CENNI SUL CASO TRIDIMENSIONALE

Vogliamo ricavare delle EQUAZIONI PER $\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{u}$

Abbiamo

$$\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p$$

$$\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = \underline{\omega} \wedge \underline{u} + \nabla \frac{u^2}{2}$$

Facciamo il rotore della prima identità. Vale

$$\nabla \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{u}) = \underbrace{(\nabla \cdot \underline{u})}_{=0} \underline{\omega} - \underbrace{(\nabla \cdot \underline{\omega})}_{=0} \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{\omega} - (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u} =$$

$$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$$

$$= (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{\omega} - (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u}$$

e si ha

$$((\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u})_i = \omega_j \, \partial_j u_i = \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{x}} \underline{\omega}\right]_i$$

Dunque

$$\partial_t \underline{\omega} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{\omega} = \left(\frac{\partial u}{\partial \underline{x}}\right) \underline{\omega}$$

cioè

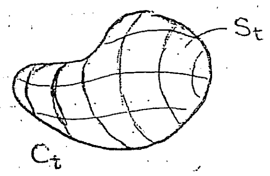
$$\frac{d}{dt} \underline{\omega}(\Phi_t(\underline{x}), t) = \left.\frac{\partial u}{\partial \underline{x}}\right|_{\Phi_t(\underline{x}), t} \underline{\omega}(\Phi_t(\underline{x}), t)$$

$$\underline{\omega}(\Phi_t(\underline{x}), t) = e^{\int_0^t ds \, \frac{\partial u}{\partial x}(\Phi_s(\underline{x}), s)} \underline{\omega}_0(\underline{x})$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) = e^{\int_0^t ds \, \frac{\partial u}{\partial x}(\Phi_s(\underline{x}), s)}$$

$$\underline{\omega}(\Phi_t(\underline{x}), t) = \frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) \, \underline{\omega}_0(\underline{x})$$

OSSERVAZIONE

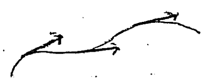


TEOREMA DI KELVIN:

$$\oint_{C_t} \underline{u} \cdot d\underline{s} = \int_{S_t} \underline{\omega} \cdot \underline{n} \, \sigma(d\underline{x}) \quad \text{è COSTANTE}$$

DEFINIZIONE

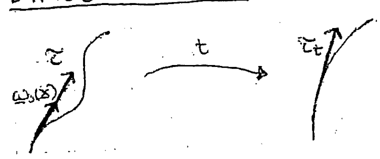
LINEA DI VORTICITÀ è ogni curva tangente a $\underline{\omega}$



PROPOSIZIONE

Il flusso mappa linee di vorticità in linee di vorticità

DIMOSTRAZIONE



$$\underline{\omega}(\Phi_t(\underline{x}), t) = \frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}} \underline{\omega}_0(\underline{x})$$

Se $\gamma(s)$ è una parametrizzazione al tempo $t=0$

$\Rightarrow \Phi_t(\gamma(s))$ è una parametrizzazione al tempo t

$$\frac{d}{ds}\Phi_t(\gamma(s)) = \frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}} \underbrace{\frac{d}{ds}\gamma(s)}_{\underline{\tau}} = \underline{\tau}_t$$

ovvero $\frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}}$ mappa vettori tangenti al tempo $t=0$ in vettori tangenti al tempo t

$$\underline{\omega}_0(\underline{x}) \,//\, \underline{\tau}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \underline{a} \qquad \underline{a}\cdot\underline{\omega}_0(\underline{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{a}\cdot\underline{\tau} = 0$$

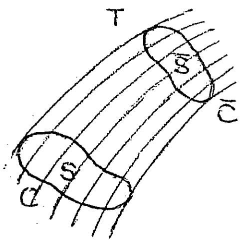
$$\underline{a}\cdot\underline{\omega}(\Phi_t(\underline{x}),t) = \underline{a}\cdot\frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}}\underline{\omega}_0 = \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}}\right)^t \underline{a}\cdot\underline{\omega}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}}\right)^t \underline{a}\cdot\underline{\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{a}\cdot\frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}}\underline{\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\omega}(\Phi_t(\underline{x}),t) \,//\, \underline{\tau}_{t_0} \quad \#$$

DEFINIZIONE

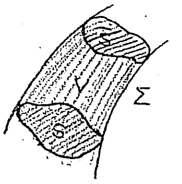


Sia C una curva chiusa NON tangente a $\underline{\omega}$ in alcun punto

$\Phi_t(T)$ è un TUBO DI VORTICITÀ

OSSERVAZIONE

$$\int_S \underline{\omega}\cdot\underline{u}\;\sigma(d\underline{x}) \overset{?}{=} \int_{\tilde{S}} \underline{\omega}\cdot\underline{u}\;\sigma(d\underline{x})$$



$$\oint_\Sigma \underline{\omega}\cdot\underline{u}\;\sigma(d\underline{x}) = -\int_S \underline{\omega}\cdot\underline{u} + \int_{\tilde{S}} \underline{\omega}\cdot\underline{u} + 0$$ contributo tangente

$$\oint_\Sigma \underline{\omega}\cdot\underline{u}\;\sigma(d\underline{x}) = \int_V \operatorname{div}\underline{\omega} = 0$$

V: dominio racchiuso da Σ

TEOREMA (ESISTENZA LOCALE)

Dato $T>0$

esiste $C(T)>0$ (sufficientemente piccola) tale che se

$\|u_0\| \leq C(T)$

norma Sobolev

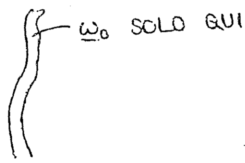
esiste unica $u(t)$ fino a $t<T$

OSSERVAZIONE

- NON C'È TEOREMA DI ESISTENZA GLOBALE
- NON CI SONO CONTROESEMPI ALL'ESISTENZA GLOBALE

(Motivo: fluidi in $\mathbb{R}^3$ esibiscono TURBOLENZA)

"ESEMPIO"



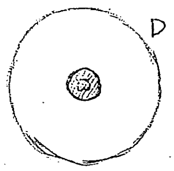
Consideriamo una vorticità iniziale concentrata solo in un tubo

Per far divergere $\underline{\omega}$ dobbiamo stringere il tubo

MA questo viola la conservazione dell'energia

(Esercizio: Fare un esempio in $\mathbb{R}^2$)

ESERCIZIO

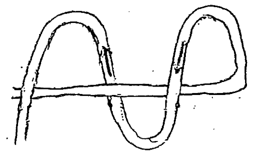


Calcolare l'energia

$D = \{|x| \leq R\}$

$\underline{\omega} = \frac{1}{r^2}\chi(|x|<r)$

SEMBRA ACCADERE che si possano creare anse



In questo caso la conservazione dell'energia non sarebbe violata perché i contributi sulle varie anse si cancellano

LIMITI MODELLISTICI DELLE EQUAZIONI DI EULERO

$\mathbb{R}^2$ TEOREMA DI KUTTA - JUKOWSKI

$\mathbb{R}^3$ PARADOSSO DI D'ALEMBERT

$\lim_{|x| \to +\infty} \underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}_\infty$ costante fissata

$\underline{u}$ è potenziale ($\Rightarrow$ stazionaria)

OSTACOLO OMOTOPO
AL CERCHIO IN $\mathbb{R}^2$
ALLA SFERA IN $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$:

$\xrightarrow{u_\infty}$ $\downarrow \underline{\nu}$

$$\int_{\partial\Lambda} p \cdot \underline{n} \; \sigma(d\underline{x}) = - |\underline{u}_\infty| \, T \, \underline{\nu}$$

dove

$$T = \oint_{\partial\Lambda} \underline{u} \cdot d\sigma$$

$\mathbb{R}^3$:

$$\int_{\partial\Lambda} p \cdot \underline{n} \; \sigma(d\underline{x}) = 0$$

OSSERVAZIONE

Il problema è che Eulero è IRREALISTICO al BORDO

Al BORDO si crea VORTICITÀ (osservazione)

MA il fluido al bordo è FERMO (per Eulero).

$\rightsquigarrow$ NAVIER - STOKES

MECCANICA DEI FLUIDI 2
PROF. D. BENEDETTO
RICEVIMENTO
LOCALI EX-FALEGNAMERIA

ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE IN TEMPO PER EULERO IN 3 DIMENSIONI

Perchè occuparsene?

- è interessante in sè ← ci dice che non sappiamo fare di più
- metodo dell'energia
- troncamenti di Faedo-Galerkin
- spazi di Sobolev

PROGRAMMA

1. Generalità
2. Spazi
3. Stime a priori (metodo dell'energia)
4. Costruzione delle soluzioni
5. Unicità

1. GENERALITÀ

Studiamo il problema

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \partial_t u + u\cdot\nabla u = -\nabla p \end{cases}$$

in 3 dimensioni

Guardiamo un momento alla PRESSIONE, che può essere interpretata come un moltiplicatore di Lagrange: p deve essere esprimibile in funzione di u in modo da ottenere un'equazione chiusa in u

A tale scopo, applichiamo l'operatore divergenza alla seconda equazione e otteniamo

$$\underbrace{\operatorname{div}(\partial_t u + u\cdot\nabla u)}_{\substack{\| \\ \operatorname{div}(u\cdot\nabla u)}} = \underbrace{-\operatorname{div}(\nabla p)}_{\substack{\| \\ -\Delta p}}$$

Quali condizioni al contorno dobbiamo mettere? Le più ragionevoli sono quelle di NEUMANN:

$$n\cdot((u\cdot\nabla)u) = -\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\partial D}$$

cioè la pressione soddisfa il PROBLEMA ELLITTICO

$$\begin{cases} \operatorname{div}((u\cdot\nabla)u) = -\Delta p \\ n\cdot((u\cdot\nabla)u) = -\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\partial D} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

p è una funzione NON LOCALE di u
(perchè la condizione di divergenza nulla è una condizione globale)

D'ora in poi mettiamoci in CONDIZIONI PERIODICHE, cioè scegliamo come dominio il TORO TRIDIMENSIONALE:

$$D = \mathbb{T}^3 = [-\pi, \pi]^3$$

OSSERVAZIONE

Notiamo che

$$\partial_t u = \underbrace{-(u \cdot \nabla)u - \nabla \Delta^{-1} (\mathrm{div}((u \cdot \nabla)u))}_{\sim\, u^2}$$

Dunque l'andamento rispetto al tempo della u è del tipo

$$\partial_t u = u^2$$

"SPERIAMO" di trovare una norma opportuna tale che

$$\frac{d}{dt} \|u\| \leq c \|u\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|u(t)\| \leq \frac{\|u_0\|}{1 - ct \|u_0\|}$$

Se ci riusciamo, scopriamo che

$\|u(t)\|$ è limitata fino a $T = \dfrac{1}{c \|u_0\|}$

2. SPAZI

Per una qualunque funzione

$$f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{C}$$

possiamo definire

$$\hat{f}_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} dx \; f(x) \, e^{-ik\cdot x} \qquad \text{K-SIMO COEFFICIENTE DI FOURIER}$$

$$k = \underline{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$$

$$x = \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{T}^3$$

$$\underline{k} \cdot \underline{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$$

Se conosciamo i coefficienti di Fourier, possiamo ricostruire la f tramite la SERIE DI FOURIER

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \hat{f}_k \, e^{ik\cdot x}$$

$$\int f \bar{g} \, dx = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_k \hat{f}_k \, \bar{\hat{g}}_k$$

OSSERVAZIONE

Abbiamo

$$\int_{\mathbb{T}^3} f^2 = \underbrace{\|f\|_2^2}_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \int_{\mathbb{T}^3} dx \; f(x) \, \overline{f(x)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6} \sum_{k,h} \hat{f}_k \overline{\hat{f}_h} \underbrace{\int_{\mathbb{T}^3} dx \; e^{-ik\cdot x + ih\cdot x}}_{(2\pi)^3 \delta_{kh}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_k \hat{f}_k \overline{\hat{f}_k} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_k |\hat{f}_k|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \|\hat{f}\|^2_{2} \leftarrow \ell^2(\mathbb{Z}^3)$$

dove

$$\ell^2(\mathbb{Z}^3) = \left\{ \{\hat{f}_k\}_{k\in\mathbb{Z}^3} : \sum_k |\hat{f}_k|^2 < +\infty \right\}$$

CIOÈ:

la trasformata di Fourier è un' ISOMETRIA tra $L^2(\mathbb{T}^3)$ e $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$

$$\underbrace{\|f\|_2^2}_{\int f^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \underbrace{\|\hat{f}\|_2^2}_{\sum_k |\hat{f}_k|^2}$$

OSSERVAZIONE

Si ha

$$\widehat{(\nabla f)}_k = i k \hat{f}_k$$

CIOÈ:

la trasformata di Fourier scambia

OPERATORI DIFFERENZIALI $\longleftrightarrow$ OPERATORI DI MOLTIPLICAZIONE

DEFINIZIONE

Sia $m>0$.

Definiamo lo SPAZIO DI SOBOLEV H_m come lo spazio vettoriale

$$H_m = \left\{ f\in L^2 : \sum_k |k|^{2m} |\hat{f}_k|^2 < +\infty \right\}$$

dotato della norma definita da

$$|f|_m^2 = \sum_k |\hat{f}_k|^2 + \sum_k |k|^{2m} |\hat{f}_k|^2$$

ESEMPI

$H_0 \equiv L_2$

H_1:

$$\int f^2 < +\infty$$

$$\underbrace{\sum_k |k|^2 |\hat{f}_k|^2}_{\int |\nabla f|^2} < +\infty \Rightarrow f \text{ ha derivate deboli in } L_2$$

e dunque H_1 coincide con lo spazio di Sobolev definito classicamente come lo spazio delle funzioni $f\in L^2$ che ammettono gradiente debole appartenente a L^2

OSSERVAZIONE

USUALMENTE la NORMA è definita da

$$\int f^2 + \sum_i \int (\partial_i f)^2 + \sum_{i,j} \int (\partial_i \partial_j f)^2 + \cdots \quad \text{(fino alle derivate m-sime)}$$

cioè in Fourier

$$|\hat{f}_K|^2 + \sum_K |K|^2 |\hat{f}_K|^2 + \sum_K |K|^4 |\hat{f}_K|^2 + \cdots + \sum_K |K|^{2m} |\hat{f}_K|^2$$

Poichè se $0<n<m$ si ha $|K|^n \leq |K|^m$ $(|K|^n \leq (1+|K|)^m \ \forall K \in \mathbb{R})$, abbiamo che la norma $|\cdot|_m$ è EQUIVALENTE a $\sum_K (1+|K|^2+\cdots+|K|^{2m}) |\hat{f}_K|^2$

Poichè NON possiamo stimare 1 con $|K|^{2m}$, non possiamo eliminare il primo pezzo (cioè $\sum_K |\hat{f}_K|^2$), ma in realtà il pezzo che non possiamo stimare è solo quello per $K=(0,0,0)$, cioè

$$|\hat{f}_0|^2 = \int f^2$$

$$\left(\text{cioè } \int |\partial^\alpha f|^2 \leq C \int f^2 + C \sum_K |K|^{2m} |\hat{f}_K|^2 \right)$$

NOTAZIONE

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$

$\partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_3}^{\alpha_3} f(x_1, x_2, x_3)$

$K^\alpha = K_1^{\alpha_1} K_2^{\alpha_2} K_3^{\alpha_3}$

$|K| = (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)^{1/2}$

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

OSSERVAZIONE

$\forall \alpha$ t.c. $1 \leq |\alpha| \leq m$

$$|K^\alpha| \leq |K|^{|\alpha|} \leq |K|^m$$

Dunque

$|f|_m^2$ è equivalente a $|f|_m^2 + \sum_{\substack{K \\ |\alpha| \leq m}} |K^\alpha \hat{f}_K|^2$

$|f|_m^2$ è equivalente a $\underbrace{\left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f \right]^2}_{=\frac{1}{(2\pi)^6} |\hat{f}_0|^2} + \sum_K |K|^{2m} |\hat{f}_K|$

$$\Big[|f|_m^2 + \sum_K |\hat{f}_K|^2 + \sum_K |\hat{f}_K|^2 |K|^{2m} =$$

$$= |\hat{f}_0|^2 + \sum_K |\hat{f}_K| |K|^{2m} + \underbrace{\sum_{K \neq 0} |\hat{f}_K|^2}_{\leq \sum_K |\hat{f}_K| |K|^{2m}} \leq$$

$$\leq |\hat{f}_0|^2 + C \sum_K |\hat{f}_K| |K|^{2m} \Big]$$

ESERCIZIO (DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ)

Sia $f \in H_1$ con $\int f = 0$

$$\Rightarrow \int f^2 \leq c \int |\nabla f|^2$$

3. STIME A PRIORI

DISUGUAGLIANZE

Sia $m > 3/2$

$d_1)$ $\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_1 \leq c\,|f|_m$

$d_2)$ $|f\cdot g|_m \leq c\,|f|_m |g|_m$

$d_3)$ $\|f\cdot g\|_2 \leq c\,\|f\|_2 |g|_2$

$d_4)$ $\|f\cdot g\|_2 \leq c\,|f|_1 |g|_1$

OSSERVAZIONE

$d_1)$ ci dice che se $f \in H_m$, $m > 3/2 \Rightarrow f \in C(\mathbb{T})$ e $\|f\|_\infty \leq c\,|f|_m$ (cioè H_m si immerge in C)

DIMOSTRAZIONE DI $d_1)$

La disuguaglianza a sinistra è immediata, dobbiamo invece verificare quella a destra e questo ci richiederà un po' più di lavoro

$$\|f\|_\infty \leq \sum_K |\hat{f}_K| = \|\hat{f}\|_1 =$$

$$= \sum_K (1+|K|^m)\,|\hat{f}_K| \cdot \frac{1}{1+|K|^m} \leq \text{← Cauchy - Schwartz}$$

$$\leq \left[\sum_K (1+|K|^m)^2 |\hat{f}_K|^2\right]^{1/2} \cdot \left[\sum_K \frac{1}{(1+|K|^m)^2}\right]^{1/2}$$

$$(1+|K|^m)^2 \sim 1+|K|^{2m}$$

$$\leq c\,|f|_m \cdot \left[\sum_K \frac{1}{1+|K|^{2m}}\right]^{1/2}$$

← questa quantità dipende solo da m (non da f) dunque il problema è capire quando è finita

Ora,

$$\sum_{K\in\mathbb{Z}^3} \frac{1}{1+|K|^{2m}} \sim \int \frac{dK}{1+|K|^{2m}} \sim \int_{|K|\geq 1} \frac{1}{|K|^{2m}}$$

e l'ultimo integrale si può calcolare: passando in coordinate polari esso si scrive

$$\int_1^{+\infty} d\rho\, \frac{4\pi\rho^2}{\rho^{2m}} < +\infty \iff m > \frac{3}{2}$$

Mostriamo che $f \in H_m$ è necessariamente continua.

$$f = \underbrace{\sum_{|K|\leq R} e^{iK\cdot x}\,\hat{f}_K}_{\substack{\text{polinomio trigonometrico} \\ (C^\infty)}} + \sum_{|K|>R} e^{iK\cdot x}\,\hat{f}_K$$

← resto (da stimare)

Si ha

$$\left|\sum_{|K|>R} e^{iK\cdot x}\,\hat{f}_K\right| \leq \sum_{|K|>R} |\hat{f}_K| \leq c\,|f|_m \left[\underbrace{\int_{|K|>R} \frac{dK}{|K|^{2m}}}_{\xrightarrow{R\to+\infty}\ 0 \ (m>3/2)}\right]^{1/2}$$

usiamo la stessa stima di prima

e dunque f è limite uniforme di polinomi trigonometrici #

ESERCIZIO

Sia $f \in H_m$ con $m > 5/2$

Mostrare che allora $f \in C^1$ e

$$\|f\|_\infty + \|\nabla f\|_\infty \leq c\,|f|_m$$

OSSERVAZIONE

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE: IL LATO OSCURO DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

$$\widehat{(f\cdot g)}_k = \frac{1}{(2\pi)^3}\int dx\; e^{-ik\cdot x} f(x)\, g(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_p \hat{g}_p \int dx\; e^{-ik\cdot x + ip\cdot x} f(x) =$$

$$= \sum_p \hat{f}_{k-p}\,\hat{g}_p = \sum_p \hat{f}_p\,\hat{g}_{k-p} = \sum_{\substack{p,q \\ p+q=k}} \hat{f}_p\,\hat{g}_q$$

DIMOSTRAZIONE DI d_2)

Abbiamo

$$|f\cdot g|_m^2 = \underbrace{\sum_k |\widehat{(f\cdot g)}_k|^2}_{=\frac{1}{(2\pi)^3}\int (f\cdot g)^2} + \sum_k |k|^{2m}\,|\widehat{(f\cdot g)}_k|^2$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int (f\cdot g)^2 \leq \|f\|_\infty^2\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int g^2 \leq c\,|f|_m^2\,\|g\|_2^2 \leq c\,|f|_m^2\,|g|_m^2$$

Dobbiamo stimare il pezzo con $|k|^{2m}$:

$$\sum_k |k|^{2m}\,|\widehat{(f\cdot g)}_k|^2 \leq \sum_{k,p,q} |\hat{f}_p|\,|\hat{g}_{k-p}|\,|\hat{f}_q|\,|\hat{g}_{k-q}|\,|k|^{2m}$$

$$|k|^{2m} = |k|^m\cdot|k|^m \leq c\,(|k-p|^m + |p|^m)(|k-q|^m + |q|^m)$$

$$= c\,\big(\underbrace{|k-p|^m\,|k-q|^m}_{\tau_1} + \underbrace{|k-p|^m\,|q|^m}_{\tau_2} + \underbrace{|p|^m\,|k-q|^m}_{\tau_3} + \underbrace{|p|^m\,|q|^m}_{\tau_4}\big)$$

Abbiamo spezzato la serie in 4 pezzi. Stimiamoli separatamente

τ_1: $$\sum_{p,q} |\hat{f}_p|\,|\hat{f}_q| \underbrace{\sum_k |k-p|^m\,|\hat{g}_{k-p}|\cdot|k-q|^m\,|\hat{g}_{k-q}|}_{\leq \sum_k |k|^{2m}|\hat{g}_k|^2} \leq c\,\|\hat{f}\|_1^2\,|g|_m^2 \leq c\,|f|_m^2\,|g|_m^2$$

$\longleftarrow$ Cauchy-Schwartz: $\sum_{k,l} a_k\, a_{l-k} \leq \left(\sum_k a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_l a_{l-k}^2\right)^{1/2}$

τ_2: $$\sum_{k,p,q} |\hat{f}_p|\,|\hat{f}_q|\,|\hat{g}_{k-p}|\,|\hat{g}_{k-q}|\,|k-p|^m\,|q|^m \overset{k-q=\bar{q}}{=}$$

$$= \sum_{p,\bar{q}} |\hat{f}_p|\,|\hat{g}_{\bar{q}}| \sum_k |\hat{f}_{k-\bar{q}}|\,|k-\bar{q}|^m\,|\hat{g}_{k-p}|\,|k-p|^m \leq c\,\|\hat{f}\|_1\,\|\hat{g}\|_1\,|\hat{f}|_m\,|\hat{g}|_m \leq c\,|f|_m^2\,|g|_m^2$$

τ_3: come τ_2

τ_4: esercizio [suggerimento: $k-p = \bar{p}$, $k-q = \bar{q}$]

In definitiva otteniamo

$$\sum_k |k|^{2m}\,|\widehat{(f\cdot g)}_k|^2 \leq c\,|f|_m^2\,|g|_m^2 \qquad \#$$

DIMOSTRAZIONE DI $d_3)$

Abbiamo

$$\|f\cdot g\|_2 \leq c\|f\|_2\,|g|_m$$

$$\Big(\int f^2 g^2\Big)^{1/2} \leq \|g\|_\infty \|f\|_2 \leq c\,|g|_m \|f\|_2 \qquad \forall\, m > 3/2 \quad (\text{in particolare } m=2) \quad \#$$

DIMOSTRAZIONE DI $d_4)$

Dobbiamo di nuovo stimare il prodotto di convoluzione:

$$\|f\cdot g\|_2^2 = \sum_{k,p,q} |\hat f_p||\hat f_q||\hat g_{k-p}||\hat g_{k-q}| =$$

$$ab \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$$

$$= \sum_{k,p,q} \underbrace{(1+|p|)|\hat f_p|}_{a}\,\underbrace{(1+|q|)|\hat f_q|}_{b}\,\underbrace{(1+|k-p|)|\hat g_{k-p}|}_{a}\,\underbrace{(1+|k-q|)|\hat g_{k-q}|}_{b}\,\frac{1}{(1+|p|)(1+|q|)(1+|k-p|)(1+|k-q|)}$$

$$\leq c\sum_{k,p}(1+|p|^2)|\hat f_p|^2(1+|k-p|^2)|\hat g_{k-p}|^2 \underbrace{\sum_q \frac{1}{(1+|q|^2)(1+|k-q|^2)}}\ +$$

$$\wedge\!\!|$$

$$\sum_q \frac{1}{(1+|q|^2)^2} \sim \int_{|q|\geq 1}\frac{dq}{q^4} < +\infty$$

$$\vee\!\!|$$

$$+\,c\sum_{k,q}(1+|q|^2)|\hat f_q|^2(1+|k-q|^2)|\hat g_{k-q}|^2 \sum_p \frac{1}{(1+|p|^2)(1+|k-p|^2)} \leq$$

$k-p=\bar k$ nel I
$k-q=\bar k$ nel II

$$\leq c\,|f|_1|g|_1 \quad \#$$

ESERCIZIO 1

Sia $f\in H_m$ $\;(|f|_m<+\infty)$

$$\|\hat f\|_1 = \sum_k |\hat f_k| \leq c\,|f|_m \quad \text{per } m>\tfrac{3}{2}$$

$(\Rightarrow f\in L^\infty$, inoltre f è continua$)$

Provare che

(i) $\sum_k |k|^\alpha\,|\hat f_k| \leq c\,|f|_m$ se $m-\alpha > 3/2$ $\;(\alpha < m-3/2)$

(ii) se $|f|_m<+\infty$ con $m>3/2$

$\Rightarrow f$ è hölderiana di esponente α con $\alpha < m - 3/2$

[Traccia di (ii):

$$|f(x)-f(y)| = \Big|\sum_k (e^{ik\cdot x}-e^{ik\cdot y})\hat f_k\Big| \leq \underbrace{\sum_{|k|\leq N}|k||x-y||\hat f_k|}_{①} + 2\underbrace{\sum_{|k|>N}|\hat f_k|}_{②}$$

Ora stimiamo i singoli pezzi; per ② usiamo l'integrale:

$$② \leq c\,|f|_m\Big[\int_N^{+\infty} d\rho\,\frac{\rho^2}{\rho^{2m}}\Big]^{1/2} = c\,|f|_m\,\frac{1}{N^{m-3/2}}\,,$$

per ① usiamo il risultato del punto (i) e "assorbiamo" parte del $|k|$ nella norma $|f|_m$:

$$① \leq N^{1-\alpha}\,c\,|f|_m\,|x-y|$$

Dunque otteniamo la stima

$$|f(x)-f(y)| \leq c\left[N^{1-\alpha}|x-y| + \frac{1}{N^{m-3/2}}\right]$$

Scegliamo

$$N = \frac{1}{|x-y|}$$

Allora

$$|f(x)-f(y)| \leq c\left(|x-y|^{\alpha} + |x-y|^{m-3/2}\right) \leq c\,|x-y| \qquad \forall \alpha < m - 3/2$$

(siamo sul toro: $|x-y| \leq 2\pi$ sempre!)

In realtà il PROCEDIMENTO STANDARD per determinare N è guardare la quantità

$$r N^{a} + \frac{1}{N^{b}}$$

e ottimizzare in N: derivando si trova un minimo per

$$N^{a+b} = \frac{b}{ar} \;]$$

ESERCIZIO 2 (DIFFICILE)

Provare che se f è hölderiana di esponente α, allora $f \in H_m$, $m < \overline{m}(\alpha)$

ESERCIZIO 3

Provare che se $\Delta f \in L^2 \Rightarrow f \in H_2$

(cioè $(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) f \in L^2 \Rightarrow \forall i,j\ \partial_{x_i}\partial_{x_j} f \in L^2$)

[Passando in trasformata di Fourier:

$$\widehat{(\Delta f)}_K \in \ell^2 \iff K^2 \hat{f}_K \in \ell^2$$

Ma quindi

$$\sum_K |K|^4 |\hat{f}_K|^2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in H_2$$

(stiamo usando

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} f \mapsto -K_i K_j \hat{f}_K$$

$$|K_i K_j| \leq \tfrac{1}{2}(K_i^2 + K_j^2) \leq \tfrac{1}{2}|K|^2) \;]$$

Abbiamo visto $m > 3/2$

a) $\|f\|_\infty \leq c|f|_m$

b) $|fg|_m \leq c|f|_m |g|_m$

c) $\|fg\|_2 \leq c\|f\|_2 |g|_m$

d) $\|fg\|_2 \leq c|f|_1 |g|_1$

STIME A PRIORI DELLE SOL REGOLARI DI EULERO SU $\mathbb{T}^3$

$\partial_t u + u\cdot\nabla u = -\nabla p$

Speriamo che in una qualche norma $\frac{d}{dt}\|u\| \leq c\|u\|^2$

Se $\|u\| = |u|_m$ che pb incontriamo?

La derivata temporale di u è funzione di ∇u!

Come facciamo a eliminare la derivata di troppo?

Sfruttiamo la conservazione dell'energia:

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{u^2}{2} = \text{energia cinetica}$$
$$\frac{1}{2}(u,u)$$

Definiamo

$$(f,g) = \int_{\mathbb{T}^3} fg$$

Abbiamo

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{(u,u)}{2} = (u, \partial_t u) = -(u, u\cdot\nabla u) - \underbrace{(u,\nabla p)}_{=0}$$

i campi a div $=0$ sono $\perp$ ai campi gradient

spiegaz fisica: u moto possibile non compie lavoro, $-\nabla p$ è una forza che non deve compiere lavoro

Fatto generale:

$$(f, u\cdot\nabla g) = \int f(u\cdot\nabla)g = \int f\, u_i \partial_i g =$$

$$= -\int \partial_i(f u_i)\, g = -\int \partial_i f\, u_i\, g - \int f(\partial_i u_i) g = -(u\cdot\nabla f, g)$$

div $u = 0$

cioè (antisimmetria):

$$(f, u\cdot\nabla g) = -(u\cdot\nabla f, g)$$

Nel nostro caso

$$(f, u\cdot\nabla f) = -(f, u\cdot\nabla f) = 0$$

METODO DELL'ENERGIA

Si chiama così perché mima la conservazione dell'energia per stimare norme Sobolev

OSS

Stimare $\sum_k |k|^{2m} |\hat{f}_k|^2$ è equiv a stimare $\sum_i \left(\sum_k |k_i|^{2m} |\hat{f}_k|^2\right) \sim (\partial_i^m f, \partial_i^m f)$

Sia $m \geq 3$

$$\frac{d}{dt}\frac{(\partial_i^m u, \partial_i^m u)}{2} = (\partial_i^m u, \partial_i^m \partial_t u) = -(\partial_i^m u, \partial_i^m((u\cdot\nabla)u)) - \underbrace{(\partial_i^m u, \nabla\partial_i^m p)}_{=0}$$

campo grad

div $\partial_i^m u = \partial_i^m \text{div}\, u =$

$$= -\sum_{\beta=0}^{m}\binom{m}{\beta}\left(\partial_i^m u, \partial_i^\beta u\cdot\nabla\partial_i^{m-\beta}u\right) = -\sum_{\beta=1}^{m}\binom{m}{\beta}\left(\partial_i^m u, \partial_i^\beta u\cdot\nabla\partial_i^{m-\beta}u\right) \le$$

il termine per $\beta=0$ è $(\partial_i^m u, u\cdot\nabla\partial_i^m u)=0$

$$\le C\,\|\partial_i^m u\|_2 \sum_{\beta=1}^{m}\|\partial_i^\beta u\cdot\nabla\partial_i^{m-\beta}u\|_2$$

$$\le C\,|u|_m \sum_{\beta=1}^{m}\|\partial_i^\beta u\cdot\nabla\partial_i^{m-\beta}u\|_2$$

Dobbiamo stimare

$$\|\partial_i^\beta u\cdot\nabla\partial_i^{m-\beta}u\|_2$$

$\boxed{\beta=1}$

$$\|\partial_i u\cdot\nabla\partial_i^{m-1}u\|_2 \overset{c)}{\le} C\,|\partial_i u|_m\,\|\nabla\partial_i^{m-1}u\|_2 \le C\,|u|_{m+1}\,|u|_m \le C\,|u|_m^2$$

$\forall m>3/2$, $m=2$

$\boxed{\beta=2}$

$$\|\partial_i^2 u\cdot\nabla\partial_i^{m-2}u\|_2 \overset{d)}{\le} |\partial_i^2 u|_1\,|\nabla\partial_i^{m-2}u|_1 \le C\,|u|_3\,|u|_m \le C\,|u|_m^2$$

$\boxed{\beta\ge 3}$

c) al contrario $(\beta\le m)$

$$\|\partial_i^\beta u\cdot\nabla\partial_i^{m-\beta}u\|_2 \le C\,\|\partial_i^\beta u\|_2\,|\nabla\partial_i^{m-3}|_m \le C\,|u|_m\,|u|_{m-2+m} \le C\,|u|_m^2$$

$m=2$

Abbiamo provato

$$\frac{d}{dt}|u|_m^2 \le C\,|u|_m^3$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}|u|_m \le C\,|u|_m^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|u|_m \le \frac{|u_0|_m}{1-Ct\,|u_0|_m}}$$

che è la stima a priori per la sol. di Eulero

OSS La stima esplode in tempo finito

se $t<\dfrac{1}{C|u_0|_m} \Rightarrow |u(t)|_m$ è limitata

COSTRUZIONE DELLE SOLUZIONI MEDIANTE APPROSSIMAZIONI IN DIMENSIONE FINITA

Abbiamo l'eq di Eulero

$$\partial_t u + u\cdot\nabla u = -\nabla p$$

Scriviamola in Fourier. Otteniamo la seguente eq per i coeff di Fourier

ci sono tutti i modi! intrinsecam ∞ gradi di liber

$$\partial_t \hat u_k + i\sum_h \hat u_{k-h}\cdot h\,\hat u_h = -i\,k\,\hat p_k$$

L'altra eq è $\operatorname{div} u=0 \iff k\cdot\hat u_k=0$

L'energia in Fourier è

$$\int\frac{u^2}{2} = \sum|\hat u_k|^2$$

(non sappiamo fare esistenza globale perchè non sappiamo se si "accendono" i modi per k grande in maniera da perdere la regolarità: $\sum |k|^{2m} |\hat{u}_k|^2 = \infty$.)

Sia $S^N = \overline{\{e^{ik x}\}}_{|k|\le N}$ e P^N il proiettore in L^2 su S^N

$$P^N f = \sum_{|k|\le N} e^{ik\cdot x} \hat{f}_k$$

"Proiettiamo l'equazione"

$u^N \in S^N$, $p^N \in S^N$

$$(*)\begin{cases} \partial_t u^N + P^N((u^N\cdot\nabla)u^N) = -\nabla p^N \\ \operatorname{div} u^N = 0 \end{cases}$$ TRONCAMENTI DI FAEDO - GALERKIN

OSS

Quante incognite ha? (gradi di libertà) $\le cN^3$

OSS

Si conserva l'energia anche per questo pb

$$\Big[\frac{d}{dt}\frac{(u^N,u^N)}{2} = -(u^N, \cancel{P^N}((u^N\cdot\nabla)u^N)) - (u^N, \nabla p^N)$$

$$\underset{\substack{\cap \\ S^N}}{(u^N}, P^N w) = (u^N, w)$$

$(u^N, (u^N\cdot\nabla)u^N) = 0$ ← $u^N\cdot\nabla$ antisimmetrico; $(u^N,\nabla p^N) = 0$

N.B. $u\cdot\nabla$ è antisimmetrico in L^2 per ogni u con $\operatorname{div} u = 0$ $\Big]$

EX

Verificare che per u^N vale la stima a priori in H_m, $m \ge 3$

$$|P^N w|_m \le |w|_m$$

PROP

Il problema troncato $(*)$ ha sol unica e globale in t, e verifica

$$|u^N|_m \le \frac{|u(0)|_m}{1 - ct\,|u(0)|_m}$$

IDEA

Energia

$$\frac{\|u^N\|_2^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_k |\hat{u}_k^N|^2 \Rightarrow |\hat{u}_k^N| \le c = \sqrt{E} \quad \forall k, N, t \quad \Rightarrow \exists \text{ globale}$$

ma passando al lim non ci basta che i coeff di Fourier siano limitati, ci servirebbero cdz di decrescenza

$u_0 \in H_m \quad m>3 \quad \Rightarrow |u(t)|_m \leq \frac{|u_0|_m}{1-ct|u_0|_m}$

$\hat{u}_k^N(t)$ sol dell'eq troncata in Fourier

$|\hat{u}_k^N(t)| \leq \left(\sum |\hat{u}_k^N(t)|^2\right)^{1/2} = c(2E^N)^{1/2}$

$$\hat{u}_k^N(0) = \begin{cases} \hat{u}_k(0) & \text{per } |k|\leq N \\ 0 & \text{per } |k|>N \end{cases}$$

$\hat{u}_k^N(t)$ unif limitata in $t \Rightarrow \hat{u}_k^N(t)$ ESISTE GLOBALE NEL TEMPO

N.B. $\hat{u}_k^N$ sono i coeff di Fourier di u^N che risolve

$$\begin{cases} \partial_t u^N + P^N((u^N\cdot\nabla)u^N) = -\nabla p^N & p^N \in S^N \\ \operatorname{div} u^N = 0 \end{cases}$$

ESISTENZA DEL LIMITE

Sia $H>N$

Faremo vedere che $\|u^N-u^H\|_2^2$ tende a 0 per $N\to+\infty$

$\Rightarrow$ (per Cauchy) $u^N \to u$ in L^2

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(u^N-u^H, u^N-u^H) =$$

$$= (\underbrace{u^N-u^H}_{\in S^H}, -P^N(u^N\cdot\nabla u^N) + P^H(u^H\cdot\nabla u^H)) - \underbrace{(u^N-u^H, \nabla p^N - \nabla p^H)}_{=0} \overset{*}{=}$$

(prod scal tra gradiente e campo a div nulla)

N.B. $f\in S^H \Rightarrow (f, P^H g) = (f,g)$

$$\overset{*}{=} (u^N-u^H, (u^H\cdot\nabla)u^H) - (u^N-u^H,(u^N\cdot\nabla)u^N) + (u^N-u^H, (1-P^N)((u^N\cdot\nabla)u^N)) =$$

$$= (u^N-u^H, (u^H-u^N)\cdot\nabla u^H + u^N\cdot\nabla(u^N-u^H)) + ((1-P^N)(u^N-u^H), (u^N\cdot\nabla)u^N) =$$

ie prod scal con questo pezzo è 0 ($u\cdot\nabla$ è op antisimm)

$$= \underbrace{(u^N-u^H, (u^H-u^N)\cdot\nabla u^H)}_{1} + \underbrace{((1-P^N)(\cancel{u^N}-u^H), (u^N\cdot\nabla)u^N)}_{2}$$

$u^N - P^N u^N = 0$

$|1| \leq \|\nabla u^H\|_\infty \|u^N-u^H\|_2^2 \leq c(t)$

N.B. $\|\nabla u^H\|_\infty \leq c\,|u^H(t)|_m \leq c(t) \quad t<1/c|u_0|_m$

$|2| \leq \|(1-P^N)u^H\|_2 \cdot \|(u^N\cdot\nabla)u^N\|_2$

$\|u^N\cdot\nabla u^N\|_2 \leq \|\nabla u^N\|_\infty \|u^N\|_2 \leq c(t)\sqrt{E}$

$$\|(1-P^N)u^H\|_2^2 = \sum_{|k|>N} |u_k^H|^2 \cdot \frac{|k|^{2m}}{|k|^{2m}} \leq \frac{1}{N^{2m}}|u^H|_m \leq \frac{1}{N^{2m}}c(t)$$

Sintetizziamo:

Se $T<1/c|u_0|_m \Rightarrow |u^N(t)|_m \leq c \quad \forall N$

per $t<T$

$$\frac{d}{dt}\|u^N-u^H\|_2^2 \leq c\|u^N-u^H\|_2^2 + \frac{c}{N^m}$$

Gronwall $\Rightarrow$

$$\|u^N - u^H\|_2^2 \leq e^{ct}\|u^N(0) - u^H(0)\|_2^2 + C/N^m (e^{ct}-1)$$

$$u^N(0) - u^H(0) = P^N u_0 - P^H u_0$$

$$\|P^N u_0 - P^H u_0\|_2^2 = \sum_{N<|k|\leq H} |\hat{u}_k(0)|^2 \leq \sum_{|k|>N} |\hat{u}_k(0)|^2 \leqslant \frac{C}{N^{2m}}$$

Inoltre

$$\sup_{[0,T]} \|u^N(t) - u^H(t)\|_2^2 \leqslant \frac{C}{N^m} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

DUNQUE

$$u^N \to u \quad \text{in } C([0,T], L^2(\mathbb{T}^3))$$

<u>ULTIMA PARTE: U RISOLVE L'EQ. DI EULERO</u>

Proprietà di u: u è continua $[0,T] \to L^2$

$u(t) \in H_m$ (infatti $u^N(t) \in H_m$ con $|u^N(t)|_m \leq C$, uniforme in N)

Sappiamo $\partial_t u^N + P^N((u^N\cdot\nabla)u^N) = -\nabla p^N$. Vorremmo passare al limite

Sia $\varphi \in S^H$, H fissato, a divergenza nulla

Sia $N > H$

$$\frac{d}{dt}(\varphi, u^N) = \underbrace{-(\varphi, P^N((u^N\cdot\nabla)u^N))}_{= -(\varphi, (u^N\cdot\nabla)u^N)} - \underbrace{(\varphi, \nabla p^N)}_{=0} =$$

$$= ((u^N\cdot\nabla)\varphi, u^N)$$

$$= \int u_i^N u_j^N \partial_j \varphi_i$$

$$(\varphi, u^N(t)) = (\varphi, u^N(0)) + \int_0^t ds \int dx\, u_i^N u_j^N \partial_j\varphi_i$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow (*)$$

$$(\varphi, u(t)) = (\varphi, u(0)) + \int_0^t ds \int dx\, u_i u_j \partial_j \varphi_i$$

FUNZ CONTINUA IN t $\Rightarrow$ L'INTEGR. TEMPORALE È C^1 ($(\varphi, u(t))$ è $C^1[0,T]$)

$$u_i^N u_j^N - u_i u_j = (u_i^N - u_i)u_j^N + u_i(u_j^N - u_j)$$

$$\left|\int_0^t ds \int dx\, (u_i^N u_j^N - u_i u_j)\partial_j\varphi\right| \leq$$

$$\leq c\|\nabla\varphi\|_\infty \int_0^t ds \int dx\, |u^N - u|(|u^N| + |u|) \leq$$

$$\leq c\|\nabla\varphi\|_\infty \int_0^t ds\, \underbrace{\|u^N - u\|_2}_{\to 0} (\underbrace{\|u^N\|_2}_{\leq C} + \underbrace{\|u\|_2}_{\leq C}) \Rightarrow (*)$$

DERIVIAMO:

$$\frac{d}{dt}(\varphi, u(t)) = \int dx\, u_i u_j \partial_j \varphi$$

SAPPIAMO che $u \in H_m$. Allora possiamo tornare indietro in

$$\int dx\, u_i u_j \partial_j \varphi = (\varphi, (u\cdot\nabla)u)$$

$$(\varphi, \partial_t u) = -(\varphi, (u\cdot\nabla)u) \qquad \forall \varphi \in S^H,\ \operatorname{div}\varphi = 0$$

Ma H è arbitrario $\Rightarrow$ $\partial_t u = -u\cdot\nabla u - \nabla p$ $\Rightarrow$ vale Eulero

TEO (UNICITÀ)

Se $u(t), v(t)$ con $\partial_t u, \partial_t v$, $\nabla u, \nabla v$ unif limitate in $x \in \mathbb{T}$ $t\in[0,T]$

Se $u(0) = v(0) = u_0$ $\Rightarrow$ $u(t) = v(t)$ $\forall t \in [0,T]$.

DIM

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u(t)-v(t)\|_2^2 = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\big(u(t)-v(t), u(t)-v(t)\big) =$$

$$= (\partial_t u - \partial_t v, u - v) =$$

$$= (-\nabla p_u - u\cdot\nabla u + \nabla p_v + v\cdot\nabla v, u-v)$$

$$= (-u\cdot\nabla u + v\cdot\nabla v, u-v) + \underbrace{(-\nabla p_u + \nabla p_v, u-v)}_{=0}$$

$$= (-u\cdot\nabla(u-v) + (v-u)\cdot\nabla v, u-v) =$$

$$= \underbrace{(-u\cdot\nabla(u-v), u-v)}_{=0} + ((v-u)\cdot\nabla v, u-v) =$$

antisimmetria

$$= \int ((v-u)\cdot\nabla)v\cdot(u-v) \leq \|\nabla v\|_\infty \|u-v\|_2^2 \quad \#$$

OSS

In questo modo possiamo provare la continuità risp al dato iniz al tempo 0

PROGRAMMA PER LE PROX. LEZIONI

- $\exists$ NAVIER-STOKES IN DIM 3
- $\exists$ NAVIER-STOKES IN DIM 2 (COROLLARIO)
- RIFARE NS IN $\mathbb{R}^2$ CON I PROCESSI STOCASTICI
- GASDINAMICA ISOENTROPICA IN DIM 1 (COMPRIMIBILE)
  - METODO DELLE CARATTERISTICHE
  - VELOCITÀ DEL SUONO ("IPERBOLICO")
  - SOL DEBOLI --> ONDE DI SHOCK