \frac{T^2}{L} \Delta u = -\nabla \tilde{p} + \frac{\nu T}{L^2} \Delta \tilde{u}$$

Quindi l'eq riscalata è

$$\partial_t \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} = -\nabla \tilde{p} + \underbrace{\left(\frac{\nu T}{L^2}\right)}_{= \frac{1}{R}} \Delta \tilde{u}$$

R NUMERO DI RAYNOLDS ← parametro "giusto"

Dunque l'aff giusta non è ν piccolo, ma R grande

<u>N.B.</u> Se $u(x,t)$ risolve NS per viscosità ν

$\Longrightarrow \tilde{u} = \frac{T}{L} u(Lx, Tt)$ risolve NS con viscosità $\frac{\nu T}{L^2}$

R piccolo $\rightsquigarrow$ NS

R molto grande ($\sim 10\,000$) $\rightsquigarrow$ Eulero

<u>OSS</u>

In domini con bordo NS è "ABBASTANZA" diversa da Eulero:

NS <u>richiede</u> come cdz al contorno

$\underline{u}|_{\partial D} = 0$

(il fluido BAGNA la parete)

mentre per Eulero

$\underline{u} \cdot \underline{n}|_{\partial D} = 0$

(il fluido NON BAGNA la parete)

<u>ES</u>

Bicchiere che ruota:

fluido che segue NS comincia a ruotare

fluido che segue Eulero rimane fermo

<u>ES</u>

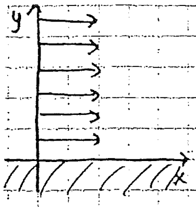
Semipiano $y > 0$

per NS ed Eulero

con dato iniz

$$u(x,y,0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con u_0 cost



(N.B. Fluido LAMINARE:

$$u(x,y,t) = \begin{pmatrix} u(y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

è stazionario anche se $\omega \neq 0$)

SOL EULERO:

$$\underline{u}(x,y,t) = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SOL NS:

Poichè c'è invarianza per trasl del dato iniz (e anche dell'eq)

$\Rightarrow$ sol invariante

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_x u_1 = \partial_x u_2 = 0$$

$$\partial_x u_1 + \partial_y u_2 = 0 \quad \text{(div nulla)}$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_y u_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_2 \equiv 0$$

Cerchiamo sol nella forma

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1(y,t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\partial_t u_1(y,t) + \underbrace{(u_1 \partial_x + \underbrace{u_2 \partial_y}_{=0}) u_1}_{=0} = -\underbrace{\partial_x p}_{=0} + \nu \Delta u_1$$

potremmo porre $-\partial_x p = c$
Eulero: $\partial_t u = c \Rightarrow u = u_0 + ct$ è sol (EX)
vero ma stiamo modificando
$\lim_{y \to +\infty} u(y) = u_0$ (NO!)

$u_2 = 0$

e quindi

$$\partial_t u_1 = \nu \Delta u_1$$

Poniamo

$$u_1(y,t) = u(y,t)$$

Allora u risolve

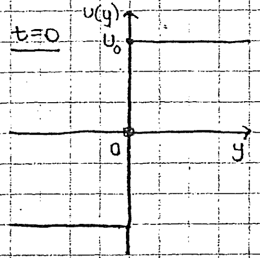
$$\begin{cases} \partial_t u = \nu \Delta u & y>0 \\ u(0,t) = 0 & \text{cond al bordo} \\ u(y,0) = u_0 & \text{dato iniz} \end{cases}$$

EX

Se $u(x,t)$ risolve Eulero

$\Rightarrow u(x,t) + \underline{c}t$ risolve

Risolviamo il pb:



Prolunghiamo a $y<0$ per disparità ed evolviamo senza contorno per $y \in \mathbb{R}$

La sol sarà dispari $\forall t$

$\Rightarrow u(0,t) = 0 \quad \forall t>0$

La sol è

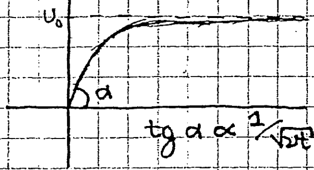
$$u(y,t) = \int dz \, \frac{e^{-\frac{(y-z)^2}{4t\nu}}}{\sqrt{4\pi\nu t}} \, u_0(z)$$

$$u_0(z) = \begin{cases} u_0 & z>0 \\ -u_0 & z<0 \end{cases}$$

Alla fine

$y>0$

$$u(y,t) = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-z^2} \, dz$$



$\operatorname{tg} \alpha \propto 1/\sqrt{\nu t}$ ← al crescere del tempo la vel si schiaccia

e ovviamente si ha

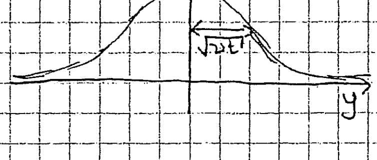
$$\lim_{y \to +\infty} u(y,t) = u_0$$

Cambiamo punto di vista:

VORTICITÀ:

$$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = -\partial_y u$$

$$= -\frac{2u_0}{\sqrt{4\pi\nu t}} e^{-y^2/4\nu t}$$



Che eq risolve ω?

$$\partial_t \omega = \nu \partial_y^2 \omega$$

Con quale dato iniziale?

$\lim_{t \to 0} \omega(y,t) = 0 \quad \forall y \neq 0$

$\lim_{t \to 0} \omega(0,t) = -\infty$

OSS

$$\lim_{t\to 0} \int f(y) \underbrace{\frac{e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}}{\sqrt{4\pi\nu t}}} = f(0)$$

δ-approssimante

int di questa f^{ne} è sempre 1
$\Rightarrow$ curva è t.c. conservi massa tot 1

Dunque

$\omega_0(y) = -2u_0\, \delta(y)$

N.B. $\frac{e^{-}}{\sqrt{}}$ è il nucleo che risolve

$$\begin{cases} \partial_t f = \nu \Delta f \\ f|_{t=0} = \delta \end{cases}$$

OSS

$$u_0(z) = \begin{cases} u_0 & z>0 \\ -u_0 & z<0 \end{cases}$$

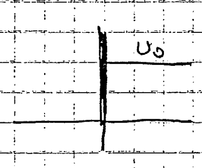
$\Rightarrow \partial_z u_0 = 0 \quad z \neq 0$

e il salto dà luogo alla δ

$\partial_z u_0 = 2u_0\, \delta(y)$ nel senso delle distribuz

$\int f\, \partial_z u_0 = -\int \partial_z f\, u_0 = -2u_0 f(0)$

OSS



Per $y>0$, $\omega_0>0$

Per Eulero, $\forall t>0 \quad \omega=0$

Per NS $\omega(y,t)>0$

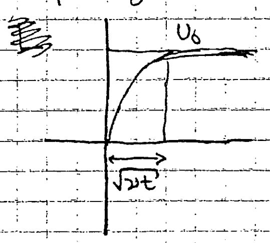
La cdz al bordo $\underline{u}=0$ genera vorticità che $\nu\Delta$ diffonde nel fluido

$$\omega = \frac{-2u_0}{\sqrt{4\pi\nu t}}\, e^{-y^2/4\nu t}$$

In che regione "vediamo" la vorticità?

Per y t.c. $y^2/4\nu t = O(1) \Rightarrow |y| \lesssim \sqrt{\nu t}$

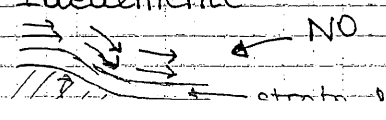
Dopo $y \gg \sqrt{\nu t}$ il flusso è laminare



La zona $y < \sqrt{\nu t}$ è detta STRATO LIMITE

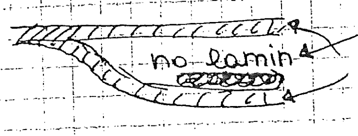
OSS

Idealmente

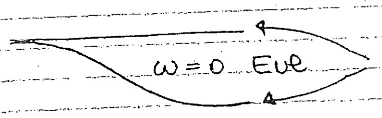


strato laminare (ampiezza ~ $\sqrt{\nu t}$)

In realtà c'è un DISTACCO DELLO STRATO LAMINARE



Possiamo provare a immaginare ω concentrata su una linea



$\Rightarrow$ eq per VORTEX SHEET che però

(i) ben posto solo in sp analitici

(ii) sviluppa singolarità in tempo finito

Idea:

se $\omega_0 = \delta(y - \varphi(x))\, \eta(x)$

Risolviamo NS per dati iniz singolari

C'è unicità? Forse NO

EULERO (NAVIER-STOKES) PER ALCUNI DATI INIZIALI SINGOLARI. LINEE DI VORTICITÀ E VORTICI

DEFINIZIONI E FATTI

① massa / densità

A regione

$m(A) = \int_A \rho(x)\, dx$

② MISURA

$\mu : A \mapsto \mu(A)$

$A \subset \Omega$

- $A \in \Sigma$ σ-algebra:
  - Σ è chiuso per intersezione, unione, complementazione finite
  - per unioni numerabili
- $A = \bigcup A_i$ $A_i \cap A_j = \emptyset$

$\Rightarrow \mu(A) = \sum \mu(A_i)$ σ-additività di μ

UNA MISURA NON HA NECESSARIAMENTE DENSITÀ

PROTOTIPO DI MISURA CHE NON HA UNA DENSITÀ: LA δ DI DIRAC

$\mu(dx) = \delta(x)\, dx$

La δ in 0 è la misura seguente:

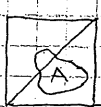
A aperto

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \notin A \\ 1 & \text{se } 0 \in A \end{cases}$$

usiamo la notazione ← stiamo barando!

$$\int_A \delta(x)\, dx = \begin{cases} 0 & 0 \notin A \\ 1 & 0 \in A \end{cases}$$

ESEMPIO



A aperto

$\mu(A) =$ lunghezza del segm di diag incluso in A

$\mu(A) = \int_A \sqrt{2}\ \delta(x-y)\, dx\, dy$

Data μ ha senso integrare funzioni continue risp a μ

ES

Se μ ammette densità

$\mu(A) = \int_A \rho(x)\, dx$

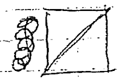
$\int f(x)\, \mu(dx) = \int f(x)\, \rho(x)\, dx$

E se μ non ha densità?

ES

$$\int f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0)$$

ES



$$\int f(x,y)\, \mu(dx, dy) = \sqrt{2} \int f(x,x)\, dx$$

③ La relaz tra misure e integrali di funz cont è "strettissima"

TEO

Sia Ω cpt, $C(\Omega)$ lo sp delle funz cont su Ω con la norma del sup. Allora lo sp duale di $C(\Omega)$ è lo sp delle misure

Cioè? Elem del duale sono

$F : C(\Omega) \to \mathbb{R}$ lin e cont

ES 1

$$F(f) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x)\, dx \implies \mu = \frac{dx}{|\Omega|}$$

ES 2

$$F(f) = f(x_0) \implies \mu = \delta(x - x_0)\, dx$$

TEO DI RAPPR DI RIESZ

Dato F $\exists$ misura μ t.c.

$$F(f) = \int f(x)\, \mu(dx)$$

④ μ è assolutam cont risp a Lebesgue se

$$|A| = 0 \implies \mu(A) = 0$$

TEO

Se μ è a.c. $\implies$ esiste la densità:

$$\int_A \mu(dx) = \int_A \rho(x)\, dx$$

DEF

μ è singolare se il suo supporto ha mis di Lebesgue nulla

ES 1

$\delta(x - x_0)$ dà massa ad un pto $\implies$ singolare

ES 2

Sia $\varphi(x)$ regolare

$\eta(x)\, \delta(x - \varphi(x))\, dx\, dy$

è SINGOLARE perchè dà massa ad una linea

OSS Nel nostro contesto

massa sui pti $\implies$ VORTICI

... sulle linee $\implies$ LINEE DI VORTICITÀ

Vogliamo considerare ω_0 misura, invece che funzione L^∞

Perchè è una domanda interessante?

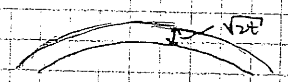
- nel caso regolare $\omega(x,t)$ è conservata

PUÒ FUNZIONARE ANCHE PER LE MISURE (in linea di principio)

- $u = K * \omega$ LINEARE in ω

(se vogliamo indebolire le hp, ha senso farlo su ω)

- CI SONO SITUAZIONI "SPERIMENTALI" IN CUI ω È UNA MISURA
  - DISTACCO DELLO STRATO LIMITE



qui siamo nel caso di ω funz, ma poichè strato $\sim \sqrt{\nu t}$, se ν è piccolo forse ha senso evolverelo come linea di vorticità

  - ROTTURA DELLO STRATO IN VORTICI

VORTICE

$\omega_0(d\underline{x}) = \alpha\, \delta(\underline{x} - \underline{x}_0)\, d\underline{x}$

$\alpha \in \mathbb{R}$ carico del vortice

ESISTE IL CAMPO DI VORTICITÀ GENERATO DA ω?

$K(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\underline{x}^\perp}{|\underline{x}|^2}$

$$\underline{u}(\underline{x}) = (\underline{K} * \omega)(\underline{x})$$
$$= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{(\underline{x}-\underline{y})^\perp}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}\, \alpha\, \delta(\underline{x}-\underline{x}_0)\, dy$$
$$= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^\perp}{|\underline{x}-\underline{x}_0|^2}$$

- IL CAMPO ESISTE
- DIVERGE IN $\underline{x}_0$, CHE È PROPRIO IL PUNTO IN CUI È CONCENTRATA ω_0
- COME SI SPOSTA (EVOLVE) LA SINGOLARITÀ (SECONDO QUESTO CAMPO)?

L'UNICA SCELTA RAGIONEVOLE È CHE LA SINGOLARITÀ SIA FERMA

(il campo intorno a $\underline{x}_0$ è divergente ma $\perp$ a ogni direz uscente, non c'è motivo che la singolarità si muova)

$\omega_0(dx) = (\alpha_1\, \delta(\underline{x}-\underline{x}_1) + \alpha_2\, \delta(\underline{x}-\underline{x}_2))\, d\underline{x}$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Campo:

$$\underline{u}(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi}\left(\alpha_1 \frac{(\underline{x}-\underline{x}_1)^\perp}{|\underline{x}-\underline{x}_1|^2} + \alpha_2 \frac{(\underline{x}-\underline{x}_2)^\perp}{|\underline{x}-\underline{x}_2|^2}\right)$$

COME SI SPOSTANO LE SINGOLARITÀ NEL TEMPO?

$\underline{x}_1(t)$ e $\underline{x}_2(t)$ CHE FANNO?

Si muovono solo per effetto del campo generato dall'altro

$$\frac{d}{dt}\underline{x}_1(t) = -\frac{\alpha_2}{2\pi} \frac{(\underline{x}_1-\underline{x}_2)^\perp}{|\underline{x}_1-\underline{x}_2|^2}$$

$$\frac{d}{dt}\underline{x}_2(t) = -\frac{\alpha_1}{2\pi} \frac{(\underline{x}_2-\underline{x}_1)^\perp}{|\underline{x}_2-\underline{x}_1|^2}$$

A questo punto è immediato GENERALIZZARE:
la dinamica di N vortici di cariche $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ è data da

$$\dot{\underline{x}}_i = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i} \alpha_j \frac{(\underline{x}_i - \underline{x}_j)^\perp}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|^2} \qquad \text{O.D.E.}$$

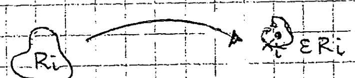
PB

Abbiamo fatto la scelta giusta?
Si pone cioè la questione della VALIDITÀ
Procedura standard: CONFRONTARE SOLUZIONI
Sia

$$\omega_0(x) = \sum \alpha_i \frac{1}{\varepsilon^2} \chi\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon} \in R_i\right)$$

$$\chi\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon} \in R_i\right) \equiv \chi(x \in x_i + \varepsilon R_i)$$

$$|R_i| = 1$$



Evolviamo con Eulero:

$$\omega(x,t) = \sum \frac{\alpha_i}{\varepsilon^2} \chi\left(x \in S_i^\varepsilon(t)\right)$$

dove
$\lim_{\varepsilon \to 0} S_i^\varepsilon(t)$ si concentra intorno al pto $\underline{x}_i(t)$ che risolve l'eq per i vortici

N.B. $\omega_0^\varepsilon(x)\, dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \sum \alpha_i\, \delta(x - x_i)$

Tesi:

$$\omega^\varepsilon(x,t) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \sum \alpha_i\, \delta(\underline{x} - x_i(t))$$

dove $x_1(t), \dots, x_N(t)$ risolvono l'eq per i vortici

VORTICI	EULERO CON $\omega_0 \in L^\infty$
DATO INIZIALE	APPROSSIMAZ REGOLARE
↓ EVOL VORTICI	↓ EVOL EULERO
SOL AL TEMPO t	APPROSSIMAZ AL TEMPO t

Validità se l'evol dell'approx è un'approx dell'evol

OSS

Potremmo voler fare lo stesso cosa con NS:

VORTICI		NS
DATO INIZ	⟷	DATO INIZ
↓ EVOL		↓ EVOLVIAMO CON NS
SOL AL TEMPO t	$\xleftarrow{\nu \to 0}$	SOL NS

Si può fare?

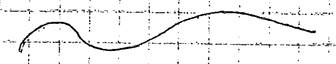
La risposta è SI

PERÒ

se ν piccolo e vortici ≥ 2,
non si sa provare l'unicità per NS con questo dato iniz

LINEA DI VORTICITÀ

$$\omega_0(d\underline{x}) = \eta_0(\underline{x})\, \delta(y - \varphi_0(\underline{x}))\, dx\, dy$$



$y = \varphi_0(x)$

$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{K} * \omega$

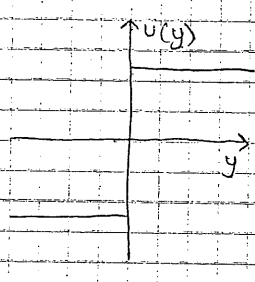
È DISCONTINUO LUNGO LA CURVA

ES

$$\omega_0(dx, dy) = -2u_0\, \delta(y)\, dx\, dy$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(y) = \begin{cases} u_0 & y > 0 \\ -u_0 & y < 0 \end{cases}$$



SI POSSONO SCRIVERE LE EQUAZIONI PER ω

- SONO VALIDE MA SOLO PER REGOLARIZZAZIONI ANALITICHE
- (LE EQ HANNO SENSO SOLO PER DATI ANALITICI)
- PER $\nu > 0$ NESSUNO SA NULLA

(cosa succede quando $\nu > 0$, $\nu \to 0$???)