PRINCIPIO VARIAZIONALE PER FLUIDI NON VISCOSI

Abbiamo ricavato le equazioni dei fluidi dalle EQUAZIONI CARDINALI, usando PRINCIPI PRIMI e LEGGI COSTITUTIVE

Esse possono essere ricavate a LIVELLO CINETICO dove l'incognita è una $f(\underline{x}, \underline{v}, t)$ densità nello spazio delle fasi e si hanno le EQUAZIONI DI BOLTZMANN per i GAS RAREFATTI

L'unica derivazione rigorosa sarebbe a LIVELLO DINAMICO, attraverso le EQUAZIONI DI NEWTON

$$m\ddot{x}_i = F_i$$

ma non si riesce a passare da qui direttamente ai PRINCIPI PRIMI

Torniamo al sistema

$$(EI)\begin{cases} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p \end{cases} \qquad u, p \text{ incognite}$$

Vorremmo chiarire la natura di p

(EI) soddisfa un PRINCIPIO VARIAZIONALE di tipo "LAGRANGIANO CON VINCOLI"

Consideriamo l'azione

$$A = \int_0^T \left[\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - U(x) \right] dt$$

A è stazionaria $\iff m\ddot{x} = -\nabla U$

Se c'è un vincolo $(\varphi(x) = 0)$ abbiamo invece

$$m\ddot{x} = -\nabla U + R$$
REAZIONE VINCOLARE

Il moto deve essere ortogonale al vincolo

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un DOMINIO, ossia un aperto connesso con frontiera regolare

$\underline{u} : D \to \mathbb{R}^3$

$p : D \to \mathbb{R}$ regolari

CONDIZIONI AL BORDO:

$$\underline{u} \cdot \underline{n}|_{\partial D} = 0$$

(non c'è flusso dal bordo di D)

Noto $\Phi_t(\underline{x})$ sappiamo tutto:

$$u(\Phi_t(\underline{x}), t) = \frac{d}{dt} \Phi_t(\underline{x})$$

<u>AFFERMAZIONE</u>

Il moto che soddisfa (EI) rende stazionaria l'azione

$A = \int_0^T ds\, E$

TRA I MOTI INCOMPRIMIBILI

dove E_t è l'ENERGIA CINETICA del fluido al tempo t

Abbiamo

$$E_t = \frac{1}{2}\int_D \rho(\underline{x},t)\; v(\underline{x},t)^2\, d\underline{x} \qquad \text{(FORMULAZIONE EULERIANA)}$$

e in variabili lagrangiane

$$E_t = \frac{1}{2}\int_D \rho_0(\underline{x}) \left(\frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x})\right)^2 d\underline{x}$$

Sia ora $\rho_0 \equiv$ COSTANTE

Sia $\Phi_t(\underline{x})$ il FLUSSO da D in D con

$\frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x})$ tangente al bordo

Definiamo l'azione

$$A[\Phi] = \int_0^T dt \int_D d\underline{x}\ \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x})\right]^2$$

Sia

$$\mathcal{M}_{0,T} = \{\Phi_t(\underline{x}) :\ \Phi_0(\underline{x}) = \underline{x},\ \Phi_T(\underline{x}) = \overline{\Phi}(\underline{x}) \text{ incomprimibili}\}$$

lo spazio dei moti incomprimibili

Sia

$\Phi^\varepsilon \in \mathcal{M}_{0,T}$

una famiglia di flussi dipendente da ε con

$\Phi^0 = \Phi$

(cioè $\Phi^0_t(\underline{x}) = \Phi_t(\underline{x})$)

Allora

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} A[\Phi^\varepsilon] = 0 \iff \text{valgono (EI) per } \Phi$$

$$A[\Phi^\varepsilon] = \int_0^T ds \int_D d\underline{x} \; \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\Phi_t^\varepsilon(\underline{x})\right]^2$$

$\mathcal{M}_{0,T}$ = flussi INCOMPRIMIBILI da $\Phi_0(\underline{x}) = \underline{x}$ a $\bar{\Phi}(\underline{x})$ assegnato al tempo T

$\Phi_t^\varepsilon(\underline{x})$ variazione di ordine ε di $\Phi_t(\underline{x})$

Sia $\underline{v}(\underline{x})$ un campo regolare con $\underline{v}\cdot\underline{u}|_{\partial D} = 0$

Sia $\Phi_t^\varepsilon(\underline{x})$ soluzione di

$$\begin{cases} \frac{d}{d\varepsilon}\Phi_t^\varepsilon(\underline{x}) = \underline{v}(\Phi_t^\varepsilon(\underline{x}), t) \\ \Phi_t^0(\underline{x}) = \Phi_t(\underline{x}) \end{cases}$$

Allora

$$\frac{d}{d\varepsilon}A[\Phi^\varepsilon]\Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^T ds \int_D d\underline{x} \left[\frac{d\Phi_t^\varepsilon}{dt}\cdot\frac{d}{d\varepsilon}\frac{d\Phi_t^\varepsilon}{dt}\right]\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_0^T ds \int_D d\underline{x} \left[\frac{d\Phi_t}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\frac{d}{d\varepsilon}\Phi_t^\varepsilon(\underline{x})\right]\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_0^T ds \int_D d\underline{x} \left[\underline{u}(\Phi_t(\underline{x}),t)\cdot\frac{d}{dt}\underline{v}(\Phi_t(\underline{x}),t)\right] =$$

$$= \int_D d\underline{x} \left[\underline{u}(\Phi_t(\underline{x}),t)\cdot\underline{v}(\Phi_t(\underline{x}),t)\right]\Big|_0^T - \int_0^T ds \int_D d\underline{x}\left[\frac{d}{dt}\underline{u}(\Phi_t(\underline{x}),t)\cdot\underline{v}(\Phi_t(\underline{x}),t)\right]$$

Ora, poichè gli estremi sono fissi,

$\underline{v}(\underline{x},0) = \underline{v}(\underline{x},T) = \underline{0}$

e dunque

$$\frac{d}{d\varepsilon}A[\Phi^\varepsilon]\Big|_{\varepsilon=0} = -\int_0^T ds \int_D \underbrace{\frac{d}{dt}\underline{u}(\Phi_t(\underline{x}),t)}_{=\,(\partial_t\underline{u}+\underline{u}\cdot\nabla\underline{u})|_{\Phi_t(\underline{x}),t}}\cdot\underline{v}(\Phi_t(\underline{x}),t)\,d\underline{x} =$$

$$\overset{\text{INCOMPRIMIBILITÀ}}{=} -\int_0^T ds \int_D d\underline{x}\;(\partial_t\underline{u}+\underline{u}\cdot\nabla\underline{u})(\underline{x},t)\cdot\underline{v}(\underline{x},t)$$

Quindi

$$\frac{d}{d\varepsilon}A[\Phi^\varepsilon]\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \iff \int_0^T ds \int_D d\underline{x}\;(\partial_t\underline{u}+\underline{u}\cdot\nabla\underline{u})\cdot\underline{v}(\underline{x},t) = 0$$

$\forall\,\underline{v}$ a divergenza nulla (con $\underline{v}\cdot\underline{u}|_{\partial D}=0$)

$(\Phi_t^\varepsilon(\underline{x}) \in \mathcal{M}_{0,T} \iff \mathrm{div}\,\underline{v} = 0)$

LEMMA

$\int_D \underline{a}\cdot\underline{v} = 0 \quad \forall\,\underline{v}$ t.c. $\mathrm{div}\,\underline{v} = 0$, $\underline{v}\cdot\underline{u}|_{\partial D} = 0$

$\iff \underline{a} = -\nabla p$ ($\underline{a}$ è un CAMPO GRADIENTE)

Concludiamo che deve essere

$$\partial_t\underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u} = -\nabla p$$

TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE

Sia $\underline{u} \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$

[illegible]

$(\underline{u} \in C^1(D)\,,\ \|\partial \underline{u}\|_\infty < +\infty)$

con $\underline{u}\cdot\underline{n}|_{\partial D} = 0$

Allora

$\exists!\ \underline{v} \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ t.c. $\operatorname{div} \underline{v} = 0\,,\ \underline{v}\cdot\underline{n}|_{\partial D} = 0$

$\exists\ q \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$

tali che

$\underline{u} = \underline{v} + \nabla q$

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo che se $\underline{v}, q$ esistono, si ha

$\operatorname{div} \underline{u} = \operatorname{div} \underline{v} + \operatorname{div} \nabla q = \Delta q$

$\underline{u}\cdot\underline{n}|_{\partial D} = 0 = \underline{v}\cdot\underline{n}|_{\partial D} + \dfrac{\partial q}{\partial \underline{n}}\Big|_{\partial D}$ RIMANDATO, RISOLVO

$\int u\cdot\nabla p = 0.$

Dunque, se esiste, q risolve

$$\begin{cases} \Delta q = \operatorname{div} \underline{u} \\ \dfrac{\partial q}{\partial \underline{n}}\Big|_{\partial D} = \cancel{0}\ \underline{u}\cdot\underline{n} \end{cases}$$

che regolarità ha q ? ??

mi serve che [illegible]

(Cattura condizione di compatibilità) Così è 0

(PROBLEMA DI POISSON con CONDIZIONE AL BORDO DI NEUMANN)

Tale problema ha soluzione regolare unica a meno di costanti

Definiamo allora

$\underline{v} := \underline{u} - \nabla q$ #

N.B. su T (tan)

poi decomporre

$T = T^{div} \oplus T^{\nabla}$

$\hat{f}_K = (\mathbb{1} - \hat{n}\otimes\hat{n}) f_H + \hat{n}\otimes\hat{n}\, f_H$

è in L^2 è in L^2

ha div nulla

LEMMA (COROLLARIO)

$\int \underline{a}\cdot\underline{v} = 0 \quad \forall\, \underline{v}$ t.c. $\operatorname{div} \underline{v} = 0$

$\Rightarrow \underline{a}$ è un gradiente

$\underline{a}\cdot\underline{n}|_{\partial D} = 0 = \underline{v}\cdot\underline{n}|_{\partial D}$

DIMOSTRAZIONE

$\underline{a} = \underline{u} + \nabla q$

Per ogni $\underline{v}$ si ha

$\int (\underline{u} + \nabla q)\cdot\underline{v} = 0 \Rightarrow \int \underline{u}\cdot\underline{v} = 0$

Scegliamo $\underline{u} = \underline{v}$

$\int \underline{u}^2 = 0 \Rightarrow \underline{u} = \underline{0}$

$\Rightarrow \underline{a} = \nabla q$ #

OSSERVAZIONE

Noi abbiamo applicato il principio variazionale sullo spazio $\mathcal{M}$ dei moti ammissibili

Avremmo potuto farlo su moti qualunque usando i MOLTIPLICATORI DI

LAGRANGE ($\ddot{x} = -\lambda \nabla \varphi$ dove $\varphi(x) = 0$ è il vincolo...)

ESERCIZIO 1

Sia

$$A[\Phi] = \int_0^T ds \int_D dx \left[\frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x})\right]^2 + \int_0^T ds \int_D d\underline{x}\ \lambda(\underline{x},t)\left[\det\frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}} - 1\right]$$

Dimostrare che ← in questo caso il moto è qualunque (non ipotizziamo a priori l'incomprimibilità)

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} A = 0 \iff \text{valgono (EI)}$$

ESERCIZIO 2 $\boxed{\text{No}}$ φ ho c'ho un principio [illegible]...

Sia

$$A[\Phi] = \int_0^T ds \int_D d\underline{x} \left\{\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x})\right]^2 + W(\Phi_t(\underline{x}))\right\} \rho_0(\underline{x})$$

W assegnato

ρ_0 densità iniziale assegnata

forse $\int w(\rho(x,t))\,dx$

vera $\nabla G(\rho)$ con $G = \rho W'(\rho)$

Dimostrare che

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} A = 0 \iff \text{valgono (EC) per un'opportuna } W$$

ESERCIZIO 1

Facendo la variazione prima rispetto a λ si ottiene (ovviamente) che Φ deve soddisfare il vincolo, cioè

$$\int dx\, \lambda \left(\det \frac{\partial \Phi}{\partial x} - 1\right) = \int dx [illegible]$$

$$\det \frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}} \equiv 1$$

La condizione di stazionarietà è, integrando per parti,

$$\frac{d}{d\varepsilon} A[\Phi^\varepsilon]\Big|_{\varepsilon=0} = -\int_0^T \int_D \left[(\partial_t \underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u})(\underline{x},t) + \nabla\bar{\lambda}(\underline{x},t)\right]\cdot \underline{v}(\underline{x},t)\, d\underline{x}\, dt = 0$$

dove $\bar{\lambda}(\underline{x},t) = \lambda(\Phi_{-t}(\underline{x}),t)$. Per l'arbitrarietà di $\underline{v}$ ciò equivale a

$$\partial_t \underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u} = -\nabla\bar{\lambda}$$

ESERCIZIO 2

$$\frac{d}{d\varepsilon} A[\Phi^\varepsilon]\Big|_{\varepsilon=0} = -\int_0^T \int_D (\partial_t \underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u})\Big|_{\Phi_t(\underline{x}),t} \cdot \underline{v}(\Phi_t(\underline{x}),t)\, \rho_0(\underline{x})\, d\underline{x}\, dt$$

$$\rho_0(\underline{x}) = \rho(\Phi_t(\underline{x}),t)\, J(\underline{x},t)$$

$$+ \int_0^T \int_D \nabla W\Big|_{\Phi_t(\underline{x}),t} \cdot \underline{v}(\Phi_t(\underline{x}),t)\, \rho_0(\underline{x})\, d\underline{x}\, dt =$$

$$= -\int_0^T \int_D \rho(\underline{x},t)\left[\partial_t \underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u} - \nabla W\right](\underline{x},t)\cdot \underline{v}(\underline{x},t)\, d\underline{x}\, dt = 0$$

Quindi A è stazionaria se e solo se si ha

$$\rho\,(\partial_t \underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u} - \nabla W) = 0 \qquad W(\rho)$$

e per $W = -\nabla p/\rho$ otteniamo la tesi

"EQUILIBRI"

$\underline{u} \equiv \underline{0}$ è una configurazione d'equilibrio

$\Rightarrow p =$ costante

(caso non interessante).

Consideriamo un fluido incomprimibile in un CAMPO CONSERVATIVO:

$$\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p + g$$

$$g = -\nabla U$$

$$\Rightarrow \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla (p + U)$$

U non ha conseguenze dinamiche

Ora, però

$$\underline{u} \equiv \underline{0} \Rightarrow p + U \equiv \text{costante}$$

Allora

se la forza è solo quella di gravità: $-\nabla U = \underline{e}_3$ $(g=1)$

$$p \equiv \text{costante} = z \quad \text{(LEGGE DI STEVINO)}$$

rispetto al tempo

ESERCIZIO 1

Enunciare e dimostrare la legge di Archimede: un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del fluido spostato.

All'equilibrio, $g\, V_{immerso} = \rho_{fluido}\, g\, V_{fluido}$ e dunque $-\nabla U = V_{immerso}$ $(g=1)$ $\Rightarrow p = V_{immerso}\, z$

ESERCIZIO 2

Discutere gli equilibri per gas isoentropici con o senza campi potenziali esterni

$\partial_t \rho + \underline{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \operatorname{div} \underline{u} \Rightarrow \partial_t \rho \equiv 0 \Rightarrow \rho = \text{costante} = \rho_0$, $\rho_0 (\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) = -\nabla (p + U) \Rightarrow p + U \equiv \text{costante}$

FLUSSI STAZIONARI

Un flusso stazionario è uno tale che

$$\boxed{\partial_t \underline{u} = 0} \leftarrow \text{equilibrio dinamico}$$

$p = c \rho^\gamma$

ma non necessariamente $\underline{u} \equiv \underline{0}$ ← equilibrio statico

$\gamma \geq 1$

In questo caso l'equazione diventa

$$\boxed{\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p}$$

OSSERVAZIONE

$$(\underline{u} \cdot \nabla \underline{u})_i = u_j \partial_j u_i = u_j (\partial_j u_i - \partial_i u_j) + \underbrace{u_j \partial_i u_j}_{\partial_i \sum_j u_j^2/2}$$

Dunque, poichè

$$(\partial \underline{a} - (\partial \underline{a})^t) \cdot \underline{b} = (\nabla \wedge \underline{a}) \wedge \underline{b}$$

abbiamo che il primo pezzo coincide con

$$(\nabla \wedge \underline{u}) \wedge \underline{u} = \underline{\omega} \wedge \underline{u}$$

dove $\underline{\omega}$ è la VORTICITÀ

$$\Rightarrow \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = \underline{\omega} \wedge \underline{u} + \nabla \frac{u^2}{2}$$

$(u \cdot \nabla) u = \partial u\, u$
$= (\partial u - \partial u^t) u + \partial u^t u$
$\omega \wedge u + \nabla \frac{u^2}{2}$

Se $\underline{\omega} = \underline{0} \Rightarrow \underline{u}$ è di equilibrio $(p = \text{costante} - \frac{u^2}{2})$

I CAMPI IRROTAZIONALI SONO SOLUZIONI DI EQUILIBRIO

N.B. $\nabla \wedge \underline{u} = \underline{0} \implies$ LOCALMENTE $\underline{u}$ è gradiente (*)

(se D è semplicemente connesso $\Rightarrow \underline{u}$ è gradiente)

Si ha:

se D è semplicemente connesso vale l'uguaglianza

campi gradienti $\subseteq$ campi irrotazionali $\subset$ soluzioni di equilibrio

OSSERVAZIONE

RIMANDA prova

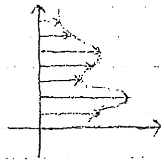
Esistono soluzioni di equilibrio non irrotazionali

ESEMPIO

FLUSSO LAMINARE

RIMANDA

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Si ha

$$\nabla \wedge \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\partial_2 u_1(x_2) \end{pmatrix} = \cancel{-\nabla \frac{u_1^2}{2}(x_2)} \implies (\nabla \wedge \underline{u}) \wedge \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_1 \partial_2 u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\nabla \frac{u_1^2}{2}$$

OSSERVAZIONE

In $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \underline{a}^\perp = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

Se

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} = \partial u_2 - \partial_2 u_1 = +\omega = -\nabla^\perp u$$

$$\nabla \wedge \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nabla^\perp \cdot \underline{u} \end{pmatrix}$$

dove

$$\nabla^\perp = \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix}$$

e cioè

$$-\nabla^\perp \cdot \underline{u} = \partial_2 u_1 - \partial_1 u_2$$

Nel piano

$$\boxed{\omega = -\nabla^\perp \cdot \underline{u}}$$

ESERCIZIO

In $\mathbb{R}^2$ sia

(*) x D semp connesso $u = \nabla\varphi \Rightarrow \Delta\varphi$ $\Rightarrow \partial u = 0$

$\partial_k \varphi \Rightarrow$

paolo lunedì

lunedì

$\underline{u}(\underline{x}) = f(|\underline{x}|)\, \underline{x}^{\perp}$

(i) In generale $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ $\quad \omega = -f'(|\underline{x}|)|\underline{x}| - 2f(|\underline{x}|) \neq 0$ in generale, $\omega = 0 \iff f = \frac{C}{|\underline{x}|^2}$

(ii) Soluzioni stazionarie $\underline{\omega} \wedge \underline{u} = -(f'(|\underline{x}|)|\underline{x}| + 2f(|\underline{x}|))\, f(|\underline{x}|)\, \underline{x}$ è sempre gradiente

(iii) Calcolare p

TEOREMA (BERNOULLI)

(i) Se $\underline{u}$ è di equilibrio $\Rightarrow \frac{1}{2}u^2 + p + U$ è costante lungo le traiettorie

(ii) $\nabla \wedge \underline{u} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 + p + U$ è costante in D

DIMOSTRAZIONE

se u è stazionaria, $p+U$ è indipendente dal tempo (perché $-(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u} = \nabla(p+U)$ lo è)

(i) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}u^2(\Phi_t(\underline{x})) + p(\Phi_t(\underline{x})) + U(\Phi_t(\underline{x}))\right) = \underline{u}\cdot\nabla(\dots)\Big|_{\Phi_t(\underline{x})} =$

$= \underline{u}\cdot((\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}) + \underline{u}\cdot\nabla(p+U) = 0$

$\underline{u}\cdot\nabla\underline{u} = -\nabla(p+U)$

(ii) $\nabla\left(p + U + \frac{u^2}{2}\right) = 0 = \underline{\omega}\wedge\underline{u} \Rightarrow \frac{u^2}{2} + p + U$ è costante #

ESERCIZIO

Discutere che se $\omega = \underline{0} \Rightarrow \underline{u}$ è stazionario e provare Bernoulli per (EC)

Nel caso di (EC) si ha per la stazionarietà l'equazione

$\partial_t \underline{u} = \underline{0}$

che implica la conservazione di

$\mathcal{E} = \frac{1}{2}u^2 + W(\rho) + U$

dove $W' = \frac{p'}{\rho}$

Poiché il flusso è stazionario, $\underline{u}$ soddisfa l'equazione di Eulero stazionaria

$(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u} = -\nabla(W+U)$

e usando l'identità $\frac{1}{2}\nabla u^2 = (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u} + \underline{u}\wedge(\nabla\wedge\underline{u})$ risulta

$\nabla\left(\frac{1}{2}u^2 + W + U\right) = \underline{u}\wedge(\nabla\wedge\underline{u})$

Ora si ha quindi

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}u^2(\Phi_t(\underline{x})) + W(\rho(\Phi_t(\underline{x}))) + U(\Phi_t(\underline{x}))\right) = \underline{u}\cdot\nabla(\dots\dots)\Big|_{\Phi_t(\underline{x})} =$

$= \underline{u}\cdot(\underline{u}\wedge(\nabla\wedge\underline{u})) = 0$

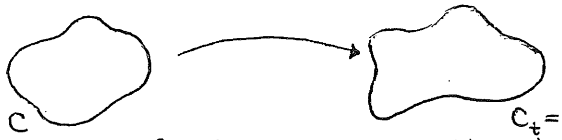
Se $\nabla\wedge\underline{u} = \underline{\omega} = \underline{0}$ si ha che

$\nabla\left(\frac{1}{2}u^2 + W + U\right) = \underline{0}$

TEOREMA (KELVIN)

Poi eq. vorticità 3D
per linearità
$\partial_\alpha x(\alpha) = \omega_0(x(\alpha))$
$\Updownarrow$
$\partial_\alpha \Phi^t(x(\alpha)) = \omega(\Phi^t(x(\alpha)), t)$
per Teo ~~Helmho~~ Helmholtz

$\underline{u}(\underline{x}, t)$ risolve (EI)



C — curva in $\mathbb{R}^3$ chiusa al tempo 0

$C_t = \Phi_t(C)$ — curva chiusa in $\mathbb{R}^3$ evoluta di C

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_t} \underline{u} \cdot d\underline{s} = 0$$

OSSERVAZIONE

Poichè

$$\oint_C \underline{u} \cdot d\underline{s} = \int_S \underbrace{\underline{\omega}}_{= \nabla \wedge \underline{u}} \cdot \underline{n}\ \sigma(d\underline{x})$$

dove S è una superficie t.c. $\partial S = C$

un'affermazione equivalente è

$$\frac{d}{dt} \int_{S_t} \underline{\omega} \cdot \underline{n}\ \sigma(d\underline{x}) = 0$$

DIMOSTRAZIONE

Scegliamo una parametrizzazione per C:

$\alpha \mapsto \underline{x}(\alpha) \qquad \alpha \in [0, \bar{\alpha}]$

Allora

$\alpha \mapsto \Phi_t(\underline{x}(\alpha))$

è una parametrizzazione per C_t

Dunque

$$\oint_{C_t} \underline{u}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{s} = \int_0^{\bar{\alpha}} \underline{u}(\Phi_t(\underline{x}(\alpha)), t) \cdot \frac{d}{d\alpha} \Phi_t(\underline{x}(\alpha))\, d\alpha =$$

$$= \int_0^{\bar{\alpha}} \underline{u}(\Phi_t(\underline{x}(\alpha)), t) \cdot \frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}}\Big|_{\underline{x}(\alpha)} \partial_\alpha \underline{x}(\alpha)\, d\alpha$$

Ora,

$$\frac{d}{dt} \underline{u}(\Phi_t(\underline{x}(\alpha)), t) = \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}\Big|_{\Phi_t(\underline{x}(\alpha)), t} = -\nabla p\Big|_{\Phi_t(\underline{x}(\alpha)), t}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}}(\underline{x}(\alpha)) = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}\Big|_{\Phi_t(\underline{x}(\alpha)), t} \frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}}$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_t} \underline{u} \cdot d\underline{s} = \int_0^{\bar{\alpha}} d\alpha\, (-\nabla p)\Big|_{\Phi_t(\underline{x}(\alpha)), t} \cdot \frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}}(\underline{x}(\alpha))\, \partial_\alpha \underline{x}(\alpha) +$$

$$+ \int_0^{\bar{\alpha}} d\alpha\, \underline{u}(\Phi_t(\underline{x}(\alpha)), t) \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}\Big|_{\Phi_t(\underline{x}(\alpha)), t} \frac{\partial \Phi_t}{\partial \underline{x}}(\underline{x}(\alpha))\, \partial_\alpha \underline{x} =$$

$$= \oint_{C_t} (-\nabla p) \cdot d\underline{s} + \oint_{C_t} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}\right)^t \underline{u} \cdot d\underline{s} =$$

$$= \oint_{C_t} \nabla\left(-p + \frac{u^2}{2}\right) d\underline{s} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{S_t} \nabla \wedge \left[\nabla\left(-p + \frac{u^2}{2}\right)\right] \sigma(d\underline{x}) \underset{\text{rot} \circ \text{grad} = 0}{=} 0 \qquad \#$$

CASO BIDIMENSIONALE

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1(x_1,x_2) \\ u_2(x_1,x_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix}$$

Detto

$$\underline{a}^\perp = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

si ha — solo la 3ª componente del rotore è non nulla $\Rightarrow$ identifichiamo ω con ω_3

$$\boxed{\omega = -\nabla^\perp \cdot \underline{u}}$$

(scalare)

$$\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p$$

In dimensione 2 + Equilibrio

$$\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\omega\, \underline{u}^\perp + \nabla \frac{u^2}{2}$$

[Verificare]

$$\nabla^\perp \cdot \nabla p = 0$$

$$\nabla^\perp \cdot \nabla \frac{u^2}{2} = 0$$

e quindi (usando $\underline{a}^\perp \cdot \underline{b}^\perp = \underline{a} \cdot \underline{b}$) abbiamo

$$\nabla^\perp \cdot (\omega\, \underline{u}^\perp) = \nabla^\perp \omega \cdot \underline{u}^\perp + \omega \underbrace{\nabla^\perp \cdot \underline{u}^\perp}_{= \nabla \cdot \underline{u}} = \underline{u} \cdot \nabla \omega + \omega \underbrace{\nabla \cdot \underline{u}}_{=0}$$ ← incomprimibilità

Applicando l'operatore $-\nabla^\perp$ alla prima equazione

$$\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p$$

otteniamo

$$(1) \quad \boxed{\partial_t \omega + \underline{u} \cdot \nabla \omega = 0}$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \omega(\Phi_t(\underline{x}), t) = 0$$

cioè

$$\omega(\Phi_t(\underline{x}), t) = \omega_0(\underline{x})$$

OSSERVAZIONE

Data ω, è possibile "ricostruire" univocamente $\underline{u}$ (cioè non abbiamo perso informazioni)

RICOSTRUZIONE DI $\underline{u}$

CASO 1

D dominio limitato semplicemente connesso

Data ω (che verifica (1))

$\exists!\ \underline{v}$ t.c. $\omega = -\nabla^{\perp}\underline{v}$

$\underline{v}\cdot\underline{u}|_{\partial D} = 0$

$\nabla\cdot\underline{v} = 0$

DIMOSTRAZIONE

$\nabla\cdot\underline{v} = 0$

$\overset{\parallel}{\nabla^{\perp}}\cdot\underline{v}^{\perp}$

$\Rightarrow \underline{v}^{\perp} = +\nabla\psi$

$\Rightarrow \underline{v} = -\nabla^{\perp}\psi$

$((\underline{a}^{\perp})^{\perp} = -\underline{a})$

ψ è detta FUNZIONE DI CORRENTE #

PROBLEMA

Data ω trovare $\underline{v}$ t.c.

$\nabla\cdot\underline{v} = 0$

$-\nabla^{\perp}\cdot\underline{v} = -\omega$

trovare ψ t.c.

$\underbrace{(-\nabla^{\perp})\cdot(-\nabla^{\perp}\psi)}_{\Delta\psi} = -\omega$

Dunque trovare $\underline{v}$ equivale a trovare ψ t.c.

$$(*)\begin{cases}\Delta\psi = -\omega \\ \psi|_{\partial D} = 0\end{cases}$$

+ Regolarità → RIFAI LEMMA,

$[\ \underline{v}\cdot\underline{u}|_{\partial D} = 0$

$\Rightarrow \nabla^{\perp}\psi\cdot\underline{u}|_{\partial D} = 0$

$\nabla\psi\cdot\underline{\tau}|_{\partial D} = 0 \iff \psi$ è costante al bordo $]$

Il problema $(*)$ (PROBLEMA DI POISSON con CONDIZIONI DI DIRICHLET) ha soluzione unica

INCISO

D dominio limitato

$$(P_1)\begin{cases}\Delta\varphi = 0 \\ \varphi|_{\partial D} = 0\end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla

$$(P_2)\begin{cases}\Delta\varphi = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\underline{u}}\Big|_{\partial D} = 0\end{cases}$$

ha come sole soluzioni le costanti

$[\ \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi) = |\nabla\varphi|^2 + \varphi\Delta\varphi = |\nabla\varphi|^2$

$\int_D |\nabla\varphi|^2 = \int_D \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)\,d\underline{x} = \int_D \varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = 0 \Rightarrow \nabla\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \text{costante}\ ]$

$$(PD)\begin{cases}\Delta\varphi = \omega \\ \varphi|_{\partial D} = 0\end{cases}$$

ha soluzione unica

[φ_1, φ_2 due soluzioni

$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \omega$ e quindi

$\Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$

$\varphi_1 - \varphi_2|_{\partial D} = 0$

$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$]

$$(PN)\begin{cases}\Delta\varphi = \omega \\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial \underline{u}}\right|_{\partial D} = 0\end{cases}$$

ha soluzione unica a meno di costanti

[Analogo]

$$(LD)\begin{cases}\Delta\varphi = 0 \\ \varphi|_{\partial D} = g\end{cases}$$

LAPLACE DIRICHLET U. Ommpra

ammette soluzione e tale soluzione è unica

$$(LN)\begin{cases}\Delta\varphi = 0 \\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial \underline{u}}\right|_{\partial D} = g\end{cases}$$

LAPLACE NEUMANN Non unique

ammette soluzione $\Leftrightarrow \int_{\partial D} g \, \sigma(d\underline{x}) = 0$

$\left[0 = \int_D \Delta\varphi = \int_{\partial D} \nabla\varphi \cdot u \right]$

e tale soluzione è unica a meno di costanti

<u>OSSERVAZIONE</u>

D semplicemente connesso (limitato)

ω data

$\underline{u} = -\nabla^{\perp}\psi$

$$\begin{cases}\Delta\psi = -\omega \\ \psi|_{\partial D} = 0\end{cases}$$

L'unicità di ψ implica quella di $\underline{u}$

DIMOSTRAZIONE

Siano $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ t.c. $\nabla^{\perp}\underline{u}_1 = \nabla^{\perp}\underline{u}_2$

$\underline{u}_1 - \underline{u}_2$ è irrotazionale $\Rightarrow$ è potenziale, ovvero $\underline{u}_1 - \underline{u}_2 = \nabla\varphi$

Usiamo $\operatorname{div} \underline{u} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases}\Delta\varphi = 0 \\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial \underline{u}}\right|_{\partial D} = 0\end{cases} \Rightarrow \varphi = \text{costante} \Rightarrow \underline{u}_1 \equiv \underline{u}_2 \quad \#$$

CASO 2

$D = \mathbb{T}^2$ toro bidimensionale

ESERCIZIO

RIMANDA

f funzione sul toro

$$\hat{f}(\underline{k}) = \int_{\mathbb{T}} e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}} f(\underline{x})\, d\underline{x}$$

Allora

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\underline{k}} e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}} \hat{f}(\underline{k})$$

(i) Scrivere la condizione $\operatorname{div} \underline{u} = 0$ (condizione di Fourier) che diventa una condizione algebrica sui coefficienti del campo $\hat{u}_k$

(ii) Risolvere in Fourier $-\omega = \nabla^{\perp}\cdot \underline{u}$ che sarà una relazione tra $\hat{\omega}_k$ e $\hat{u}_k$

Servirà la CONDIZIONE

$$\int_{\mathbb{T}} \omega = 0 \qquad (\hat{\omega}(0) = 0)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{T}} \omega = \int_{\mathbb{T}} \nabla^{\perp}\cdot \underline{u} = 0$$

(integrale di una divergenza su un dominio senza bordo)

(sul toro ω ha media nulla)

(i) $\operatorname{div} \underline{u} = 0 \iff \underline{k}\cdot \hat{\underline{u}}_{\underline{k}} = 0$

(ii) $-\hat{\omega}_{\underline{k}} = \underline{k}^{\perp}\cdot \hat{\underline{u}}_{\underline{k}}$

Per $\underline{k} = \underline{0}$ abbiamo $\hat{\omega}_{\underline{0}} = 0$ cioè

$$\int_{\mathbb{T}^2} \omega\, dx = 0$$

Se $k_2 = 0$ le due equazioni divengono

$$k_1 \hat{u}^1_{\underline{k}} = 0$$

$$k_1 \hat{u}^2_{\underline{k}} = -\hat{\omega}_{\underline{k}}$$

Altrimenti possiamo dividere per k_2 e otteniamo

$$\hat{u}^1_{\underline{k}}\left(\frac{k_1^2}{k_2} + k_2\right) = -\hat{\omega}_{\underline{k}}$$

$$\hat{u}^2_{\underline{k}} = -\frac{k_1}{k_2}\hat{u}^1_{\underline{k}}$$

CASO 3

$D = \mathbb{R}^2$

$\underline{u} = \nabla^{\perp}\psi \quad (\Leftarrow\!\Rightarrow \ \mathrm{div}\ \underline{u} = 0)$

$\Delta\psi = \nabla^{\perp}\cdot\nabla^{\perp}\psi = \nabla^{\perp}\cdot\underline{u} = -\omega$

$\Delta\psi = -\omega$ ← Poisson

Allora

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \ln|\underline{x}-\underline{y}|\ \omega(\underline{y})\, d\underline{y}$$

La funzione

$$G(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi}\ln|\underline{x}|$$ ← soluzione fondamentale del Laplaciano

è soluzione di

$$\Delta G = -\delta(\underline{x})$$

(in senso DISTRIBUZIONALE)

$\left(\text{cioè } \Delta\int G(x-y)\,\omega(y) = -\omega(x)\right)$

$$\underline{u} = \nabla^{\perp}\psi = \int d\underline{y}\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\frac{(\underline{x}-\underline{y})^{\perp}}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}\,\omega(\underline{y})$$

Data ω

$$\underline{u}(\underline{x}) = (\underline{K}*\omega)(\underline{x})$$

dove

$$\underline{K}(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\underline{x}^{\perp}}{|\underline{x}|}$$

TEOREMA

Se $\omega\in L^1\cap L^\infty \Rightarrow \underline{K}*\omega$ è un campo limitato

$\left(\text{anzi } \lim_{|\underline{x}|\to\infty}(\underline{K}*\omega)(\underline{x}) = 0\right)$

OSSERVAZIONE

In tutto $\mathbb{R}^2$ abbiamo due "problemi" possibili

① $\lim_{|\underline{x}|\to\infty} \underline{u}(\underline{x}) = \underline{0}$

Data ω esiste un'unica $\underline{u}$ con questa condizione al contorno ($\omega\in L^1\cap L^\infty$)

② $\lim_{|\underline{x}|\to\infty} \underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}_\infty$ fissato

Data $\omega\in L^1\cap L^\infty$ esiste unica $\underline{u}$ t.c. $\nabla^{\perp}\underline{u} = -\omega$

e $\underline{u}\to\underline{u}_\infty$ ed è $\underline{u} = \underset{\nabla(\underline{u}_\infty \underline{x})}{\underset{\parallel}{\underline{u}_\infty}} + \underline{K}*\omega$

Interessante perchè, invece di considerare un ostacolo che si muove in un fluido fermo, possiamo considerare l'ostacolo fermo e il fluido che si muove all'∞

CASO 3 : $\mathbb{R}^2$

$$\underline{K}(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\underline{x}^\perp}{|\underline{x}|^2} = \nabla G$$

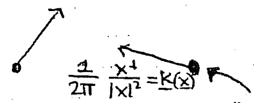
$$\underline{u}(\underline{x}) = (\underline{K} * \omega)(\underline{x}) \implies \nabla^\perp \underline{u} = \omega$$

$\omega \in L^1 \cap L^\infty$ regolare

<u>Analogia con l'elettrostatica</u>:

il campo elettrico generato da una carica puntiforme in 0 è

$$\frac{1}{2\pi}\frac{x}{|x|^2} = \nabla\left(\frac{1}{2\pi}\ln|x|\right)$$



"CARICA PUNTIFORME DI VORTICITÀ" ≡ VORTICE

Data una distribuzione continua di cariche $\rho(\underline{x})$

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\underline{x}-\underline{y}}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}\rho(\underline{y})\,dy$$

è il CAMPO ELETTRICO GENERATO

Data ω DISTRIBUZIONE DI VORTICITÀ (continua)

$$\underline{u}(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{(\underline{x}-\underline{y})^\perp}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}\omega(\underline{y})\,dy$$

C'è ancora analogia in quanto per $\underline{u}$ si ha

$$\nabla\cdot\underline{u} = 0 \implies \underline{u} = -\nabla^\perp\psi$$

$$\nabla^\perp\underline{u} = \omega \qquad \Delta\psi = -\omega$$

$$\underline{u} = -\nabla^\perp(G*\omega)$$

mentre per E

$$\nabla\cdot E = \rho$$

$$\nabla^\perp\cdot E = 0 \implies E = \nabla\tilde{V}$$

$$\Delta\tilde{V} = \rho$$

$$\tilde{V} = G*\rho$$

$$E = \nabla(G*\rho)$$

ESERCIZIO

Sia $\omega(\underline{x}) = \chi(\{|\underline{x}|<R\})$

$\underline{u}(\underline{x}) = ?$ $\qquad \underline{u}(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{B(0,R)}\frac{(\underline{x}-\underline{y})^\perp}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}dy = -\frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} x_1-\rho\cos\theta \\ -x_2+\rho\sin\theta\end{pmatrix} d\rho\, d\theta$

(i) ω invariante per rotazioni $\implies$ anche $\underline{u}$ lo è ed inoltre

$$\underline{u}(\underline{x}) = \frac{\underline{x}^\perp}{|\underline{x}|}u(|\underline{x}|)$$

(ii) Usiamo il teorema di Gauss

$$\oint_{|x|=R} u(|\underline{x}|)\,d\sigma = -\int_{|\underline{x}|<R}\underline{u}(\underline{x})\,d\underline{x}$$

$\implies \underline{u}$ non è $C^1(\mathbb{R}^2)$

CASO 4

D dominio non semplicemente connesso

Problema: Data $\omega = -\nabla^\perp \underline{u}$ vogliamo trovare $\underline{u}$

UNICITÀ ?

$\underline{u}_1, \underline{u}_2$ a divergenza nulla e tangenti ai bordi t.c. $-\nabla^\perp \underline{u}_1 = -\nabla^\perp \underline{u}_2 = \omega$

$\underline{w} = \underline{u}_1 - \underline{u}_2$

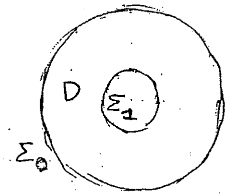
$$\left.\begin{array}{l} \nabla^\perp \cdot \underline{w} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{w} = 0 \end{array}\right\} \not\Rightarrow \underline{w} = \nabla\varphi$$

e quindi l'argomento usato in precedenza non funziona

In realtà l'UNICITÀ è FALSA

ESEMPIO

$D = \{ \underline{x} : r \leq |\underline{x}| \leq R \}$



$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{K}(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}$$

verifica

1. $\nabla \cdot \underline{u} = 0$
2. poichè

$$\underline{K}(\underline{x}) = (\underline{K} * \delta)(\underline{x}) = \int \underline{K}(\underline{x}-\underline{y})\, \delta(\underline{y})\, dy$$

si ha

$$-\nabla^\perp \cdot \underline{u} = 0 \quad \text{in } D$$

(è nullo fuori da 0 e quindi in D)

3. $\underline{u} \cdot \underline{n} \big|_{\Sigma_0 \cup \Sigma_1} = 0$

$\Rightarrow$ esiste una soluzione NON NULLA, ne troviamo infinite prendendo $\underline{u} = \alpha \underline{K}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

CONCLUSIONE:

Dare ω NON BASTA per trovare $\underline{u}$

Sia

$$\Gamma = \oint_{\Sigma_1} \underline{u}(\underline{x}) \cdot d\underline{s}$$

Per Kelvin questa quantità si conserva

TEOREMA

$\exists!\ \underline{u}$, $\operatorname{div} \underline{u} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{n} \big|_{\Sigma_0 \cup \Sigma_1} = 0$ t.c.

$$-\nabla^\perp \cdot \underline{u} = \omega$$

$$\oint_{\Sigma_1} \underline{u} \cdot d\underline{s} = \Gamma$$

con ω e Γ assegnate

DIMOSTRAZIONE

Unicità:

$\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ soluzioni

$$\underline{w} = \underline{u}_1 - \underline{u}_2$$

$$\underline{w} \cdot \underline{n}\big|_{\partial D} = 0$$

Si ha

$$\nabla \cdot \underline{w} = 0$$

$$\nabla^{\perp} \cdot \underline{w} = 0$$

$\Rightarrow w_1\, dx_1 + w_2\, dx_2$ è CHIUSA e quindi anche LOCALMENTE ESATTA

Esattezza:

$$\oint_{\gamma} (w_1\, dx_1 + w_2\, dx_2) = \oint_{\Sigma_1} (w_1\, dx_1 + w_2\, dx_2) = 0 \leftarrow \Gamma - \Gamma$$

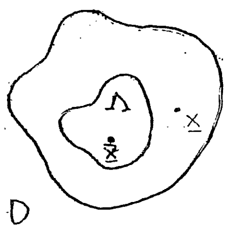
$\Rightarrow \underline{w} = \nabla\varphi$ e φ verifica

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \underline{n}}\Big|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi = \text{costante} \Rightarrow \underline{w} = \underline{0} \Rightarrow \underline{u}_1 = \underline{u}_2$

Esistenza:

Sia $\tilde{\underline{x}} \in \Lambda$



Cerchiamo $\underline{u}$:

$$\underline{u} = \Gamma K(\underline{x} - \tilde{\underline{x}}) + (\underline{K} * \omega)(\underline{x}) + \nabla\varphi$$

Vediamo che verifica le richieste:

$$-\nabla^{\perp} \cdot \Gamma \underline{K}(\underline{x} - \tilde{\underline{x}}) = 0$$

$$-\nabla^{\perp} \cdot (\underline{K} * \omega) = \omega$$

$$-\nabla^{\perp} \cdot \nabla\varphi = 0$$

$$\Rightarrow -\nabla^{\perp} \cdot \underline{u} = \omega$$

$\oint_{\Sigma_1} \underline{u} \cdot d\underline{s} = \Gamma$: infatti

$$\oint_{\Sigma_1} \Gamma\, \underline{K}(\underline{x} - \tilde{\underline{x}}) \cdot d\underline{s} = \Gamma$$

[ESERCIZIO

Suggerimento: Modificare Σ_1 in una circonferenza]

$$\oint_{\Sigma_1} (\underline{K} * \omega) \cdot d\underline{s} = 0$$

[ESERCIZIO

Suggerimento: Usare Gauss]

$$\oint_{\Sigma_1} \nabla\varphi \cdot d\underline{s} = 0$$

Ora, $\operatorname{div} \underline{u} = 0 \iff \Delta\varphi = 0$

La condizione al contorno si traduce in

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} = - \Gamma \, \underline{K}(\underline{x} - \underline{\tilde{x}}) \cdot \underline{n} - (\underline{K} * \omega) \cdot \underline{n}$$

e il problema per φ ha soluzione a meno di costanti #

ESERCIZIO

Svolgere il CASO 5 : D dominio esterno

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \Lambda$

ESERCIZIO

Svolgere il CASO 6 : D dominio con più di un buco (limitato)

ESERCIZIO

Nel CASO 4 provare che

$\exists \, \psi$ t.c. $\underline{u} = -\nabla^{\perp} \psi$

Discutere del significato fisico di $\psi|_{\Sigma_1} - \psi|_{\Sigma_0}$

D dominio limitato (semplicemente connesso)

Data ω abbiamo trovato $\underline{u}$ così:

$$\underline{u} = +\nabla^\perp \psi$$

dove ψ risolve

$$\begin{cases} \Delta\psi = -\omega \\ \psi|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

Nel piano (dove non ci sono condizioni al bordo) ψ è data da

$$\psi(\underline{x}) = \int dy \underbrace{\left(-\frac{1}{2\pi} \ln|\underline{x}-\underline{y}|\right)}_{= G(|\underline{x}-\underline{y}|)} \omega(\underline{y})$$

$G(|\underline{x}-\underline{y}|)$ FUNZIONE DI GREEN nel piano

Dato un dominio D, esiste la FUNZIONE DI GREEN per D $G_D(\underline{x},\underline{y})$ tale che

$$\psi(\underline{x}) = \int_D dy\, G_D(\underline{x},\underline{y})\,\omega(\underline{y})$$

risolve il problema di Poisson con ψ nulla al bordo

Tale funzione G_D si può scrivere nella forma

$$G_D(\underline{x},\underline{y}) = G(|\underline{x}-\underline{y}|) + \gamma(\underline{x},\underline{y})$$

con γ armonica in $\underline{x}$ e in $\underline{y}$

$$(\Delta_{\underline{x}}\gamma = 0 = \Delta_{\underline{y}}\gamma)$$

[Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \Delta\psi = -\omega \\ \psi|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

Scriviamo ψ nella forma

$$\psi = G * \omega + \varphi$$

Allora φ verifica

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ (\varphi - G*\omega)|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

assegnata $\Rightarrow$ condizione al bordo per φ

Se scriviamo

$$\varphi(\underline{x}) = \int_D \gamma(\underline{x},\underline{y})\,\omega(\underline{y})\,dy$$

allora γ dovrà verificare

$$\begin{cases} \Delta_{\underline{x}}\gamma(\underline{x},\underline{y}) = 0 \\ \gamma(\underline{x},\underline{y})|_{\underline{x}\in\partial D} = -G(|\underline{x}-\underline{y}|) \end{cases}$$

da cui segue la tesi]

OSSERVAZIONE

Valgono le seguenti limitazioni:

$$|G_D(\underline{x},y)| \leq C[\ln|\underline{x}-y|+1]$$
$$|\nabla G_D| \leq C\left[\frac{1}{|\underline{x}-y|}+1\right]$$
$$|\partial^2 G_D| \leq C\left[\frac{1}{|\underline{x}-y|^2}+1\right]$$

Chiamiamo
$$\underline{K}_D(\underline{x},y) = \nabla_{\underline{x}}^{\perp} G_D$$
Allora
$$\underline{u} = \underline{K}_D * \omega = \int_D \underline{K}_D(\underline{x},y)\,\omega(y)\,dy$$

D dominio semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$
Vogliamo risolvere
$$(1)\begin{cases} \partial_t \underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u} = -\nabla p \\ \operatorname{div} \underline{u} = 0 \end{cases}$$
che equivale a
$$(2)\begin{cases} \partial_t \omega + \underline{u}\cdot\nabla\omega = 0 \iff \frac{d}{dt}\omega(\Phi_t(x),t)=0 \\ \underline{u} = \underline{K}_D * \omega \end{cases}$$
Invece di risolvere (2) possiamo cercare la soluzione di
$$(3)\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi_t(x) = \underline{u}(\Phi_t(\underline{x}),t) \\ \underline{u}(\underline{x},t) = (\underline{K}_D*\omega)(\underline{x},t) \\ \omega(\underline{x},t) = \omega_0(\Phi_{-t}(\underline{x})) \end{cases}$$
dove
$$\Phi_{-t} = (\Phi_t)^{-1} \qquad \text{(proprietà di semigruppo)}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>

La formulazione (3) è PIU' DEBOLE della (2)
Infatti (3) può valere anche in casi in cui (2) non ha significato (ad esempio se ω non è C^1)

<u>PROGRAMMA</u>

- ESISTENZA e UNICITA' di (3)
- REGOLARITA' INIZIALE per (3) $\Rightarrow$ REGOLARITA' $\forall t$ $\Rightarrow$ SOLUZIONE DI (2)

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x}) = \underline{u}(\Phi_t(\underline{x}), t) \\ \underline{u}(\underline{x},t) = \int_D \underline{K}_D(\underline{x},\underline{y})\ \omega(\underline{y})\ dy \\ \omega(\underline{x},t) = \omega_0(\Phi_{-t}(\underline{x})) \end{cases}$$

con dato iniziale ω_0

TEOREMA

$\omega \in L^\infty(D)$

$\underline{u} = \underline{K}_D * \omega$

Si ha:

(i) $|u| \leq C$

(ii) $|u(\underline{x}) - u(\underline{y})| \leq C\varphi(|\underline{x}-\underline{y}|)$ ← correzione logaritmica alla condizione di Lipschitzianità ($\underline{u}$ è Hölderiana)

dove

$$\varphi(r) = \begin{cases} r\{|\ln r| + 1\} & r \leq 1 \\ 1 & r \geq 1 \end{cases}$$

(QUASI LIPSCHITZIANITÀ)

DIMOSTRAZIONE

Facciamo la prima stima. Vale

$$\left|\int_D \underline{K}_D(\underline{x},\underline{y})\ \omega(\underline{y})\ dy\right| \leq \int_D |\underline{K}_D(\underline{x},\underline{y})|\,|\omega(\underline{y})|\ dy \leq \|\omega\|_\infty \cdot C\int_D \left[\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|} + 1\right] dy$$

Ora, basta stimare

$$\int_D \frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|}\ dy = \int_{D\cap\{|\underline{x}-\underline{y}|<1\}} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|}\ dy + \underbrace{\int_{D\cap\{|\underline{x}-\underline{y}|\geq 1\}} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|}\ dy}_{\leq |D|}$$

$$\int_{D\cap\{|\underline{x}-\underline{y}|<1\}} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|}\ dy \leq \int_{|\underline{x}-\underline{y}|<1} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|}\ dy = \int_0^1 d\rho\ \frac{2\pi\cancel{\rho}}{\cancel{\rho}} = 2\pi$$

e quindi

$$|\underline{u}| \leq C\|\omega\|_\infty (1 + |D|)$$

Per la seconda stima, abbiamo

$$|\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y})| = \left|\int_D [\underline{K}_D(\underline{x},\underline{z}) - \underline{K}_D(\underline{y},\underline{z})]\ \omega(\underline{z})\ d\underline{z}\right| \leq$$

$$\leq \int_D |\underline{K}_D(\underline{x},\underline{z}) - \underline{K}_D(\underline{y},\underline{z})|\,|\omega(\underline{z})|\ d\underline{z} =$$

$$|\underline{x} - \underline{y}| =: r < 1$$

$$= \underbrace{\int_{D\cap\{|\underline{x}-\underline{z}|<2r\}}}_{= I} + \underbrace{\int_{D\cap\{|\underline{x}-\underline{z}|\geq 2r\}}}_{= II}$$

Stimiamo i due pezzi.

Per il primo si ha

$$I \leqslant C\|\omega\|_\infty \left\{ \int_{|\underline{x}-\underline{z}|<2r} \left[\frac{1}{|\underline{x}-\underline{z}|}+1\right] + \int_{|\underline{x}-\underline{z}|<2r}\left[\frac{1}{|\underline{y}-\underline{z}|}+1\right]\right\} \leqslant C\|\omega\|_\infty r$$

$$\int_0^{2r} \frac{2\pi \cancel{\rho}}{\cancel{\rho}}\, d\rho + 4\pi r^2 = 4\pi(r+r^2) \leqslant Cr \quad (r<1)$$

stima analoga: $|\underline{x}-\underline{y}| = r$, $|\underline{x}-\underline{z}|<2r$ $\Rightarrow |\underline{y}-\underline{z}|<3r$

Rimane da stimare l'altro integrale. Usiamo le derivate di $\underline{K}_D$

$$\underbrace{|\underline{K}_D(\underline{x},\underline{z}) - \underline{K}_D(\underline{y},\underline{z})|}_{\overset{\text{Lagrange}}{=}\ \partial \underline{K}_D(\xi,\underline{z})\cdot(\underline{x}-\underline{y}),\ \xi\in[\underline{x},\underline{y}]} \leqslant C\left[\frac{1}{|\underline{z}-\underline{\xi}|^2}+1\right]\cdot|\underline{x}-\underline{y}|$$

questo termine, messo nell'integrale, dà $r\|\omega\|_\infty |D|$

Quindi dobbiamo stimare

$$r\|\omega\|_\infty \int_{D\cap\{|\underline{x}-\underline{z}|>2r\}} \frac{1}{|\underline{z}-\underline{\xi}|^2} = r\|\omega\|_\infty\left\{\underbrace{\int_{D\cap\{2r<|\underline{x}-\underline{z}|<2\}}}_{=\,\text{II}.1} + \underbrace{\int_{D\cap\{|\underline{x}-\underline{z}|>2\}}}_{=\,\text{II}.2}\right\}$$

Ora, si ha (per la disuguaglianza triangolare)

$$|\underline{z}-\underline{\xi}| \geqslant \big||\underline{z}-\underline{x}| - |\underline{x}-\underline{\xi}|\big| > \tfrac{1}{2}|\underline{x}-\underline{z}|$$

($|\underline{z}-\underline{x}| > 2r$, $|\underline{x}-\underline{\xi}| \leqslant r$): $\xi\in[\underline{x},\underline{y}] \Rightarrow |\underline{x}-\underline{\xi}| \leqslant |\underline{x}-\underline{y}| \leqslant r$

Quindi II.2 è limitato. Invece per II.1 si ha

$$\text{II}.1 \leqslant C\int_{\{2r<|\underline{x}-\underline{z}|<2\}} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{z}|^2}\, d\underline{z} + C\int_D d\underline{z} = C\int_{2r}^{2} \frac{\cancel{\rho}}{\rho^{\cancel{2}}}\, d\rho + C|D|$$

In definitiva,

$$\text{II} \leqslant Cr\|\omega\|_\infty\left(|\ln r| + 1 + |D|\right)$$

e mettendo insieme i pezzi si ha la tesi #

ESERCIZIO

$\mathbb{R}^2$

$$\underline{K}(\underline{x}-\underline{y}) = \frac{(\underline{x}-\underline{y})^\perp}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}\cdot\left(-\frac{1}{2\pi}\right) = \nabla^\perp G$$

Sia $\omega \in (L^1\cap L^\infty)(\mathbb{R}^2)$

$\underline{u} = \underline{K} * \omega$

(i) $|\underline{u}| \leqslant C$

(ii) $\lim_{|x|\to+\infty} |\underline{u}| = 0$

(iii) $|\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y})| \leqslant C\,\varphi(|\underline{x}-\underline{y}|)$

(iv) Per quali $p>1$ se $\omega\in(L^p\cap L^\infty)(\mathbb{R}^2)$ valgono le stesse conclusioni?

<u>OSSERVAZIONE</u> (IMPORTANTISSIMA)

Φ_t FLUSSO INCOMPRIMIBILE

$\Rightarrow \forall\, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\int F(\underbrace{\omega(\Phi_t(\underline{x}))}_{\omega_t})\, d\underline{x} = \int F(\omega_0(\underline{x}))\, d\underline{x}$$

QUINDI in particolare TUTTE le NORME L^p di $\omega(\underline{x},t)$ sono COSTANTI:

$\|\omega(\underline{x},t)\|_{L^p} = \|\omega_0\|_{L^p}$

In particolare ciò è vero per la norma L^∞

$\Rightarrow |\underline{u}(\underline{x},t) - \underline{u}(\underline{y},t)| \leq C\varphi(|\underline{x}-\underline{y}|)$

Analizziamo l'equazione

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x}) = \underline{u}(\Phi_t(\underline{x}),t)$$

<u>TEOREMA</u>

Sia $\underline{b}(\underline{x},t)$ continuo in t, limitato e quasi lipschitziano in $\underline{x}$ (uniformemente rispetto a t):

$$|\underline{b}(\underline{x},t) - \underline{b}(\underline{y},t)| \leq C\varphi(|\underline{x}-\underline{y}|) \qquad \forall t$$

Allora il problema

fai hölderiana x_0

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{b}(\underline{x},t) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

ha soluzione globale, unica, continua (anzi hölderiana) in $\underline{x}_0$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Passiamo alla formulazione integrale (equivalente)

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 + \int_0^t ds\, \underline{b}(\underline{x}(s),s)$$

Consideriamo la seguente successione definita per ricorrenza:

$$\underline{x}^0(t) = \underline{x}_0$$

$$\underline{x}^n(t) = \underline{x}_0 + \int_0^t ds\, \underline{b}(\underline{x}^{n-1}(s),s)$$

Vogliamo dimostrare che tale successione ammette un limite $\underline{x}$ che è soluzione

Sia $t<T$

$$|\underline{x}^n(t) - \underline{x}^{n-1}(t)| \leq \int_0^t ds\, |\underline{b}(\underline{x}^{n-1}(s),s) - \underline{b}(\underline{x}^{n-2}(s),s)| \leq$$

$$\leq C\int_0^t ds\, \varphi(|\underline{x}^{n-1}(s) - \underline{x}^{n-2}(s)|)$$

dove

$$\varphi(r) = \begin{cases} r(|\ln r| + 1) & r<1 \\ 1 & r\geq 1 \end{cases}$$

Sia $\varepsilon<1$. La retta tangente a φ in ε è

$$\varepsilon|\ln\varepsilon| + \varepsilon + (\cancel{1} - \ln\varepsilon - \cancel{1})(r-\varepsilon) = |\ln\varepsilon|r + \varepsilon$$

Dunque, data la concavità di φ,

$$\varphi(r) \leq \varepsilon + |\ln\varepsilon|r$$

da cui

$$|\underline{x}^n(t) - \underline{x}^{n-1}(t)| \le C\varepsilon T + \int_0^t ds\, |\ln\varepsilon|\, |\underline{x}^{n-1}(s) - \underline{x}^{n-2}(s)| \le$$

$$\le C\varepsilon T \Big\{ 1 + C|\ln\varepsilon| \int_0^t dt_1 \cdot 1 + C^2|\ln\varepsilon|^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdot 1 + \dots +$$

$$+ C^{n-1}|\ln\varepsilon|^{n-1} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} \cdot 1 \Big\} +$$

$$+ C^n|\ln\varepsilon|^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, |\underline{b}(\underline{x}_0, t_n)|$$

Poichè

$$\int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \cdot 1 = \frac{t^k}{k!} \qquad k=1 \text{ ok} \qquad \int_0^t \frac{t_1^{k-1}}{(k-1)!}\, dt_1 = \frac{t^k}{k!}$$

[Esercizio: Provare per induzione]

abbiamo

$$|\underline{x}^n(t) - \underline{x}^{n-1}(t)| \le C\varepsilon T \sum_{k=0}^{n-1} C^k |\ln\varepsilon|^k \frac{t^k}{k!} + c^n|\ln\varepsilon|^n \frac{t^n}{n!} \le$$

$$\le C\varepsilon T\, e^{C|\ln\varepsilon| t} + c^n \frac{|\ln\varepsilon|^n\, t^n}{n!} \qquad \forall \varepsilon$$

Scegliamo $\varepsilon = e^{-n}$

$$|\underline{x}^n(t) - \underline{x}^{n-1}(t)| \le CT \underbrace{e^{-n}\, e^{nt}}_{e^{-(1-t)n}} + c^n t^n \underbrace{\frac{n^n}{n!}}_{\sim \sqrt{n}\ \text{Stirling}}$$

$|\underline{x}^n(t) - \underline{x}^m(t)|$ si stima tramite la serie di questi oggetti, che converge se $T<1$ ($T < 1/c$; c costante di quasi lipschitzianità)

La convergenza è uniforme in t $\Rightarrow$ $\underline{x}$ = limite esiste e risolve l'equazione (in forma integrale, ma poichè $\underline{x}$ è continuo, è automaticamente C^1 e dunque risolve l'equazione anche in forma differenziale)

Poichè la piccolezza di t non dipende da $\underline{x}_0$ ma solo dalla costante di quasi lipschitzianità possiamo iterare il procedimento ripartendo da $T, 2T, \dots,$ ottenendo così la soluzione per tutti i tempi.

Dobbiamo ancora discutere l'unicità ... #

[illegible]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t(\underline{x}) = \underline{u}(\phi_t(\underline{x}),t) \\ \underline{u}(\underline{x},t) = \underline{K}_D * \omega(\underline{x},t) \\ \omega(\phi_t(\underline{x}),t) = \omega_0(\underline{x}) \end{cases}$$

1. $\underline{K}_D * \omega = \underline{u}$

   Allora $\underline{u}$ verifica

   $$|\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{y})| \leq C\,\varphi(|\underline{x}-\underline{y}|) \qquad (u \text{ QUASI LIPSCHITZIANA (q.l.)})$$

   dove

   $$\varphi(r) := \begin{cases} r(|\ln r| + 1) & r \leq 1 \\ 1 & r \geq 1 \end{cases}$$

2. L'equazione differenziale

   $$\dot{\underline{x}} = \underline{b}(\underline{x},t)$$

   con $\underline{b}(\underline{x},t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   continuo e q.l. in $\underline{x}$ uniformemente rispetto a t

   è tale che la soluzione

   2.1. esiste

   2.2. è unica

   2.3. è hölderiana nel dato iniziale

DIMOSTRAZIONE 2.2.

Siano $\underline{x}, y$ due soluzioni: esse risolvono

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 + \int_0^t ds\, \underline{b}(\underline{x}(s),s)$$

$$y(t) = x_0 + \int_0^t ds\, \underline{b}(y(s),s)$$

Allora

$$|\underline{x}(t) - y(t)| \leq \int_0^t ds\, |\underline{b}(\underline{x}(s),s) - \underline{b}(y(s),s)| \leq C \int_0^t ds\, \varphi(|\underline{x}(s) - y(s)|)$$

Poichè vale

$$\varphi(r) \leq \varepsilon + |\ln \varepsilon|\, r$$

possiamo stimare

$$|\underline{x}(t) - y(t)| \leq C\varepsilon t + C\int_0^t ds\, |\ln \varepsilon|\, |\underline{x}(s) - y(s)|$$

GRONWALL $\Rightarrow |\underline{x}(t) - y(t)| \leq C\varepsilon t\, e^{C|\ln\varepsilon| t} = C\varepsilon t\, \varepsilon^{-Ct} = C t\, \varepsilon^{1-Ct}$

Se $t < 1/C$ passando al limite per $\varepsilon \to 0$ otteniamo $\underline{x}(t) = y(t)$

Iterando il procedimento otteniamo $\underline{x}(t) = y(t) \quad \forall t$ #

TEOREMA DI CONFRONTO LEMMA DI CONF.

Sia $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ non decrescente e tale che

$$\dot{x} = g(x)$$

abbia soluzione unica e continua nel dato iniziale $\forall x_0 \geq 0$

Sia $x(t; x_0)$ la soluzione

Se $y(t)$ è una funzione continua tale che

$$y(t) \leq x_0 + \int_0^t ds\, g(y(s))$$

$$\Rightarrow y(t) \leq x(t; x_0)$$

<u>Esempio</u>: per $g(x) = Lx$ si ottiene il Lemma di Gronwall

<u>DIMOSTRAZIONE 2.3.</u>

Siano

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 + \int_0^t ds\, \underline{b}(\underline{x}(s), s)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t ds\, \underline{b}(y(s), s)$$

Abbiamo

$$|\underline{x}(t) - y(t)| \leq |\underline{x}_0 - y_0| + C \int_0^t ds\, \varphi(|\underline{x}(s) - y(s)|)$$

Risolviamo

$$\begin{cases} \dot{r} = C\varphi(r) \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

per r piccoli:

$$\frac{dr}{r(|\ln r| + 1)} = C$$

$$\Rightarrow \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r(1 - \ln r)} = Ct \qquad \left(s = 1 - \ln r \quad ds = \frac{1}{r}\, dr\right)$$

$$\Rightarrow -\ln(1 - \ln r)\Big|_{r_0}^{r} = Ct$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1 - \ln r}{1 - \ln r_0}\right) = -Ct$$

$$\Rightarrow 1 - \ln r = (1 - \ln r_0)\, e^{-Ct}$$

$$\Rightarrow r(t) = e^{1 - (1 - \ln r_0) e^{-Ct}} = e^{1 - e^{-Ct}}\, r_0^{e^{-Ct}}$$

Applichiamo il teorema di confronto:

$$|\underline{x}(t) - y(t)| \leq e^{1 - e^{-Ct}}\, |\underline{x}_0 - y_0|^{e^{-Ct}}$$

Dunque

$\forall\, 0 < \alpha < 1 \quad \exists\, t = t(\alpha)$ t.c. se $t < t(\alpha)$ $\quad (e^{-Ct(\alpha)} = \alpha)$

$$|\underline{x}(t) - y(t)| \leq |\underline{x}_0 - y_0|^{\alpha}\, C(\alpha) \quad \#$$