MECCANICA DEI FLUIDI 1
PROF. D. BENEDETTO
RICEVIMENTO MER h 15-16
LOCALI EX-FALEGNAMERIA

1. EQUAZIONE PER I CONTINUI (formale)
   ESPOSITO: Meccanica Razionale
2. TEORIA MATEMATICA DEI FLUIDI INCOMPRIMIBILI NON VISCOSI (acqua)
   MARCHIORO-PULVIRENTI

FLUIDI $\subset$ CONTINUI

Per oggetti puntiformi vale la legge di Newton

$F = ma$

Un fluido è composto da tantissime particelle (dell'ordine di 10^{23} particelle) e quindi è difficile da trattare come sistema di punti

L'idea è di descrivere il fluido guardando le sue caratteristiche macroscopiche

DENSITÀ DI MASSA $\rho(\underline{x},t)$ $\quad \underline{x} \in \mathbb{R}^3$

$$m(A) = \int_A \rho(\underline{x},t)\, d\underline{x}$$

massa contenuta nel volume A al tempo t

Stiamo facendo le ipotesi:

1. la massa sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue
2. $\rho(\underline{x},t)$ sia la derivata di Radon-Nykodim della massa rispetto alla misura di Lebesgue

DEFINIZIONE

Una misura m è assolutamente continua rispetto a Lebesgue se $m(A) = 0$ quando $|A| = 0$

DEFINIZIONE

La derivata di Radon-Nykodim della misura m rispetto alla misura di Lebesgue è il limite

$$\lim_{|A| \to 0} \frac{m(A)}{|A|}$$

SPOSTAMENTO

$\Phi_t(\underline{x})$ FLUSSO

Assumiamo che il nostro fluido sia illimitato: $\rho(\underline{x},t)>0 \quad \forall\, \underline{x}\in\mathbb{R}^3$

Ci aspettiamo che Φ_t verifichi le proprietà

a. $\Phi_0(\underline{x}) = \underline{x}$

b. iniettiva: se $x\neq y \Rightarrow \Phi_t(\underline{x}) \neq \Phi_t(y)$

c. suriettiva

$\Big\}\Rightarrow$ biunivoca

d. regolare ← lo assumiamo

VELOCITÀ PUNTUALE (QUANTITÀ LAGRANGIANA)

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x})$$

CAMPO DI VELOCITÀ (QUANTITÀ EULERIANA) $u(\underline{x},t)$

$$\underline{u}(\Phi_t(\underline{x}),t) := \frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x})$$

N.B. I due APPROCCI sono EQUIVALENTI:

conoscendo $\Phi_t(\underline{x})$ conosciamo $\frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x}) \Longrightarrow u(\underline{x},t) = \left.\frac{d\Phi_t}{dt}\right|_{\Phi_t^{-1}(\underline{x})}$

conoscendo $\underline{u}(\underline{x},t)$ basta risolvere, per ogni dato iniziale $\underline{x}$, il sistema di EDO

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x}) = \underline{u}(\Phi_t(\underline{x}),t) \\ \Phi_0(\underline{x}) = \underline{x} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

Sia $f(\underline{x},t)$ un campo scalare ($f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$)

Come varia $f(\Phi_t(\underline{x}),t)$?

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t(\underline{x}),t) = (\partial_t f)(\Phi_t(\underline{x}),t) + \frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x})\cdot\nabla_{\underline{x}} f\Big|_{\Phi_t(\underline{x}),t} =$$

$$= \partial_t f\Big|_{\Phi_t(\underline{x}),t} + \underline{u}\cdot\nabla f\Big|_{\Phi_t(\underline{x}),t}$$

DERIVATA SOSTANZIALE o

DERIVATA MATERIALE o

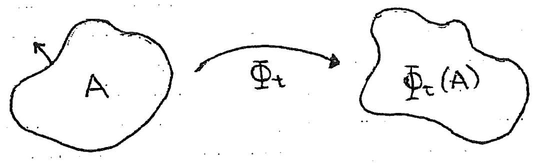
DERIVATA LUNGO IL FLUSSO

$$\boxed{\partial_t + \underline{u}\cdot\nabla =: D_t = \frac{D}{Dt}}$$

CAMPO DI ACCELERAZIONE $a(\underline{x},t) = \partial_t\underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u}$

$$\text{cioè } \underline{a}(\underline{x},t) = \begin{pmatrix}\partial_t u_1\\ \partial_t u_2\\ \partial_t u_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1\partial_1 u_1 + u_2\partial_2 u_1 + u_3\partial_3 u_1\\ u_1\partial_1 u_2 + u_2\partial_2 u_2 + u_3\partial_3 u_2\\ u_1\partial_1 u_3 + u_2\partial_2 u_3 + u_3\partial_3 u_3\end{pmatrix}$$

Sia A una REGIONE REGOLARE (esiste q.o. la normale esterna)



$\Phi_t(A) = \{\Phi_t(\underline{x}) : \underline{x} \in A\} = A_t$

Come varia nel tempo il volume di A?

$$\frac{d}{dt}|A_t| = \frac{d}{dt}\int_{A_t} d\underline{x}$$

$d\underline{x} = dx_1\, dx_2\, dx_3$

$$\int_{A_t} d\underline{x} = \int_A d\underline{x}\ J(\underline{x},t)$$

$J(\underline{x},t) = \det \frac{\partial \Phi_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$ ← è positivo perchè il flusso è regolare (invertibile) e quindi il segno è costante (uguale a $\det J(\underline{x},0) = 1$) [$\underset{id}{}$]

$$\left(\frac{\partial \Phi_t(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right)_{i,j} = \frac{\partial \Phi_t^i(\underline{x})}{\partial x_j}$$

Ora possiamo calcolare

$$\frac{d}{dt}\int_{A_t} d\underline{x} = \int_A \frac{d}{dt} J(\underline{x},t)\, d\underline{x}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>

B_t MATRICE INVERTIBILE

$$\frac{d}{dt}\det B_t = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\det B_{t+\varepsilon} - \det B_t}{\varepsilon} = \det B_t \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\det(B_{t+\varepsilon}B_t^{-1}) - 1}{\varepsilon}$$

$$B_{t+\varepsilon}B_t^{-1} = \left(B_t + \left(\frac{d}{dt}B_t\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right)B_t^{-1} = \mathbb{1} + \varepsilon\left(\frac{d}{dt}B_t\right)B_t^{-1} + O(\varepsilon^2)$$

$$\det\left(\mathbb{1} + \varepsilon\left(\frac{d}{dt}B_t\right)B_t^{-1} + O(\varepsilon^2)\right) \ ?$$

$$\det\begin{pmatrix} 1+\varepsilon z_{11} & \varepsilon z_{12} & \cdots & \varepsilon z_{1n} \\ \varepsilon z_{21} & 1+\varepsilon z_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon z_{n1} & \cdots & \cdots & 1+\varepsilon z_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma m_{1\sigma_1}\cdots m_{n\sigma_n}$$

e si ha

$$\det\left(\mathbb{1} + \varepsilon\left(\frac{d}{dt}B_t\right)B_t^{-1} + O(\varepsilon^2)\right) = 1 + \varepsilon\, \mathrm{tr}\left[\left(\frac{d}{dt}B_t\right)B_t^{-1}\right] + O(\varepsilon^2)$$

Dunque

$$\frac{d}{dt}\det B_t = \det B_t\ \mathrm{tr}\left(\frac{d}{dt}B_t\, B_t^{-1}\right)$$

Tornando al nostro problema,

$$\frac{d}{dt}\det\frac{\partial\Phi(\underline{x},t)}{\partial\underline{x}} = \det\frac{\partial\Phi_t}{\partial\underline{x}}\ \mathrm{tr}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi_t}{\partial\underline{x}}\cdot\frac{\partial\Phi_t^{-1}}{\partial\underline{x}}\right) =$$

$$= \det\frac{\partial\Phi_t}{\partial\underline{x}}\ \mathrm{tr}\left(\underbrace{\frac{\partial\underline{u}}{\partial\underline{x}}\Big|_{\Phi_t(\underline{x}),t}\cancel{\frac{\partial\Phi_t}{\partial\underline{x}}}}\cdot\cancel{\frac{\partial\Phi_t^{-1}}{\partial\underline{x}}}\right) = \det\frac{\partial\Phi_t}{\partial\underline{x}}\cdot \mathrm{div}\,\underline{u}(\Phi_t(\underline{x}),t)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\underline{x}}\Phi_t(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial\underline{x}}\frac{d}{dt}\Phi_t(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial\underline{x}}\underline{u}(\Phi_t(\underline{x}),t) = \frac{\partial\underline{u}}{\partial\underline{x}}\Big|_{\Phi_t(\underline{x}),t}\cdot\frac{\partial\Phi_t}{\partial\underline{x}}$$

Abbiamo dunque

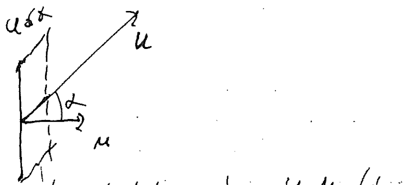
$$\frac{d}{dt}|A_t| = \frac{d}{dt}\int_{A_t} d\underline{x} =$$

$$= \int_A \frac{d}{dt} J(\underline{x},t)\,d\underline{x} = \int_A J(\underline{x},t)\,\operatorname{div}\underline{u}\Big|_{\Phi_t(\underline{x}),t} =$$

normale esterna

$$= \int_{A_t} \operatorname{div}\underline{u}(\underline{x},t)\,d\underline{x} = \int_{\partial A_t} \underline{u}\cdot\underline{n}\,\sigma(d\underline{x})$$

teorema della divergenza



$dA = |u|\,dt\cos\alpha = \underline{u}\cdot\underline{n}\,dt$

<u>OSSERVAZIONE</u> (TEOREMA DEL TRASPORTO)

In generale per un'osservabile f

$$\frac{d}{dt}\int_{A_t} f(\underline{x},t)\,d\underline{x} = \frac{d}{dt}\int_A J(\underline{x},t)\,f(\Phi_t(\underline{x}),t)\,d\underline{x} =$$

$$= \int_A \Big[J(\underline{x},t)\,(\partial_t f + \underline{u}\cdot\nabla f)\Big|_{\Phi_t(\underline{x}),t} + J(\underline{x},t)\,\nabla\cdot\underline{u}\Big|_{\Phi_t(\underline{x}),t}\, f\Big|_{\Phi_t(\underline{x}),t}\Big]\,d\underline{x} =$$

$$= \int_{A_t} (\partial_t f + \underbrace{\underline{u}\cdot\nabla f + f\,\nabla\cdot\underline{u}}_{\nabla\cdot(f\underline{u})}) = \int_{A_t} [\partial_t f + \nabla\cdot(f\underline{u})]\,d\underline{x}$$

A questo punto ~~possiamo scrivere~~ una prima equazione per i fluidi (in realtà per qualunque continuo)

<u>CONSERVAZIONE DELLA MASSA</u>

$m(A_t) = \int_{A_t} \rho(\underline{x},t)$ è COSTANTE (IMPONIAMO)

cioè

$$\frac{d}{dt}\int_{A_t} \rho(\underline{x},t)\,d\underline{x} = 0$$

ossia ← abbiamo già imposto div $\underline{u} = 0$? altrimenti manca $+\rho\nabla\cdot\underline{u}$ $\int_A$

$$\int_A (\partial_t\rho + \underline{u}\cdot\nabla\rho)\,d\underline{x} = 0 \qquad \forall A$$

← FALSO.

da cui

$\partial_t\rho + \underline{u}\cdot\nabla\rho = 0$ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ ← FALSA

II forma teo trasporto?

$$\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho\underline{u}) = 0$$

$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

OSSERVAZIONE

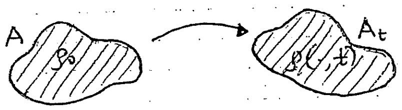
Che relazione c'è tra

ρ e $\det \frac{\partial \phi}{\partial \underline{x}} = J$?

Abbiamo visto che

$$\int_{A_t} d\underline{x} = \int_A J(\underline{x},t)\, d\underline{x}$$

Intuitivamente: $J > 1 \iff$ c'è dilatazione, ρ decresce



Prima $\frac{d}{dt}\left[\rho(\phi^t(x),t)\, J(x,t)\right] = 0$,

poi viene l'integrale.

$$\int_A \rho_0(x) = \int_{A_t} \rho(x,t)$$

Sappiamo che

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \det \frac{\partial \phi}{\partial \underline{x}} = \frac{d}{dt} J(\underline{x},t) = J(\underline{x},t)\, \nabla \cdot \underline{u} \big|_{\Phi_t(\underline{x}),t} \\ J(\underline{x},0) = 1 = \det \mathbb{1} \end{cases}$$

Dunque

$$J(\underline{x},t) = e^{\int_0^t ds\, \nabla \cdot \underline{u}|_{\Phi_s(\underline{x}),s}}$$

Dall'equazione di continuità

$$\partial_t \rho(\underline{x},t) + \underline{u}(\underline{x},t) \cdot \nabla \rho(\underline{x},t) + \nabla \cdot \underline{u}(\underline{x},t)\, \rho(\underline{x},t) = 0$$

otteniamo

$$\frac{d}{dt} \rho(\Phi_t(\underline{x}),t) = -\rho(\Phi_t(\underline{x}),t)\, \nabla \cdot \underline{u} \big|_{\Phi_t(\underline{x}),t}$$

e possiamo scrivere

$$\rho(\Phi_t(\underline{x}),t) = \underset{\substack{\parallel \\ \rho(\underline{x},0)}}{\rho_0(\underline{x})}\; e^{-\int_0^t ds\, \nabla \cdot u|_{\Phi_s(\underline{x}),s}}$$

Quindi

$$\rho(\Phi_t(\underline{x}),t) = \frac{\rho_0(\underline{x})}{J(\underline{x},t)}$$

cioè

$$\boxed{\rho(\Phi_t(\underline{x}),t)\, J(\underline{x},t) = \rho_0(\underline{x})}$$

$J > 1$ ρ decresce

$J < 1$ ρ cresce

OSSERVAZIONE

L'equazione

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\underline{u}\rho) = 0$$

è una LEGGE DI CONSERVAZIONE (IN FORMA DI DIVERGENZA) nel senso che esprime la conservazione della massa

1. Supponiamo $\rho \in L^1(\mathbb{R}^3)$, cioè che abbia senso scrivere

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\underline{x}\ \rho(\underline{x},t) = \text{MASSA TOTALE} < +\infty$$

Allora, se ρ decade abbastanza rapidamente all'infinito e $\underline{u}$ è limitata,

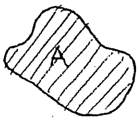
$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\underline{x},t)\,d\underline{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \rho(\underline{x},t)\,d\underline{x} \overset{\text{equazione di continuità: } \partial_t\rho = -\nabla\cdot(\rho\underline{u})}{=} - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot(\rho\underline{u})\,d\underline{x} \overset{\int \nabla\cdot(\rho\underline{u})\,d\underline{x} = \rho\underline{u}|_{|\underline{x}|\to\infty}}{=} 0$$

2. Supponiamo che il dominio sia $\mathbb{T}^3$, toro tridimensionale (dominio senza bordo)

Allora, con gli stessi conti, si ottiene

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^3} d\underline{x}\ \rho(\underline{x},t) \overset{\partial\mathbb{T}^3 = \emptyset \text{ (teorema di Stokes per varietà compatte senza bordo)}}{=} 0$$

3. Sia A un dominio ← aperto limitato, ∂A regolare.



$$\frac{d}{dt}\int_A \rho(\underline{x},t)\,d\underline{x} = -\int_A \nabla\cdot(\rho\underline{u})\,d\underline{x} = -\int_{\partial A} \rho\,\underline{u}\cdot\underline{n}\ \sigma(d\underline{x})$$

la variazione della massa dipende solo da ciò che passa attraverso il bordo

Il ~~membro a~~ destra è detto FLUSSO DI MASSA

DEFINIZIONE

Una LEGGE DI CONSERVAZIONE è un'equazione del tipo

$$\boxed{\partial_t f + \nabla\cdot J_f = 0}$$

dove J_f è detta CORRENTE di f

BILANCIO DELL'IMPULSO O QUANTITÀ DI MOTO

La legge di Newton per una particella

$m\ddot{x} = F$

si può scrivere anche

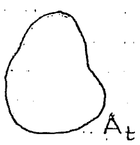
$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F$$

dove $m\dot{x}$ è detta QUANTITÀ DI MOTO

Nel caso di molte particelle

$$\frac{d}{dt}\sum m_i\dot{x}_i = \sum F_i \underset{\text{III PRINCIPIO}}{=} \sum F_i^E = \text{RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE}$$

Per un fluido?



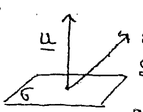
$$\frac{d}{dt}\int_{A_t} d\underline{x}\ \rho(\underline{x},t)\ \underline{u}(\underline{x},t) = R_{A_t}$$

← risultante delle forze esterne agenti sul volume di fluido

FORZA CHE IL RESTO DEL FLUIDO ESERCITA SU A_t + FORZE ATTIVE (GRAVITÀ) → $\int \rho(\underline{x},t)\ \underline{g}(\underline{x},t)\,dx$

forze di superficie (pressione, attriti)

Come modellare le forze di superficie?



$\varphi(\underline{x},\underline{n},t) = p\,\underline{n}$ forza di pressione

SFORZO SPECIFICO

La pressione è in direzione normale, l'attrito in direzione tangente: in generale avremo $\varphi(\underline{x},\underline{n},t)$

$$\int_{\partial A_t} \varphi(\underline{x},\underline{n},t)\ \sigma(d\underline{x}) = \text{FORZE DI SUPERFICIE}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{A_t}(\rho \underline{u})(\underline{x},t) = \int_{A_t}\rho(\underline{x},t)\, g(\underline{x},t) + \int_{\partial A_t}\varphi(\underline{x},\underline{u},t)\,\sigma(d\underline{x})$$

FORZA SPECIFICA

ES. CRISTALLI

<u>NOTAZIONE</u>:

$(\underline{a}\otimes\underline{b})_{ij} = a_i b_j$ PRODOTTO TENSORE

S matrice:

$(\operatorname{div} S)_i = \sum_j \partial_j S_{ij}$

Dunque per un generico vettore $\underline{f}$ si ha

$$\frac{d}{dt}\int_{A_t}\underline{f}(\underline{x},t)\,d\underline{x} = \int_{A_t}[\partial_t \underline{f} + \operatorname{div}(\underline{f}\otimes\underline{u})]\,d\underline{x}$$

e nel nostro caso ($\underline{f} = \rho\underline{u}$)

$$\frac{d}{dt}\int_{A_t}(\rho\underline{u})(\underline{x},t)\,d\underline{x} = \int_{A_t}[\partial_t(\rho\underline{u}) + \operatorname{div}(\rho\underline{u}\otimes\underline{u})]\,d\underline{x}$$

<u>TEOREMA</u> (CAUCHY)

Dall' equazione del bilancio dell' impulso in forma integrale segue che

$$\varphi(\underline{x},\underline{u},t) = S(\underline{x},t)\,\underline{u}$$

(cioè φ dipende LINEARMENTE da $\underline{u}$)

S è detto TENSORE DEGLI SFORZI

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Consideriamo regioni $A_t^\varepsilon \to \{x\}$

(ad esempio A_t^ε cubo di lato ε)

La superficie laterale $|\partial A_t^\varepsilon|$ va a zero più lentamente di $|A_t^\varepsilon|$

(ad esempio nel caso dei cubetti $|A_t^\varepsilon| = O(\varepsilon^3)$, $|\partial A_t^\varepsilon| = O(\varepsilon^2)$)

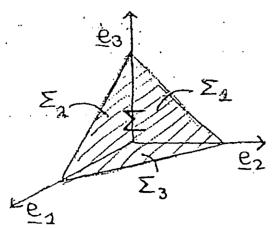
Dividiamo per $|\partial A_t^\varepsilon|$ l'identità

$$\int_{A_t^\varepsilon}[\partial_t(\rho\underline{u}) + \operatorname{div}(\rho\underline{u}\otimes\underline{u})] - \int_{A_t^\varepsilon}\rho\, g = \int_{\partial A_t^\varepsilon}\varphi(\underline{x},\underline{u},t)\,\sigma(d\underline{x})$$

e il termine la sinistra continuerà ad andare a 0. Dunque

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{\partial A^\varepsilon}\varphi(\underline{x},\underline{u})\,\sigma(d\underline{x})}{|\partial A^\varepsilon|} = 0$$

Per rendere il ragionamento rigoroso, usiamo il TETRAEDRO DI CAUCHY



Facciamo scalare i lati come ε

Abbiamo

$$\partial A^\varepsilon = \Sigma_1^\varepsilon \cup \Sigma_2^\varepsilon \cup \Sigma_3^\varepsilon \cup \Sigma^\varepsilon$$

e inoltre

$$\Sigma_i = \Sigma\ \underline{u}\cdot\underline{e}_i$$

Quando scaliamo otteniamo

$$\Sigma_i^\varepsilon = \varepsilon^2\Sigma_i\ ,\quad \Sigma^\varepsilon = \varepsilon^2\Sigma$$

Eseguiamo l'integrale di superficie sul tetraedro, approssimando φ sulla superficie con il suo valore al centro. Dunque

$$\frac{\varepsilon^2\left(\varphi(\underline{x},-\underline{e}_1)\Sigma_1 + \varphi(\underline{x},-\underline{e}_2)\Sigma_2 + \varphi(\underline{x},-\underline{e}_3)\Sigma_3 + \varphi(\underline{x},\underline{u})\Sigma\right) + o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2\left(\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma\right)} = 0$$

e quindi

$$\sum_i \varphi(\underline{x},-\underline{e}_i)\Sigma_i + \varphi(\underline{x},\underline{u})\Sigma = 0$$

Ma allora

anche da qui si vede che l'espressione è lineare in $\underline{u}$

$$\varphi(\underline{x},\underline{u}) = -\sum_i \varphi(\underline{x},-\underline{e}_i)\frac{\Sigma_i}{\Sigma} = \sum_{i=1}^{3}\varphi(\underline{x},-\underline{e}_i)\,\underline{u}\cdot(-\underline{e}_i) \equiv S\,\underline{u}$$

$$\sum_i \left[-\varphi(\underline{x},-\underline{e}_i)\otimes \underline{e}_i\right]\underline{u} \quad \#$$

Ora abbiamo

$$\int_{A_t}\left[\partial_t(\rho\underline{u}) + \operatorname{div}(\rho\underline{u}\otimes\underline{u})\right] = \int_{A_t}\rho\underline{g} + \int_{\partial A_t} S\underline{u}\;\sigma(d\underline{x})$$

$$\int_{A_t}\operatorname{div} S\; d\underline{x}$$

Invocando il fatto che il volume è qualunque, possiamo scrivere il bilancio del momento in forma differenziale:

$$\boxed{\partial_t(\rho\underline{u}) + \operatorname{div}(\rho\underline{u}\otimes\underline{u}) = \operatorname{div} S + \rho\underline{g}}$$

Il termine $\rho\underline{g}$ è detto TERMINE DI SORGENTE

OSSERVAZIONE

$$\frac{d}{dt}\int_{A_t}\rho f = \frac{d}{dt}\int_{A_0}\underbrace{\rho(\underline{\Phi}_t(\underline{x}),t)\, f(\underline{\Phi}_t(\underline{x}),t)\, J(\underline{x},t)}_{\rho_0(\underline{x})} = \frac{d}{dt}\int_{A_0}\rho_0(x)\, f(\underline{\Phi}_t(\underline{x}),t) =$$

$$= \int_{A_0}\rho_0\left(\partial_t f + \underline{u}\cdot\nabla f\right) = \int_{A_t}\rho\left(\partial_t f + \underline{u}\cdot\nabla f\right)$$

Abbiamo ottenuto una seconda forma per il TEOREMA DEL TRASPORTO, nel caso in cui si possa isolare una densità

Applicando a $\rho\underline{u}$ otteniamo

$$\frac{d}{dt}\int_{A_t}\rho\underline{u} = \int_{A_t}\rho\left[\partial_t\underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u}\right]$$

e dunque

$$\partial_t\underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u} = \frac{\operatorname{div} S}{\rho} + \underline{g}$$

(più simile alla legge di Newton)

OSSERVAZIONE

Utilizzando la I equazione cardinale

$$\frac{d}{dt}Q = R^E$$

abbiamo trovato l'equazione

$$\partial_t(\rho \underline{u}) + \operatorname{div}(\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = \operatorname{div} S + \rho g$$

Dalla II equazione cardinale

$$\frac{d}{dt}L = \Pi^E$$

$$\frac{d}{dt}\sum \underline{x}_i \wedge m \dot{\underline{x}}_i = \sum \underline{x}_i \wedge F_i^E$$

si deduce solo che S è SIMMETRICA

Facciamolo.

$$\frac{d}{dt}\int_{A_t} d\underline{x}\ \overbrace{\underline{x} \wedge \rho \underline{u}}^{\text{momento della quantità di moto}} = \int_{A_t} d\underline{x}\ \underline{x} \wedge \rho g + \int_{\partial A_t} \sigma(d\underline{x})\ \underline{x} \wedge S\underline{u}$$

$$\int_{A_t} \rho\, [\partial_t(\underline{x} \wedge \underline{u}) + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}(\underline{x} \wedge \underline{u})]$$

$$\int_{A_t} \rho\, [\underline{x} \wedge \partial_t \underline{u} + \underline{x} \wedge (\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) + \overbrace{\underbrace{(\underline{u} \cdot \nabla)\underline{x}}_{\underline{u}} \wedge \underline{u}}^{0}\ ]$$

$$\int_{A_t} \underline{x} \wedge [\rho(\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u})] = \int_{A_t} [\underline{x} \wedge \operatorname{div} S + \rho \underline{x} \wedge g]$$

per l'equazione

Ora, usiamo il fatto che

$$(\underline{a} \wedge \underline{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$$

(dove è sottointesa la somma sugli indici ripetuti)

con

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk \text{ è una permutazione pari di } 123 \\ -1 & \text{se } ijk \text{ è una permutazione dispari di } 123 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

TENSORE COMPLETAMENTE ANTISIMMETRICO

e scriviamo

$$(\underline{x} \wedge S\underline{u})_i = \varepsilon_{ipq}\, x_p\, (S\underline{u})_q = \varepsilon_{ipq}\, x_p\, S_{qj}\, u_j\,,$$

allora

$$\int_{\partial A_t} (\underline{x} \wedge S\underline{u})_i = \int_{A_t} \partial_j(\varepsilon_{ipq}\, x_p\, S_{qj}) =$$

$$= \int_{A_t} \varepsilon_{ipq}\, x_p \underbrace{\partial_j S_{qj}}_{(\operatorname{div} S)_q} + \int_{A_t} \varepsilon_{ipq} \underbrace{\partial_j x_p}_{\delta_{jp}} S_{qj} = \int_{A_t} \varepsilon_{ijq}\, S_{qj}$$

Quindi, tornando alla nostra identità, abbiamo

$$\int_{A_t} [\underline{x} \wedge \operatorname{div} S + \rho \underline{x} \wedge g] = \int_{A_t} \rho \underline{x} \wedge g + \int_{A_t} \underline{x} \wedge \operatorname{div} S + \int_{A_t} \varepsilon_{ijq}\, S_{qj}$$

Quindi

$$\varepsilon_{ijq} S_{qj} = 0$$

e scrivendo le identità per $i = 1,2,3$

$$\varepsilon_{123} S_{32} + \varepsilon_{132} S_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{32} = S_{23}$$

$$\varepsilon_{231} S_{13} + \varepsilon_{213} S_{31} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{13} = S_{31}$$

$$\varepsilon_{312} S_{21} + \varepsilon_{321} S_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{21} = S_{12}$$

otteniamo la simmetria della matrice S

BILANCIO DELL'ENERGIA

Notazione: $a^2 = \underline{a} \cdot \underline{a}$

$$\frac{d}{dt} \int_{A_t} \Big[\rho(\underline{x}) \frac{u^2(\underline{x})}{2} + \rho(\underline{x})\, e(\underline{x}) \Big] =$$

POTENZA delle forze di massa — ENERGIA INTERNA SPECIFICA — IRRAGGIAMENTO (potenza specifica)

$$= \int_{A_t} \underline{u} \cdot \rho \underline{g} + \int_{\partial A_t} \underbrace{\underline{u} \cdot S \underline{u}}_{= S\underline{u} \cdot \underline{u}}\, \sigma(d\underline{x}) + \int_{A_t} \rho(\underline{x})\, r(\underline{x})\, d\underline{x} + \int_{\partial A_t} \underbrace{h(\underline{x}, \underline{u})}_{= -\underline{q} \cdot \underline{u}}\, \sigma(d\underline{x})$$

FLUSSO DI CALORE

Il membro a sinistra si riscrive

$$\frac{d}{dt} \int_{A_t} \Big[\rho \frac{u^2}{2} + \rho e \Big] =$$

$$= \int_{A_t} d\underline{x} \left[\partial_t \left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho e \right) + \mathrm{div}\left(\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho e \right) \underline{u} \right) \right] =$$

$$= \int_{A_t} d\underline{x}\ \rho \left[\partial_t \left(\frac{u^2}{2} + e \right) + \underline{u} \cdot \nabla \left(\frac{u^2}{2} + e \right) \right]$$

Dunque otteniamo

$$\int_{A_t} d\underline{x}\ \rho \left[\partial_t \left(\frac{u^2}{2} + e \right) + \underline{u} \cdot \nabla \left(\frac{u^2}{2} + e \right) \right] =$$

$$= \int_{A_t} \underline{u} \cdot \rho \underline{g} + \int_{A_t} \mathrm{div}(S\underline{u}) + \int_{A_t} \rho r - \int_{A_t} \mathrm{div}\, q$$

da cui

$$\boxed{\partial_t \left[\rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) \right] + \mathrm{div} \left[\underline{u} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho e \right) \right] = \rho\, \underline{u} \cdot \underline{g} + \mathrm{div}(S\underline{u}) + \rho r - \mathrm{div}\, q}$$

OSSERVAZIONE

Le equazioni che abbiamo scritto finora valgono per un qualunque mezzo continuo. Dobbiamo ancora introdurre ipotesi che caratterizzino tale continuo come fluido (e ci permettano di eliminare qualche incognita!)

Torniamo al bilancio dell'energia

$$\partial_t\left[\rho\left(\frac{u^2}{2}+e\right)\right]+\operatorname{div}\left[\underline{u}\left(\rho\left(\frac{u^2}{2}+e\right)\right)\right]=\rho\,\underline{u}\cdot g+\rho r-\operatorname{div} q+\operatorname{div}(S\underline{u})$$

Vorremmo scrivere un'equazione per la sola energia interna e

Usando la II forma del teorema del trasporto otteniamo

$$\rho\left[\partial_t\left(\frac{u^2}{2}+e\right)+\underline{u}\cdot\nabla\left(\frac{u^2}{2}+e\right)\right]=\text{II membro}$$

Poichè

$$\partial_t\frac{u^2}{2}=\underline{u}\cdot\partial_t\underline{u}$$

$$(\underline{u}\cdot\nabla)\frac{u^2}{2}=\underline{u}\cdot(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}$$

si ha

$$\rho[\partial_t e+\underline{u}\cdot\nabla e]+\rho\,\underline{u}\cdot[\partial_t\underline{u}+\underline{u}\cdot\nabla\underline{u}]=\text{II membro}$$

da cui, usando $\rho[\partial_t\underline{u}+\underline{u}\cdot\nabla\underline{u}]=\operatorname{div} S+\rho g$, otteniamo

$$\rho(\partial_t e+\underline{u}\cdot\nabla e)=-\underline{u}\cdot(\operatorname{div} S+\rho g)+\rho\,\underline{u}\cdot g+\rho r-\operatorname{div} q+\operatorname{div}(S\underline{u})=$$

$$=-\underline{u}\cdot\operatorname{div} S+\operatorname{div}(S\underline{u})-\operatorname{div} q+\rho r$$

Ora, si ha

$$\operatorname{div}(S\underline{u})=\operatorname{tr}\left(S\frac{\partial u}{\partial \underline{x}}\right)+\underline{u}\cdot\operatorname{div} S$$

e dunque

$$\boxed{\rho[\partial_t e+\underline{u}\cdot\nabla e]=\operatorname{tr}\left(S\frac{\partial u}{\partial \underline{x}}\right)-\operatorname{div} q+\rho r}$$

Abbiamo ottenuto le EQUAZIONI DEI CONTINUI:

$$\begin{cases}\rho[\partial_t e+\underline{u}\cdot\nabla e]=\operatorname{tr}\left(S\frac{\partial u}{\partial \underline{x}}\right)-\operatorname{div} q+\rho r & \text{bilancio dell'energia}\\ \rho[\partial_t\underline{u}+(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}]=\operatorname{div} S+\rho g & \text{bilancio dell'impulso}\\ \partial_t\rho+\underline{u}\cdot\nabla\rho=-\rho\operatorname{div}\underline{u} & \text{conservazione della massa}\end{cases}$$

Abbiamo quantità

- INCOGNITE ρ, $\underline{u}$, $\underline{e}$
- SCONOSCIUTE S (6 quantità), q (3 quantità) determinano il MODELLO
- NON SPECIFICATE r, g dipendono "solo" dall'AMBIENTE

DEFINIZIONE

Un FLUIDO è un continuo che, in equilibrio (meccanico e termodinamico), NON esercita SFORZI DI TAGLIO

$\iff S(\underline{x})\,\underline{u} = -p(\underline{x})\,\underline{u}$

PRESSIONE

DEFINIZIONE

Un FLUIDO IDEALE

1. NON esercita MAI SFORZI DI TAGLIO $\iff S = -p\,\mathbb{1}$
2. NON TRASPORTA CALORE $\iff \underline{q} = \underline{0}$

Utilizziamo le ipotesi fatte

Scriviamo le equazioni per i fluidi ideali:

$$\begin{cases} \rho\left[\partial_t e + \underline{u}\cdot\nabla e\right] = -p\,\operatorname{div}\underline{u} + \rho r \\ \rho\left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\nabla)\,\underline{u}\right] = -\nabla p + \rho\, g \\ \partial_t \rho + \underline{u}\cdot\nabla\rho = -\rho\,\operatorname{div}\underline{u} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

La PRESSIONE è ancora incognita. Dobbiamo usare la TERMODINAMICA

OSSERVAZIONE

Nel caso di GAS PERFETTI possiamo usare l'equazione di stato

$pV = nRT$

cioè

$n = \frac{m}{P_A}$

$p\frac{m}{\rho} = nRT \qquad P = \rho\frac{R}{P_A}T \qquad P = r\rho T$

otteniamo

$p = r\rho T$ non è l'irraggiamento! $r = R/P_A$ peso atomico

e possiamo sfruttare la dipendenza dell'energia interna dalla temperatura

$e = \frac{3}{2}RT$

Questo è il caso di FLUIDI PERFETTI

OSSERVAZIONE

E nel caso generale?

Consideriamo l'entropia, abbiamo

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dE}{T} + \frac{p\,dV}{T}$$

e, per l'entropia specifica

$$ds = \frac{de}{T} + \frac{p}{T}\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{de}{T} - \frac{p}{\rho^2 T}\,d\rho \qquad (r = 1)$$

di nuovo $r = \frac{R}{P_A}$

Dunque per il differenziale totale abbiamo

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T}\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2 T}\frac{D\rho}{Dt} =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\cancel{-\frac{p}{\rho}\,\mathrm{div}\,\underline{u}} + r + \cancel{\frac{p\,\mathrm{div}\,\underline{u}}{\rho}}\right) = \frac{r}{T}$$

(quello che abbiamo ottenuto è ragionevole e concorda con l'ipotesi che non ci sia trasporto di calore)

Abbiamo quindi

$$\frac{Ds}{Dt} = \partial_t s + \underline{u}\cdot\nabla s = \frac{r}{T}$$

Se $r \equiv 0$

$$\partial_t s + \underline{u}\cdot\nabla s = 0$$

e dunque s è costante lungo le traiettorie:

$$\frac{d}{dt} s(\Phi_t(\underline{x}), t) = 0$$

cioè

$$s(\Phi_t(\underline{x}), t) = s_0(\underline{x})$$

l'equazione per l'entropia non dice nulla (DATO INIZIALE)

SUPPONIAMO

$$s_0(\underline{x}) \equiv \text{costante} = s_0$$

e dunque, utilizzando per la pressione l'EQUAZIONE DI STATO

$$p = p(\rho, s) = p(\rho)$$

(dalla TERMODINAMICA)

otteniamo un sistema CHIUSO di 2 equazioni (la terza, quella per l'energia, è già stata utilizzata)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \underline{u}\cdot\nabla\rho = -\rho\,\mathrm{div}\,\underline{u} \\ \rho\,[\partial_t \underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla \underline{u}] = -\nabla p + \rho\,\underline{g} \end{cases}$$

dette equazioni dei GAS ISOENTROPICI

ESERCIZIO

Per i gas perfetti

$$s = \log\frac{T^{3/2}}{\rho}$$

$$\Longrightarrow p = \rho^{5/3}$$

FLUIDI INCOMPRIMIBILI

Poichè

$$\frac{d}{dt}\int_{A_t} d\underline{x} = \int_{A_t} \operatorname{div} \underline{u}$$

la condizione di incomprimibilità si esprime con

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0$$

$$\iff J(\underline{x},t) \equiv 1$$

Ora, sappiamo che $\rho(\Phi_t(\underline{x}),t)\,J(\underline{x},t) = \rho_0(\underline{x})$

Dunque la densità si conserva lungo il flusso (per l'incomprimibilità):

$$\rho(\Phi_t(\underline{x}),t) = \rho_0(\underline{x})$$

IMPONIAMO

$$\rho_0(\underline{x}) = \text{costante} = 1$$

e abbiamo che anche l'energia interna si conserva lungo il flusso:

$$\partial_t e + \underline{u}\cdot\nabla e = 0$$

e quindi

$$e(\Phi_t(\underline{x}),t) \equiv 0$$

Abbiamo ottenuto le equazioni per i FLUIDI IDEALI INCOMPRIMIBILI:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \partial_t \underline{u} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u} = -\nabla p + \underline{g} \end{cases}$$

EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES (FLUIDO NON IDEALE)

$S^{eq} = -p\mathbb{1}$

Facciamo cadere entrambe le ipotesi per i fluidi ideali

Consideriamo la legge più semplice per il calore:

$\boxed{\underline{q} = -K\nabla T}$ LEGGE DI FOURIER

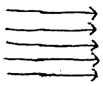
($\underline{u} \equiv 0$, $\rho \equiv 0 \Rightarrow$ equazione del calore)

Com'è fatta S per i fluidi viscosi?

$S = -p\mathbb{1} + N$

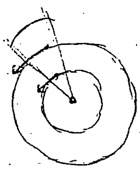
Sappiamo che

$N = 0$ se $\underline{u} = \underline{0}$, ma anche se $\underline{u}$ dipende linearmente da $\underline{u}$



$\underline{u}$

$N = 0$ in questo caso



$\underline{u} = \underline{\omega}\, r$

$\underline{u} = \underline{\omega} \wedge \underline{x}$ $N = 0$ anche in questo caso

Scriviamo

$$\underline{u}(\underline{y}) = \underline{u}(\underline{x}) + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \cdot (\underline{y} - \underline{x}) + o(|\underline{y} - \underline{x}|^2)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} + \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}\right)^t\right]}_{=D} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} - \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}\right)^t\right]}_{=\Omega = (\nabla \wedge \underline{u})}$$

matrice simmetrica D dipendente da $\underline{x}$

matrice antisimmetrica dipendente da $\underline{x}$

OSSERVAZIONE

Se A è antisimmetrica

$A\underline{x} = \underline{\omega} \wedge \underline{x}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & +\omega_2 \\ +\omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & +\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\omega \wedge x = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Dunque considerando

$$\Omega = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} - \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}\right)^t\right]$$

abbiamo

$$\Omega \underline{z} = \tfrac{1}{2}\, \underline{\omega} \wedge \underline{z}$$

con

$\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{u}$ formale!

Allora

$$\underline{u}(\underline{y}) = \underline{u}(\underline{x}) + D(\underline{y} - \underline{x}) + \underbrace{\tfrac{1}{2}\, \underline{\omega} \wedge (\underline{y} - \underline{x})}_{\text{ROTAZIONE RIGIDA}}$$

VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE

ROTAZIONE RIGIDA

Ora, N non dipende dai comportamenti tipo corpo rigido e dunque
$N = N(D)$

Facciamo l'ipotesi che tale dipendenza sia LINEARE

i coefficienti dipendono linearmente da quelli di D

buona approssimazione per D piccoli dal momento che $N(0) = 0$

<u>TEOREMA</u>

N non deve dipendere dalla scelta delle coordinate

Allora deve essere della forma

$$N = 2\mu D + \lambda (\underbrace{\operatorname{div} \underline{u}}_{= \operatorname{tr} D})\, \mathbb{1}$$

coefficiente di VISCOSITÀ DI VOLUME — coefficiente di SLITTAMENTO

?

EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

$$D = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} + \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}}\right)^t\right]$$

$$N = 2\mu D + \lambda \operatorname{div} \underline{u}\, \mathbb{1}$$

$$S = -p \mathbb{1} + N$$

Limitiamoci al CASO INCOMPRIMIBILE

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0 \implies N = 2\mu D$$

Otteniamo

$$(NS)\begin{cases} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \underset{= 1}{\rho}(\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) = -\nabla p + \rho g + \underset{= \operatorname{div}(2\mu D)}{\mu \Delta \underline{u}} \end{cases}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>

Equazioni di EULERO per un FLUIDO INCOMPRIMIBILE:

$$(EI)\begin{cases} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p + g \end{cases}$$

incognita

Equazioni di EULERO per un FLUIDO COMPRIMIBILE (GAS ISOENTROPICO):

$$(EC)\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0 \\ \rho(\partial_t \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) = -\nabla p(\rho) + \rho g \end{cases}$$

equazione di stato

$\forall\, U \in SO_3$ $\quad N(U^t D U) = U^t N(D) U$

$\Rightarrow$ N D simmetrici $\quad N(\mathbb{1}) = N(U^t U) = U^t N(\mathbb{1}) U \quad \forall U \Rightarrow N(\mathbb{1}) = \gamma \mathbb{1}$

N.B. se U [illegible] $N(\mathbb{1})$ [illegible] $N(\mathbb{1}) \equiv$ con le loro [illegible] e poi

② scambio gli assi $\quad M_i =$ matrice con tutti 0 tranne che sulle m_{ii}

se U che [illegible] $\Rightarrow N(M_i) = N(U^t M_i U) = U^t N(M_i) U \Rightarrow$ è diagonale

e ha i due elementi $j \neq i$ uguali $\Rightarrow N(M_i) = a M_i + b \mathbb{1}$

$D = U^t \sum \lambda_i M_i U \Rightarrow N(D) = U^t \sum \lambda_i N(M_i) U = a U^t \left(\sum \lambda_i M_i\right) U + b \sum \lambda_i \mathbb{1} = aD + b \operatorname{tr} D\, \mathbb{1}$