COSTRUZIONE DELLE SOLUZIONI

Definiamo

$$\omega^0(\underline{x}) = \omega_0(\underline{x})$$

$$\underline{u}^1(\underline{x}) = \underline{K}_D * \omega^0(\underline{x})$$

$$\frac{d}{dt}\Phi^1_t(\underline{x}) = \underline{u}^1(\Phi^1_t(\underline{x}))$$

$$\omega^1(\Phi^1_t(\underline{x}), t) = \omega_0(\underline{x}) \qquad (\Rightarrow \omega^1(\underline{x},t) = \omega_0((\Phi^1_t)^{-1}(\underline{x})))$$

.....

OTTENIAMO una successione approssimante

$$\underline{u}^n(\underline{x},t) = \underline{K}_D * \omega^{n-1}(\underline{x},t)$$

$$\frac{d}{dt}\Phi^n_t(\underline{x}) = \underline{u}^n(\Phi^n_t(\underline{x}),t)$$

$$\omega^n(\underline{x},t) = \omega_0((\Phi^n_t(\underline{x}))^{-1}) \qquad (\omega^n(\Phi^n_t(\underline{x}),t) = \omega_0(\underline{x}))$$

<u>LEMMA 1</u>

Sia $\overline{\Phi}$ un FLUSSO (cioè una funzione continua con inversa continua) che CONSERVA la MISURA: ossia

$\forall f \in C(D)$

$$\int_D f(\overline{\Phi}(\underline{x}))\, d\underline{x} = \int_D f(\underline{x})\, d\underline{x}$$ ← se $\overline{\Phi}$ è C^1 è come dire $\det \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \underline{x}} \equiv 1$

1) $u = k * \omega(x,t)$

$\omega(x,t)$ [illegible]

Sia

2) $$\underline{u}(\underline{x}) := \int dy\, \underline{K}_D(\underline{x}, \overline{\Phi}(\underline{y}))\, \omega(\underline{y}) = \int_D dy\, \underline{K}_D(\underline{x},\underline{y})\, \omega(\overline{\Phi}^{-1}(\underline{y}))$$

2) $\dot{\phi} = u(\phi)$

dimostr. [illegible] la misura.

Allora se Φ_t soddisfa

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x}) = \underline{u}(\Phi_t(\underline{x})) \Rightarrow \Phi_t \text{ conserva la misura } \#$$

<u>LEMMA 2</u>

Siano $\overline{\Phi}^1$ e $\overline{\Phi}^2$ due FLUSSI che CONSERVANO la MISURA

Siano

$$\underline{u}^1(\underline{x}) := \int dy\, \underline{K}_D(\underline{x}, \overline{\Phi}^1(\underline{y}))\, \omega(\underline{y})$$

$$\underline{u}^2(\underline{x}) := \int dy\, \underline{K}_D(\underline{x}, \overline{\Phi}^2(\underline{y}))\, \omega(\underline{y})$$

Allora

3) $$\sup_{\underline{x}} |\underline{u}^1(\underline{x}) - \underline{u}^2(\underline{x})| \leq C\,\varphi\left(\sup_{\underline{x}} |\overline{\Phi}^1(\underline{x}) - \overline{\Phi}^2(\underline{x})|\right) \quad \#$$

Stimiamo

$$\Phi^n_t(\underline{x}) - \Phi^{n-1}_t(\underline{x}) = \int_0^t ds \left[\underline{u}^n(\Phi^n_s(\underline{x}),s) - \underline{u}^{n-1}(\Phi^{n-1}_s(\underline{x}),s)\right] =$$

$$= \int_0^t ds \left[\underline{u}^n(\Phi^n_s(\underline{x}),s) - \underline{u}^n(\Phi^{n-1}_s(\underline{x}),s)\right] +$$

$$+ \int_0^t ds \left[\underline{u}^n(\Phi^{n-1}_s(\underline{x}),s) - \underline{u}^{n-1}(\Phi^{n-1}_s(\underline{x}),s)\right]$$

$$\left|{}_0\!\int^t ds \left[\underline{u}^n(\Phi_s^n(\underline{x}),s) - \underline{u}^n(\Phi_s^{n-1}(\underline{x}),s)\right]\right| \leq C\, {}_0\!\int^t ds\, \varphi\left(|\Phi_s^n(\underline{x}) - \Phi_s^{n-1}(\underline{x})|\right)$$

ogni $\underline{u}^k$ è quasi lipschitziana

$\underline{u}^n = \underline{K}_D * \omega^{n-1}$ con $\|\omega^{n-1}\|_{L^1} = \|\omega_0\|_{L^1}$

$$\left|{}_0\!\int^t ds \left[\underline{u}^n(\Phi_s^{n-1}(\underline{x}),s) - \underline{u}^{n-1}(\Phi_s^{n-1}(\underline{x}),s)\right]\right| \leq {}_0\!\int^t ds \sup_{\underline{x}} |\underline{u}^n(\underline{x},s) - \underline{u}^{n-1}(\underline{x},s)|$$

$$\underline{u}^n(\underline{x}) = \int dy\ \underline{K}_D(\underline{x},\underline{y})\ \omega^{n-1}(\underline{y},t) \overset{y \mapsto \Phi_t^{n-1}(y)}{=} \int dy\ \underline{K}_D(\underline{x},\Phi_t^{n-1}(\underline{y}))\, \omega_0(\underline{y})$$

$\omega^{n-1} \circ \Phi_t^{n-1} = \omega_0$

$$\underline{u}^{n-1}(\underline{x}) = \int dy\ \underline{K}_D(\underline{x},\Phi_t^{n-2}(\underline{y}))\ \omega_0(y)$$

Per il Lemma 2

$$\left|{}_0\!\int^t ds \left[\underline{u}^n(\Phi_s^{n-1}(\underline{x}),s) - \underline{u}^{n-1}(\Phi_s^{n-1}(\underline{x}),s)\right]\right| \leq C\, {}_0\!\int^t ds\ \varphi\left(\sup_{\underline{x}} |\Phi_s^{n-1}(\underline{x}) - \Phi_s^{n-2}(\underline{x})|\right)$$

Passiamo al sup nell'espressione $|\Phi_t^n(\underline{x}) - \Phi_t^{n-1}(\underline{x})|$ che chiamiamo

$$\delta_t^n := \sup_{\underline{x}} |\Phi_t^n(\underline{x}) - \Phi_t^{n-1}(\underline{x})|$$

ed abbiamo

$$\boxed{\delta_t^n \leq C\, {}_0\!\int^t ds\ \varphi(\delta_s^n) + C\, {}_0\!\int^t \varphi(\delta_s^{n-1})}$$

Definiamo

$$\rho_t^n := \sup_{k \geq n} \delta_t^k$$

Si ha allora

$$\rho_t^n \leq C\, {}_0\!\int^t ds\ \varphi(\rho_s^{n-1})$$

$\Rightarrow$ come per $\dot{\underline{x}} = \underline{b}(\underline{x},t)$, la serie $\sum \rho_t^n$ è finita

$\Rightarrow$ $\Phi_t^n(\underline{x})$ converge uniformemente a $\Phi_t(\underline{x})$

Abbiamo dimostrato che

$\Phi_t^n(\underline{x}) \to \Phi_t(\underline{x})$ uniformemente in $\underline{x}$ e t

Vogliamo dimostrare che $\Phi_t(\underline{x})$ è hölderiana

Poiché

$$\sup_{\underline{x}} |\underline{u}^n(\underline{x},t) - \underline{u}^{n-1}(\underline{x},t)| \leq C\ \varphi\left(\sup_{\underline{x}} |\Phi_t^{n-1}(\underline{x}) - \Phi_t^{n-2}(\underline{x})|\right)$$

si ha che $\underline{u}^n(\underline{x},t)$ converge uniformemente a $\underline{u}(\underline{x},t)$

φ continua, $\varphi(0)=0$

Dunque

$$\Phi_t^n(\underline{x}) = \underline{x} + {}_0\!\int^t ds\ \underline{u}^n(\Phi_s^n(\underline{x}),s)$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi_t(\underline{x}) = \underline{x} + {}_0\!\int^t ds\ \underline{u}(\Phi_s(\underline{x}),s)$$

Definiamo

$$\omega(\underline{x},t) := \omega_0((\Phi_t)^{-1}(\underline{x}))$$

Abbiamo che

$\omega^n(\underline{x},t) \to \omega(\underline{x},t)$ debolmente

$$\left[\int f(\underline{x})\ \omega^n(\underline{x},t) = \int f(\Phi_t^n(\underline{x}))\ \omega_0(\underline{x}) \to \int f(\Phi_t(\underline{x}))\ \omega_0(\underline{x}) = \int f(\underline{x})\ \omega(\underline{x},t)\right]$$

N.B. Φ^u conserva la misura, $\Phi^u \to \Phi$ uniformemente

$\Rightarrow \Phi$ conserva la misura

$\Big[\ \Phi^u_{t,s}(\underline{x}) = \underline{x} + \int_0^t \underline{u}^u(\Phi^u_{t,r}(\underline{x}), r)\, dr$

$\Phi^u_t = \Phi^u_{t,0}$

$\Phi^u_{t,s} \circ \Phi^u_{s,r} = \Phi^u_{t,r}$ (PROPRIETÀ DI SEMIGRUPPO)

$(\Phi^u_{t,0})^{-1} = \Phi^u_{0,t}$

$\Rightarrow \Phi^u \to \Phi$ uniformemente, Φ conserva la misura $\Big]$

$\underline{u}^u = \int \underline{K}_D(\underline{x},\underline{y})\, \omega^{u-1}(\underline{y};t) \to \int \underline{K}_D(\underline{x},\underline{y})\, \omega(\underline{y},t) = \underline{u}$

Dato che $\underline{K}_D(\underline{x},\underline{y})$ è L^1 in $\underline{y}$,

$\underline{u}^u \to \underline{u}$ uniformemente

Unicità:

Esercizio

Regolarità:

① $|\Phi_t(\underline{x}) - \Phi_t(\underline{y})| \leq C(t)|\underline{x}-\underline{y}|^{\alpha(t)}$

② EQUAZIONI ELLITTICHE:

$\omega \in C^{K+\alpha}$, $0<\alpha<1 \Rightarrow \underline{K}_D * \omega = \underline{u}$ è di classe $C^{1+K+\alpha'}$, $\alpha'<\alpha$

$\omega_0 \in C^{K+\alpha} \Rightarrow \omega \in C^{K+\alpha}$, $\underline{u} \in C^{K+1+\alpha'}$, $\alpha'<\alpha$

Allora $\omega, \underline{u}$ risolvono le equazioni in forma forte

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \underline{u}\cdot\nabla\omega = 0 \\ \omega = -\nabla^\perp \underline{u} \end{cases}$$

Dimostrazione della regolarità:

$\omega_0 \in C^{K+\alpha}$

Sappiamo $\Phi^t \in C^{\alpha(t)}$ (di pura q.l. di $\underline{u}$, che dipende solo da $\|\omega_0\|_{L^1}$)

In particolare $\omega_0 \in C^{\alpha_0}$

$\omega(\underline{x},t) = \omega_0(\Phi_{-t}(\underline{x})) \Rightarrow \omega \in C^{\alpha_0\alpha(t)} \xRightarrow{\text{regolarità ellittica}} \underline{u} \in C^{1+\alpha_0'(t)}$ con $\alpha_0'(t) < \alpha_0\,\alpha(t)$

$\Rightarrow \dot{\Phi} = \underline{u}(\Phi)$, $\Phi_t \in C^{1+\alpha_0''(t)}$ con $\alpha_0''(t) < \alpha_0'(t)$

Iteriamo:

$\omega_0 \in C^{1+\alpha_1} \Rightarrow \omega \in C^{1+\alpha_1\alpha_0''(t)} \Rightarrow \underline{u} \in C^{2+\alpha_1'(t)} \Rightarrow \Phi_t \in C^{2+\alpha_1''(t)}$

Continuiamo fino a K

$\Rightarrow$ in particolare $\omega(\underline{x},t) \in C^K$, $\underline{u} \in C^{K+1}$, $\Phi_t \in C^{K+1}$ #

Ora, sappiamo che

$\omega(\Phi_t(\underline{x}),t) = \omega_0(\underline{x})$ (vero anche per soluzioni deboli)

$\omega \in C^K$

$\Phi \in C^{K+1}$

$\Rightarrow$ derivando in t troviamo $\partial_t\omega + \underline{u}\cdot\nabla\omega = 0$

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^u(\underline{x}) = \underline{u}^u(\Phi_t^u(\underline{x}), t)$$

$$\underline{u}^u(\underline{x}) = \int dy\, K_D(\underline{x}, \underline{y})\, \omega^{u-1}(\underline{y})$$

$$\omega^{u-1}(y) = \omega_0((\Phi^{u-1}(\underline{x}))^{-1})$$

Φ_t^{u-1} conserva la misura

Allora

$$\underline{u}^u(\underline{x}) = \int dy\, K_D(\underline{x}, \Phi^{u-1}(\underline{y}))\, \omega_0(\underline{y})$$

Domanda: Φ^u conserva la misura?

ESERCIZIO

Sia ω assegnata,

$$\int_D |\omega| = \|\omega\|_{L1} < \infty$$

Sia

$$\omega^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}}}{2\pi\varepsilon^2}\, \omega(y)\, dy$$ REGOLARIZZATA DI $\omega(\underline{x})$ $(\omega^\varepsilon \in C^\infty)$

Chiamiamo Φ_t^ε la soluzione di

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^\varepsilon = \underline{u}^\varepsilon(\Phi_t^\varepsilon)$$

dove

$$\underline{u}^\varepsilon(\underline{x}) = K_D * \omega^\varepsilon$$

Allora Φ_t^ε conserva la misura

Dimostrare che

$$\Phi_t^\varepsilon \to \Phi_t$$

con

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = \underline{u}(\Phi_t(\underline{x}))$$

$$\begin{cases} \Phi_t^n(\underline{x}) = \underline{x} + \int_0^t ds \ \underline{u}^n(\Phi_s^n(\underline{x}), s) \\ \underline{u}^n(\underline{x},t) = \int \underline{K}_D(\underline{x},\underline{y})\, \omega^n(\underline{y})\, dy \\ \omega^n(\underline{x},t) = \omega_0((\Phi_t^{n-1})^{-1}(\underline{x})) \end{cases}$$

ESERCIZIO (LEMMA)

Φ_t^n CONSERVA la MISURA

[Suggerimento:

SKETCH:

$\omega(\underline{x},t) \in L^\infty(D) \quad \forall t \,, \ \|\omega\|_\infty \leq C$

$\omega^\varepsilon(\underline{x},t)$ regolarizzata C^∞ t.c. $\omega^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \omega$ uniformemente, $\|\omega^\varepsilon\| \leq C$

$\underline{u}^\varepsilon = \underline{K}_D * \omega^\varepsilon$

- $\underline{u}^\varepsilon \to \underline{u}$ uniformemente, $\underline{u}^\varepsilon$ è regolare
- $\frac{d}{dt}\Phi_t^\varepsilon = \underline{u}^\varepsilon(\Phi_t^\varepsilon) \implies \Phi_t^\varepsilon$ conserva la misura $(\operatorname{div} \underline{u}^\varepsilon = 0)$
- $\Phi_t^\varepsilon \to \Phi_t$ uniformemente e Φ_t conserva la misura]

Abbiamo visto la stima

$$|\underline{u}^n(\underline{x},t) - \underline{u}^{n-1}(\underline{x},t)| \leq C\,\varphi(\sup_{\underline{x}} |\Phi_t^{n-1}(\underline{x}) - \Phi_t^{n-2}(\underline{x})|)$$

$$\underline{u}^n(\underline{x},t) = \int \underline{K}_D(\underline{x},\underline{y})\, \omega^n(\underline{y})\, dy = \int \underline{K}_D(\underline{x}, \Phi_t^{n-1}(\underline{y}))\, \omega_0(\underline{y})\, dy$$

$$\underline{u}^{n-1}(\underline{x},t) = \int \underline{K}_D(\underline{x}, \Phi_t^{n-2}(\underline{y}))\, \omega_0(\underline{y})\, dy$$

RIFORMULIAMO: Φ^1, Φ^2 flussi e consideriamo i 2 campi

$$\underline{u}^i(\underline{x}) = \int_D \underline{K}_D(\underline{x}, \Phi^i(\underline{y}))\, \omega(\underline{y})\, dy \qquad i = 1,2$$

$\omega \in L^\infty$

Allora vale la stima

$$|\underline{u}^1(\underline{x}) - \underline{u}^2(\underline{x})| \leq \int_D |\underline{K}_D(\underline{x}, \Phi^1(\underline{y})) - \underline{K}_D(\underline{x}, \Phi^2(\underline{y}))| \cdot |\omega(\underline{y})|\, dy$$

Sia $r := \sup_{\underline{x}} |\Phi^1(\underline{x}) - \Phi^2(\underline{x})|$. Possiamo spezzare l'integrale su D così:

$$\int_D = \int_{D \cap \{|\underline{x} - \Phi^1(\underline{y})| < 2r\}} + \int_{D \cap \{|\underline{x} - \Phi^1(\underline{y})| > 2r\}}$$

ESERCIZIO

Stimare i due integrali come nella prova della quasi lipschitzianità di $\underline{u}$

STABILITÀ

OSSERVAZIONE

$D \subseteq \mathbb{R}^2$

QUASI SEMPRE abbiamo usato che ω è TRASPORTATA dal FLUSSO:

$$\omega(\Phi_t(\underline{x}), t) = \omega_0(\underline{x})$$

$\boxed{D = \mathbb{R}^2}$

ESEMPIO

$\omega_0 = \chi_\Lambda$

In questo caso si ha

$\omega(\underline{x},t) = \chi_{\Lambda_t}$ "VORTEX PATCH"

$\Lambda_t = \Phi_t(\Lambda)$

$|\Lambda_t| = |\Lambda|$

DOMANDA:

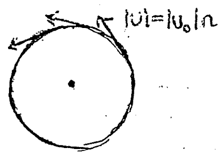
Per quali Λ

$\omega = \chi_\Lambda$

è COSTANTE?

(è soluzione stazionaria?)

- $\Lambda = \emptyset$
- $\Lambda = \{|x| \leq 1\}$ (cerchio)



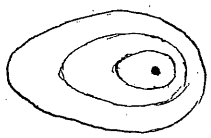
ci aspettiamo che, data la simmetria dell'equazione, una situazione iniziale simmetrica si evolva simmetricamente $O \to o$ un cambiamento di raggio determinerebbe una variazione dell'energia

Ci chiediamo quando una SOLUZIONE STAZIONARIA sia STABILE

OSSERVAZIONE

Quali CRITERI conosciamo per determinare la STABILITÀ di un equilibrio?

MINIMO DELL'ENERGIA:



E è una quantità conservata

$A_r = \{x : E < r\}$ BASE DI INTORNI del punto di equilibrio

IN GENERALE al posto dell'energia possiamo usare un FUNZIONALE DI LIAPUNOV opportuno:

TEOREMA (LIAPUNOV)

Se ESISTE $\mathcal{L}$ che ha MINIMO STRETTO nell'equilibrio

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \leq 0$$

allora l'EQUILIBRIO è STABILE

OSSERVAZIONE

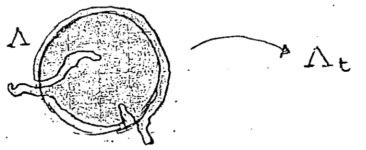
In questo caso, poiché si hanno INFINITI GRADI DI LIBERTÀ, NON possiamo applicare il TEOREMA DI LIAPUNOV così com'è

TEOREMA

Sia $\bar{\Lambda} = \{|x| \leq 1\}$

$\bar{\omega} = \chi_{\bar{\Lambda}}$ SOLUZIONE STAZIONARIA

$\bar{\omega}$ è STABILE (in L^1) per perturbazioni che siano patch della stessa area



QUANTITÀ CONSERVATE ($D = \mathbb{R}^2$)

AFFERMAZIONE

Si conservano

$$\int \underline{x}\, \omega(\underline{x},t)\, d\underline{x}$$

$$\int x^2\, \omega(\underline{x},t)\, d\underline{x} \qquad \text{"MOMENTO D'INERZIA"}$$

DIMOSTRAZIONE

$$\frac{d}{dt} \int \underline{x}\, \omega(\underline{x},t)\, d\underline{x} = \frac{d}{dt} \int \Phi_t(\underline{x})\, \omega_0(\underline{x})\, d\underline{x} =$$

$$= \int \underline{u}(\Phi_t(\underline{x}),t)\, \omega_0(\underline{x})\, d\underline{x} = \underbrace{\int \underline{u}(\underline{x},t)\, \omega(\underline{x},t)\, d\underline{x}}_{} =$$

"moralmente"

$$= -\int \underline{u} \cdot \nabla^{\perp} \underline{u} = -\int \nabla^{\perp} \frac{u^2}{2} = 0$$

(VERSIONE DIFFERENZIALE)

$$= \int d\underline{x}\, d\underline{y} \left(-\frac{1}{2\pi}\right) \frac{\underline{x}^{\perp} - \underline{y}^{\perp}}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}\, \omega(\underline{x},t)\, \omega(\underline{y},t) \underset{\underline{x} \leftrightarrow \underline{y}}{=}$$

$$= -\int d\underline{x}\, d\underline{y} \left(-\frac{1}{2\pi}\right) \frac{\underline{x}^{\perp} - \underline{y}^{\perp}}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}\, \omega(\underline{x},t)\, \omega(\underline{y},t) = 0$$

ESERCIZIO

Dimostrare che

$$\frac{d}{dt} \int x^2\, \omega(\underline{x},t)\, d\underline{x} = 0$$

[Suggerimento: Usare lo stesso trucco e sfruttare il fatto che $\underline{x} \cdot \underline{x}^{\perp} = 0$]

$$\frac{d}{dt} \int x^2\, \omega(\underline{x},t)\, d\underline{x} = \frac{d}{dt} \int [\Phi_t(\underline{x})]^2\, \omega_0(\underline{x})\, d\underline{x} = 2 \int \Phi_t(\underline{x}) \cdot \underline{u}(\Phi_t(\underline{x}),t)\, \omega_0(\underline{x})\, d\underline{x} =$$

$$= 2 \int \underline{x} \cdot \underline{u}(\underline{x},t)\, \omega(\underline{x},t)\, d\underline{x} = -\frac{1}{\pi} \int \underline{x} \cdot \frac{\underline{x}^{\perp} - \underline{y}^{\perp}}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}\, \omega(\underline{x},t)\, \omega(\underline{y},t)\, d\underline{x}\, d\underline{y} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int \frac{\overset{= -\underline{x}^{\perp} \cdot \underline{y}}{\underline{x} \cdot \underline{y}^{\perp}}}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}\, \omega(\underline{x},t)\, \omega(\underline{y},t)\, d\underline{x}\, d\underline{y} \underset{\underline{x} \leftrightarrow \underline{y}}{=} -\frac{1}{\pi} \int \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}^{\perp}}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}\, \omega(\underline{x},t)\, \omega(\underline{y},t)\, d\underline{x}\, d\underline{y} = 0$$

ESERCIZIO

$\omega \in L^1 \cap L^\infty (\mathbb{R}^2)$

$$\int x^2 \, |\omega(\underline{x})| \, d\underline{x} < +\infty$$

Dimostrare che

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{|\underline{x}|<R} \underline{u}(\underline{x}) \, d\underline{x} = C \int \underline{x}^\perp \, \omega(\underline{x}) \, d\underline{x}$$

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{|\underline{x}|<R} \underline{x}^\perp \cdot \underline{u}(\underline{x}) \, d\underline{x} = C \int x^2 \, \omega(\underline{x}) \, d\underline{x}$$

STABILITÀ DEL PATCH

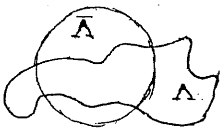
$\bar{\Lambda} = \{ |\underline{x}| \leq 1 \}$

$\Lambda \subset \mathbb{R}^2 \qquad |\Lambda| = |\bar{\Lambda}|$

$\omega_{\bar{\Lambda}} = \chi_{\bar{\Lambda}}$

$\omega_{\Lambda} = \chi_{\Lambda}$

$\Lambda_t = \Phi_t(\Lambda) \qquad \omega_t = \chi_{\Lambda_t}$



$J_{\Lambda_t} = \int_{\Lambda_t} x^2 \, d\underline{x} = \int x^2 \, \omega_t(\underline{x}) \, d\underline{x}$ COSTANTE

$\min_{|\Lambda|=|\bar{\Lambda}|} \int_\Lambda x^2 \, d\underline{x}$ è ottenuto per $\Lambda = \bar{\Lambda}$ ← x^2 cresce al crescere del raggio

Allora definiamo la seguente FUNZIONE DI LIAPUNOV:

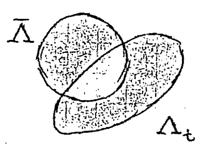
$$J_{\Lambda_t} - J_{\bar{\Lambda}} = J_{\Lambda} - J_{\bar{\Lambda}}$$
$$= \int_\Lambda x^2 - \int_{\bar{\Lambda}} x^2$$
$$= \int x^2 (\omega_\Lambda - \omega_{\bar{\Lambda}})$$
$$\leq \int x^2 |\omega_\Lambda - \omega_{\bar{\Lambda}}|$$

Vogliamo stimare dal basso

$$J_{\Lambda_t} - J_{\bar{\Lambda}} = \int_{\Lambda_t} x^2 - \int_{\bar{\Lambda}} x^2 =$$
$$= \int_{\Lambda_t \setminus \bar{\Lambda}} x^2 - \int_{\bar{\Lambda} \setminus \Lambda_t} x^2$$

Ora,

$$|\bar{\Lambda} \setminus \Lambda_t| = |\Lambda_t \setminus \bar{\Lambda}| =: \delta_t = \tfrac{1}{2} |\bar{\Lambda} \Delta \Lambda_t|$$
$$= \tfrac{1}{2} \| \omega_{\bar{\Lambda}} - \omega_{\Lambda_t} \|_1$$



Se stimiamo

$$\int_{\Lambda_t \setminus \bar{\Lambda}} x^2 \, dx \geq \int_{\Lambda_t \setminus \Lambda} dx = \delta_t$$

$$\int_{\bar{\Lambda} \setminus \Lambda_t} x^2 \, dx \leq \int_{\bar{\Lambda} \setminus \Lambda_t} dx = \delta_t$$

otteniamo solo che

$$J_{\Lambda_t} - J_{\bar{\Lambda}} \geq 0$$

cioè che $\bar{\Lambda}$ dà il minimo (dimostrazione formale)

Osserviamo che se riarrangiamo simmetricamente l'area della regione esterna otteniamo un integrale più piccolo

Il minimo si ottiene per una corona circolare

$$C_+ = \{1 < |x| < r^+\}$$

$$\pi\left((r^+)^2 - 1\right) = \delta_t$$

Allora

$$\int_{\Lambda_t \setminus \bar{\Lambda}} x^2 \, d\underline{x} \geq \int_{C_+} x^2 \, d\underline{x} = 2\pi \int_1^{r^+} d\rho \, \rho^3 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[(r^+)^4 - 1\right] = \frac{\pi}{2}\left[\left(1 + \frac{\delta_t}{\pi}\right)^2 - 1\right] = \frac{\pi}{2}\left[\cancel{1} + \frac{2\delta_t}{\pi} + \frac{\delta_t^2}{\pi} - \cancel{1}\right]$$

e analogamente per la regione interna:

$$\int_{\bar{\Lambda} \setminus \Lambda_t} x^2 \, d\underline{x} \leq \int_{C_-} x^2 \, d\underline{x} = 2\pi \int_{r^-}^1 d\rho \, \rho^3 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 - (r^-)^4\right] = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{\delta_t}{\pi}\right)^2\right] = \frac{\pi}{2}\left[\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{2\delta_t}{\pi} - \frac{\delta_t^2}{\pi}\right]$$

Quindi

$$J_{\Lambda_t} - J_{\bar{\Lambda}} \geq \frac{\pi}{2}\left[\cancel{\frac{2\delta_t}{\pi}} + \frac{\delta_t^2}{\pi^2} - \cancel{\frac{2\delta_t}{\pi}} + \frac{\delta_t^2}{\pi^2}\right] = \frac{\delta_t^2}{\pi} = \frac{1}{4\pi}\|\omega_t - \bar{\omega}\|_{L^1}^2 \quad ?$$

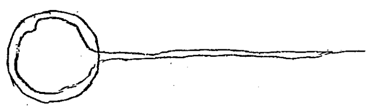
e in definitiva

$$\underbrace{\frac{1}{4\pi}\|\omega_t - \bar{\omega}\|_{L^1}^2}_{\text{tempo } t} \leq J_{\Lambda_t} - J_{\bar{\Lambda}} = J_{\Lambda} - J_{\bar{\Lambda}} \leq \underbrace{\int x^2 \, |\omega_\Lambda - \omega_{\bar{\Lambda}}| \, d\underline{x}}_{\text{tempo } 0}$$

se $A \subseteq \{|x| \leq R\}$ possiamo stimare l'integrale a destra con

$$R^2 \|\omega_\Lambda - \omega_{\bar{\Lambda}}\|_{L^1}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>



Il motivo per cui non possiamo mettere x^2 nell'integrale a sinistra è che Λ_t potrebbe essere un "FILAMENTO" e quindi $|x|$ potrebbe crescere molto ($\sim t^{1/3}$)

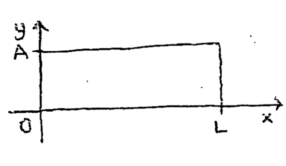
<u>OSSERVAZIONE</u> (COROLLARIO)

Sia $\omega = \omega(|x|)$ ($\Rightarrow$ soluzione stazionaria) con ω in $L^1 \cap L^\infty$

Se $\omega(r)$ è NON CRESCENTE

$\Rightarrow$ è stabile in $L^1 \cap L^\infty$ (per perturbazioni a supporto compatto)

ESERCIZIO



$D = [0, L] \times [0, A]$ periodico in x

(i) Si conserva $\int y \, \omega(x, y) \, dx \, dy$

(ii) Sia $\bar{\omega} = \chi_{\bar{\Lambda}}$ con $\bar{\Lambda} = \{0 \leq y \leq a < A\}$

Provare che $\bar{\omega}$ è stabile per perturbazioni $\omega = \chi_\Lambda$ con $|\Lambda| = |\bar{\Lambda}|$

CASO $\underline{u}$ REGOLARE $\quad \underline{u} \in C^3(D)$

D *limitato*

Equilibri:

$$\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = (\pm)\, \omega\, \underline{u}^\perp + \nabla \frac{u^2}{2}$$

$$\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = \underline{\omega \times \underline{u}} + \nabla \frac{\underline{u}^2}{2}$$

$$\parallel$$

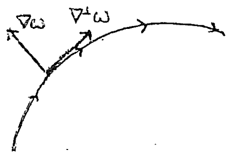
$$-\omega \times \underline{u} = \omega \cdot \underline{u}^\perp$$

$\underline{u}$ è di equilibrio

$\iff \omega \underline{u}^\perp$ è potenziale

$\iff \nabla^\perp(\omega \underline{u}^\perp) = 0 \quad \longleftarrow \quad \nabla^\perp(\omega \underline{u}^\perp) = \nabla^\perp \omega \cdot \underline{u}^\perp + \omega\, \underbrace{\nabla^\perp \cdot \underline{u}^\perp}_{= -\nabla \cdot \underline{u} = 0}$

$\iff \boxed{\nabla^\perp \omega \cdot \underline{u}^\perp = 0}$



$\nabla \omega \cdot \underline{u} = 0$ basta che valga in a tal flusso!

$\boxed{\nabla^\perp \omega \parallel \underline{u}}$

$\iff \omega$ è costante sul flusso

$\Downarrow$

ω è costante al bordo

(N.B. Il flusso è tangente al bordo)

$\underline{u} \parallel \nabla^\perp \omega$

$\Downarrow \longleftarrow \underline{u} = \nabla^\perp \psi$

$\nabla^\perp \psi \parallel \nabla^\perp \omega$

$\Downarrow$

$\nabla \psi \parallel \nabla \omega \implies \psi$ e ω hanno le stesse curve di livello

$\Downarrow$

LOCALMENTE esiste F t.c. $\psi = F(\omega)$

$\psi = F(\omega)$

$\nabla^\perp \psi = F'(\omega)\, \nabla^\perp \omega$

$\underline{u} = F'(\omega)\, \nabla^\perp \omega$

TEOREMA (I TEOREMA DI ARNOLD)

Sia $\bar{\underline{u}}$ (e $\bar{\omega}$) soluzione di equilibrio in D t.c.
esiste GLOBALE F t.c.

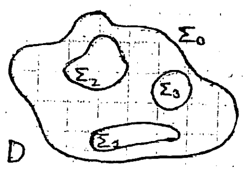
$$\bar{\underline{u}} = F'(\bar{\omega})\, \nabla^\perp \bar{\omega}$$

con

$$0 < c_1 \leq -F'(\bar{\omega}(\underline{x})) \leq c_2 < +\infty$$

Allora
la soluzione è stabile in $\|u\|_2 + \|\omega\|_2$

DIMOSTRAZIONE



$\partial D = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_N \quad$ FRONTIERA ORIENTATA

Cerchiamo una funzione di Liapunov opportuna nella forma

$$H(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_D \underbrace{u^2(\underline{x})\, d\underline{x}}_{\text{energia}} + \int_D \underbrace{\varphi}_{\text{funzione qualsiasi (da scegliere)}}(\omega(\underline{x}))\, d\underline{x} + \sum_i a_i \oint_{\Sigma_i} \underline{u} \cdot d\underline{s}$$

conservata perché lo è ω

a_i: coefficienti (da scegliere)

$\oint_{\Sigma_i} \underline{u} \cdot d\underline{s}$: circuitazioni (costanti per Kelvin)

(il verso delle circuitazioni è scelto t.c. $\int_D \omega = \sum \oint_{\Sigma_i} \underline{u} \cdot d\underline{s}$)

SCEGLIAMO $\varphi, a_0, \dots, a_N$ in modo che H abbia un minimo in $\overline{\underline{u}}$

In particolare deve essere $\delta H(\overline{\underline{u}}) = 0$

$$\delta H(\overline{\underline{u}}) = \int_D \overline{\underline{u}}(\underline{x}) \cdot \delta \underline{u}(\underline{x})\, d\underline{x} + \int_D \varphi'(\omega)\, \delta\omega + \sum_i a_i \oint_{\Sigma_i} \delta \underline{u} \cdot d\underline{s} \stackrel{!}{=} 0$$

Abbiamo:

$$\int \varphi'(\overline{\omega})\, \delta\omega \underset{\text{rot} = -\nabla^\perp}{=} - \int_D \varphi'(\overline{\omega})\, \nabla^\perp \delta \underline{u} = - \underbrace{\int_D \nabla^\perp (\varphi'(\overline{\omega})\, \delta \underline{u})}_{=\ \sum_i \oint_{\Sigma_i} \varphi'(\overline{\omega})\, \delta \underline{u} \cdot d\underline{s}\ =\ \sum_i \varphi'(\overline{\omega})|_{\Sigma_i} \oint_{\Sigma_i} \delta \underline{u} \cdot d\underline{s}} + \int_D \varphi''(\overline{\omega})\, \nabla^\perp \overline{\omega} \cdot \delta \underline{u}$$

Scegliamo allora i coefficienti a_i come

$$a_i = - \varphi'(\overline{\omega})|_{\Sigma_i}$$

Inoltre, in tal caso, poiché $\delta \underline{u}$ è arbitrario,

$$\delta H(\overline{\underline{u}}) = 0 \Rightarrow \varphi''(\overline{\omega})\, \nabla^\perp \overline{\omega} + \overline{\underline{u}} = 0$$

Per ipotesi è

$$\underline{u} = F'(\omega)\, \nabla^\perp \omega$$

Scegliamo φ t.c.

$$\varphi'' = -F'$$

L'ipotesi

$$0 < c_1 \leq -F' \leq c_2$$

si traduce in

$$0 < c_1 \leq \varphi'' \leq c_2$$

Verifichiamo che H ha un minimo stretto in $\underline{u} = \overline{\underline{u}}$:

$$H(\underline{u}) - H(\overline{\underline{u}}) = \frac{1}{2} \int_D (u - \overline{u})^2 + \cancel{\int_D \overline{\underline{u}} \cdot (\underline{u} - \overline{\underline{u}})}_{①} + \cancel{\int_D \varphi'(\overline{\omega})(\omega - \overline{\omega})}_{②} +$$

$$+ \int_D \frac{\varphi''(\xi)}{2} (\omega - \overline{\omega})^2 + \cancel{\sum_i a_i \oint_{\Sigma_i} (\underline{u} - \overline{\underline{u}}) \cdot d\underline{s}}_{③}$$

Lagrange: $\xi \in [\overline{\omega}, \omega]$

dove abbiamo sfruttato il fatto che ① + ② + ③ = 0 perché $\delta H(\overline{\underline{u}}) = 0$.

Allora

$$\frac{1}{2} \int_D |\underline{u} - \overline{\underline{u}}|^2 + \frac{c_1}{2} \int |\omega - \overline{\omega}|^2 \leq H(\underline{u}) - H(\overline{\underline{u}}) \leq \frac{1}{2} \int_D |\underline{u} - \overline{\underline{u}}|^2 + \frac{c_2}{2} \int |\omega - \overline{\omega}|^2$$

Stabilità:

Sia

$$\| \underline{u}_0 - \overline{\underline{u}} \|^2_{L^2} + \| \omega_0 - \overline{\omega} \|^2_{L^2} < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \forall t \quad \| \underline{u}_t - \overline{\underline{u}} \|^2_{L^2} + \| \omega_t - \overline{\omega} \|^2_{L^2} \leq C \varepsilon^2$$

Infatti in tal caso si ha

$$H(\underline{u}_0) - H(\overline{\underline{u}}) \leq C \varepsilon^2 \qquad (C = \tfrac{1}{2} \max\{1, c_2\})$$

Ma $H(\underline{u}_t)$ è costante e dunque

$$\forall t \quad H(\underline{u}_t) - H(\overline{\underline{u}}) \leq C \varepsilon^2 \Rightarrow \| \underline{u}_t - \overline{\underline{u}} \|^2_{L^2} + \| \omega_t - \overline{\omega} \|^2_{L^2} \leq \tilde{C} \varepsilon^2 \ \#$$

$$\tilde{C} = C \cdot \frac{1}{\max\{1, c_1\}}$$

OSSERVAZIONE

E se $\overline{\underline{u}}$ è un MASSIMO STRETTO?

Dobbiamo fare una richiesta ulteriore per la costante $c_1 > 0$ che limita da sotto il rapporto

$\dfrac{\overline{\underline{u}}}{\nabla^\perp \overline{\omega}} = -\varphi''(\overline{\omega})$ ← sono paralleli ⇒ il rapporto è ben definito ed è un numero reale

Tale richiesta dipende solo dalla GEOMETRIA del dominio (in particolare dal minimo autovalore del Laplaciano)

TEOREMA (II TEOREMA DI ARNOLD)

Ipotesi:

$$0 < c_1 \leqslant \frac{\overline{\underline{u}}}{\nabla^\perp \overline{\omega}} \leqslant c_2 < +\infty$$

IN PIÙ

$$c_1 > \alpha$$

dove α è t.c.

$$\boxed{\forall \varphi \quad \|\nabla\varphi\|^2_{L^2} \leqslant \alpha \, \|\Delta\varphi\|^2_{L^2}}$$

← DISUGUAGLIANZA TIPO POINCARÉ

Tesi:

$\underline{u}$ è stabile in $\|\underline{u} - \overline{\underline{u}}\|_{L^2} + \|\omega - \overline{\omega}\|_{L^2}$

OSSERVAZIONE

$\underline{u} = \nabla^\perp \psi$

$\omega = -\Delta\psi$

$\|\omega\|^2_{L^2} \leqslant \|\underline{u}\|^2_{L^2} + \|\omega\|^2_{L^2} \leqslant (1+\alpha)\, \|\omega\|^2_{L^2}$

cioè $\|\omega\|^2_{L^2}$ è equivalente a $\|\underline{u}\|^2_{L^2} + \|\omega\|^2_{L^2}$

DIMOSTRAZIONE

Si procede in maniera IDENTICA che per la dimostrazione precedente fino alla seguente espressione

$$H(\underline{u}) - H(\overline{\underline{u}}) = \frac{1}{2}\int (\underline{u} - \overline{\underline{u}})^2 + \frac{1}{2}\int \varphi''(\xi)(\omega - \overline{\omega})^2$$

Di qui abbiamo $\varphi'' = -F' \implies -c_2 \leqslant \varphi'' \leqslant -c_1$

$$\frac{1}{2}\int(\underline{u} - \overline{\underline{u}})^2 - \frac{c_2}{2}\int(\omega - \overline{\omega})^2 \leqslant H(\underline{u}) - H(\underline{u}) \leqslant \frac{1}{2}\int(\underline{u} - \overline{\underline{u}})^2 - \frac{c_1}{2}\int(\omega - \overline{\omega})^2$$

N.B. Si ha

$$\int |\delta\underline{u}|^2 = \int |\nabla^\perp \delta\psi|^2 \leqslant \alpha \int |\Delta\delta\psi|^2 = \alpha \int |\delta\omega|^2$$

QUINDI POSSIAMO STIMARE

$$-\frac{c_2 - \alpha}{2}\int(\delta\omega)^2 \leqslant H(\underline{u}) - H(\overline{\underline{u}}) \leqslant -\frac{c_1 - \alpha}{2}\int(\delta\omega)^2$$

DUNQUE $H(\underline{u}) - H(\overline{\underline{u}})$ ha un massimo quadratico in $\overline{\omega}$ nella norma L^2

da cui segue la tesi #

ESERCIZIO

$D = [0,L] \times [0,A]$ canale periodico

Rifare il I Teorema di Arnold con

$$H(\underline{u}) + \lambda \int_D y\, \omega(x,y)$$

Scopriamo stabilità se

$$0 < c_1 \leq -\frac{\overline{U} + \lambda}{\nabla^\perp \omega} \leq c_2 < +\infty \quad \forall \lambda$$

$$= \frac{u_1(y) + \lambda}{\partial_y^2 u_1(y)}$$

$\Rightarrow$ La stabilità è assicurata se $\partial_y^2 u_1(y) > 0 \Rightarrow u_1$ convessa

OSSERVAZIONE

EQUILIBRI con $\omega = 0$

① D semplicemente connesso $\Rightarrow \underline{u} \equiv \underline{0}$

$\frac{1}{2}\int u^2$

② D non semplicemente connesso

Esistono flussi potenziali non banali fissata

$$\oint \underline{u} \cdot d\underline{s} = \Gamma$$

① e ② sono stabili in $\|\omega\|_\infty$ (in $\|\omega\|_p$ $\forall p$)

NORMA $\equiv$ FUNZIONALE DI LIAPUNOV

II TEOREMA DI ARNOLD

Ipotesi:

$$0 < c_1 \leqslant \frac{\underline{\bar{U}}}{\nabla^\perp \bar{\omega}} \leqslant c_2 < +\infty$$

$$c_1 > \alpha$$

dove $\|\nabla\varphi\|_2^2 \leqslant \alpha \|\Delta\varphi\|_2^2$

Tesi:

$H(\underline{u})$ ha un massimo stretto in $\underline{\bar{U}}$

in particolare

$$\frac{c_1-\alpha}{2}\|\omega-\bar{\omega}\|_2^2 \leqslant H(\underline{\bar{U}}) - H(\underline{u}) \leqslant \frac{c_2-\alpha}{2}\|\omega-\bar{\omega}\|_2^2$$

$$\|\omega-\bar{\omega}\|_2^2 \leqslant \|\underline{u}-\underline{\bar{U}}\|_2^2 + \|\omega-\bar{\omega}\|_2^2 \leqslant (1+\alpha)\|\omega-\bar{\omega}\|_2^2$$

ESEMPIO (NON APPLICABILITÀ)

$D = [0,L] \times [0,2\pi]$ periodico ai bordi (TORO)

$$\underline{\bar{U}} = \begin{pmatrix} \sin y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\omega} = -\nabla^\perp \underline{\bar{U}} = -\partial_y \sin y = -\cos y$$

$$\nabla^\perp \bar{\omega} = \begin{pmatrix} \sin y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\underline{\bar{U}}}{\nabla^\perp \bar{\omega}} = 1 < +\infty \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1 \leqslant c_2$$

Abbiamo stabilità se $\boxed{\alpha < 1}$

CALCOLO DI α PER D:

φ periodica

$$\varphi = \sum_{\underline{K}\in\mathbb{Z}^2} \hat{\varphi}_{\underline{K}}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{L}K_1 x + K_2 y\right)}$$

$$\nabla\varphi = i\sum_{\underline{K}\in\mathbb{Z}^2} \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{L}K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \hat{\varphi}_{\underline{K}}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{L}K_1 x + K_2 y\right)}$$

$$\Delta\varphi = -\sum_{\underline{K}\in\mathbb{Z}^2} \left[\left(\frac{2\pi}{L}K_1\right)^2 + K_2^2\right]\cdot \hat{\varphi}_{\underline{K}}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{L}K_1 x + K_2 y\right)}$$

$$\|\varphi\|_2^2 = \int dx\, |\varphi(x)|^2 = \sum_{\underline{K}} |\hat{\varphi}_{\underline{K}}|^2$$

Ci chiediamo per quali α sia vera

$$\|\nabla\varphi\|_2^2 \leqslant \alpha \|\Delta\varphi\|_2^2$$

cioè

$$\sum_{\underline{K}}\left[\left(\frac{2\pi}{L}K_1\right)^2 + K_2^2\right]|\hat{\varphi}_{\underline{K}}|^2 \leqslant \alpha \sum_{\underline{K}}\left[\left(\frac{2\pi}{L}K_1\right)^2 + K_2^2\right]^2 |\hat{\varphi}_{\underline{K}}|^2 \quad \forall\varphi$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall K_1, K_2 \quad \left(\frac{2\pi}{L}K_1\right)^2 + K_2^2 \leqslant \alpha\left[\left(\frac{2\pi}{L}K_2\right)^2 + K_2^2\right]^2$$

Candidato: $\alpha = 1$

Se $L > 2\pi$ FALSA

Se $L \leq 2\pi$ VERA

Domanda:

$$\underline{\overline{u}} = \begin{pmatrix} \sin y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{è stabile?}$$

$$\frac{\overline{u}}{\nabla^{\perp}\overline{\omega}} \equiv 1 = c_1 = \alpha \quad \not\Rightarrow \text{ stabilità}$$

Infatti non vale la disuguaglianza a sinistra:

$$0 = \frac{c_1 - \alpha}{2} \|\omega - \overline{\omega}\|_2^2 \leq H(\underline{\overline{u}}) - H(\underline{u}) \leq C \|\omega - \overline{\omega}\|_2^2$$

Sia S il sottospazio di L^2 definito da

$L = 2\pi \qquad S = \overline{\{\sin x, \sin y, \cos x, \cos y\}}^{L^2}$

$L < 2\pi \qquad S = \overline{\{\sin y, \cos y\}}^{L^2}$

Se $\varphi \perp S$ (cioè $\varphi \in S^{\perp}$) $\Rightarrow \|\nabla\varphi\|_2^2 \leq \overline{\alpha} \|\Delta\varphi\|_2^2$ con $\overline{\alpha} < 1$

Sia $P_{S^\perp}\omega$ la proiezione di ω sul sottospazio $S^\perp$:

$$\|P_{S^\perp}(\omega - \overline{\omega})\|_2^2 \left(\frac{1-\overline{\alpha}}{2}\right) \leq H(\underline{\overline{u}}) - H(\underline{u}) \leq C \|\omega - \overline{\omega}\|_2^2$$

$\Rightarrow S$ è un sottospazio stabile, anche se non sappiamo se lo sono le singole soluzioni

[Siano P_S e $P_{S^\perp}$ le proiezioni:

$$\|\nabla\varphi\|_2^2 = \|\nabla P_S \varphi\|_2^2 + \|\nabla P_{S^\perp}\varphi\|_2^2$$
$$\leq \|\Delta P_S \varphi\|_2^2 + \overline{\alpha} \|\Delta P_{S^\perp}\varphi\|_2^2 \quad \text{con } \overline{\alpha} < 1$$

Contano solo $K_1, K_2 = 0, \pm 1$

Nella dimostrazione del II Teorema di Arnold

$$H(\underline{u}) - H(\underline{\overline{u}}) \geq \frac{1}{2} \|\omega - \overline{\omega}\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\underline{u} - \underline{\overline{u}}\|_2^2 \geq \frac{1-\overline{\alpha}}{2} \|P_{S^\perp} \delta\omega\|_2^2$$

$$\|\delta u\|_2^2 = \|P_S \delta u\|_2^2 + \|P_{S^\perp} \delta u\|_2^2 \leq \|P_S \delta\omega\|_2^2 + \overline{\alpha} \|P_{S^\perp}\delta\omega\|_{L^2}^2$$

Esercizio: Calcolare $\overline{\alpha}$]

$L < 2\pi \qquad \overline{\alpha} = \max\left(\frac{L^2}{(2\pi)^2}, \frac{1}{4}\right)$

$L = 2\pi \qquad \overline{\alpha} = \frac{1}{4}$

OSSERVAZIONE

Tipico teorema di stabilità:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

Linearizzato:

$$\dot{y} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=0} y$$

$$\begin{cases} \text{se } \exists \text{ autovalore} > 0 \text{ per } \frac{\partial F}{\partial x} \Rightarrow x = 0 \text{ instabile (esponenzialmente)} \\ \text{se } \operatorname{Re}\lambda < 0 \ \forall \lambda \text{ autovalore} \Rightarrow x = 0 \text{ asintoticamente stabile} \end{cases}$$

In DIMENSIONE INFINITA non è ben chiaro come fare il passaggio
LINEARIZZATO $\rightsquigarrow$ NON LINEARE
(in alcuni casi è FALSO che l'esistenza di un autovalore con parte reale positiva implichi l'instabilità)