

# Meccanica dei Fluidi

31 luglio 2017

## Indice

<b>Programma</b>	<b>2</b>
<b>1 Testi</b>	<b>2</b>
<b>2 Programma</b>	<b>2</b>
2.1 Dinamica dei continui . . . . .	2
2.2 Caratteristiche dei fluidi incomprimibili non viscosi . . . . .	3
2.3 Onde d'acqua . . . . .	3
2.4 La vorticità . . . . .	3
2.5 Esistenza ed unicità delle soluzioni in dimensione due . . . . .	4
2.6 Flussi laminari, flussi turbolenti. Evoluzione di singolarità . . . . .	4
2.7 L'equazione di Eulero in dimensione 3 . . . . .	4
2.8 Esistenza e unicità locale per Eulero su $\mathbb{T}^3$ . . . . .	5
2.9 L'equazione di Navier–Stokes in $\mathbb{T}^3$ . . . . .	5
<b>3 Il tensore degli sforzi per Navier–Stokes</b>	<b>5</b>
<b>4 Navier–Stokes in 3 dimensioni</b>	<b>6</b>
4.1 L'equazione nel toro e in Fourier . . . . .	7
4.2 Il laplaciano e l'equazione del calore . . . . .	8
4.3 Stime a priori per Navier–Stokes . . . . .	9
4.4 Esistenza delle soluzioni deboli . . . . .	9
4.5 Soluzioni deboli . . . . .	11
4.6 Autoregolarizzazione . . . . .	11
4.7 Il caso bidimensionale . . . . .	14
4.8 Unicità in dimensione due . . . . .	15

Corso di 6 CFU attivato per il corso di laurea magistrale in “Matematica per le Applicazioni”, primo semestre AA 2016–2017; docente Dario Benedetto

## 1 Testi

- **E:** Esposito **Appunti delle lezioni di Meccanica Razionale**, Aracne 1999.
- **LL:** L.D. Landau, E.M. Lifshitz **Teoria dell’elasticità** (Fisica teorica 7), Editori Riuniti
- **MP:** Carlo Marchioro, Mario Pulvirenti **Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids** ISBN 978-1-4612-4284-0, Springer
- **IP:** appunti del corso presi da IP <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/fluidi>

Altri testi consigliati

- **MP2:** Carlo Marchioro, Mario Pulvirenti **Vortex methods in two-dimensional fluid dynamics**, Lecture notes in physics **203**, Springer 1984.
- **CM:** Alexandre J. Chorin, Jerrold E. Marsden: **A mathematical introduction to fluid mechanics**, Springer 1993.
- **GG:** Giovanni Gallavotti: **Foundations of Fluid Dynamics**, Springer 2005; vedi anche **Ipotesi per una introduzione alla meccanica dei fluidi**, Quaderni del Consiglio Nazionale delle Ricerche, GNFM 1996.
- **J:** R.S. Johnson **A modern introduction to the mathematical theory of water waves** Cambridge text in applied mathematics 1997.
- **MOHR:** B.R. Munson, T.H. Okiishi, W.W. Huebsch, A.P. Rothmayer **Meccanica dei Fluidi**, CittàStudi Edizioni 2016 (è un libro per ingegneri, che è interessante per il punto di vista differente, e per la descrizione di molti argomenti dal punto di vista applicativo).

## 2 Programma

### 2.1 Dinamica dei continui

Questa parte è presa dall’Esposito, a parte qualche dettaglio, e si trova anche su IP.

Densità di massa, velocità, flusso. Lo Jacobiano del flusso. La sua derivata temporale: il teorema di Liouville. Teorema del trasporto. Equazione di continuità.

Tensore degli sforzi. Teorema di Cauchy per il tensore degli sforzi. Bilancio dell’impulso. Simmetria del tensore degli sforzi e conservazione del momento della quantità di moto.

Energia cinetica e densità di energia interna. Flusso di calore, densità di irraggiamento. Bilancio dell’energia.

Leggi di conservazione, correnti.

Caratterizzazione dei fluidi in termini di tensore degli sforzi all'equilibrio. Pressione. Fluidi ideali, fluidi perfetti. Equazione per l'entropia. Equazione per i gas isoentropici. Condizione di incomprimibilità.

Modellizzazione degli attriti interni: decomposizione dello jacobiano del campo di velocità nella parte rotazionale (vorticità) e nella parte di velocità di deformazione. L'equazione di Navier-Stokes (vedi paragrafo 3).

Esercizi e argomenti "a lato".

Linearizzazione delle equazioni del gas isoentropico intorno a stati stazionari e determinazione della velocità del suono (vedi esercizi sul sito).

Condizione di incomprimibilità come limite infinito della velocità del suono (vedi MP pag. 42, 43).

Piccoli moti nei solidi (vedi esercizi). Propagazione delle onde nei solidi, decomposizione in onde P e onde S (vedi esercizi).

## 2.2 Caratteristiche dei fluidi incomprimibili non viscosi

Per questo argomento ho usato il MP, ma trovate tutto anche su IP.

Il principio variazionale per i fluidi incomprimibili non viscosi (rispetto a MP, ho provato a rendere più chiaro come costruire i moti incomprimibili variati attraverso un campo a divergenza nulla che generi la variazione).

Quantità conservate: energia, vorticità, impulso medio, momento della quantità di moto.

Flussi potenziali e flussi stazionari.

I teoremi di Bernoulli e il teorema di Kelvin per i fluidi incomprimibili Il teorema di Stevino e la legge di Archimede.

## 2.3 Onde d'acqua

Per questo argomento ho usato il MP, pag. 222, ma vedi anche il Johnson tra i testi consigliati.

La "condizione cinematica" per la frontiera mobile di un flusso potenziale in moto. Il salto della pressione dovuto alla tensione superficiale.

Le equazione per il flusso potenziale in presenza di gravità e tensione superficiale.

Linearizzazione e ricerca di soluzioni ondose. Velocità di fase e velocità di gruppo nei diversi regimi.

## 2.4 La vorticità

Per questo argomento ho usato il MP, ma trovate tutto su IP.

Equazione per la vorticità in dimensione due. La funzione di corrente. Richiami sulle soluzioni dei problemi ellittici con condizioni di Dirichlet o di Neumann. Richiami sulla funzione di Green nel piano e nei domini.

Ricostruzione del campo di velocità a partire dalla vorticità. Caso dell'intero piano, caso dei domini limitati semplicemente connessi, caso dei domini limitati non semplicemente connessi, caso del dominio esterno.

## 2.5 Esistenza ed unicità delle soluzioni in dimensione due

Per questo argomento ho usato il MP, ma trovate tutto su IP. Per la precisione, MP pp. 66–74, appendice 2.1 pp. 86–87, appendice 2.3 p. 89. La teoria sul libro è in  $L_1$ , io ho svolto la teoria in  $L_\infty$ . L'unico ingrediente in più necessario è la prova di

$$\int_D |\omega(\mathbf{y})| |K_D(\mathbf{x} - \phi(\mathbf{y})) - K_D(\mathbf{x} - \psi(\mathbf{y}))| \leq c\varphi(r),$$

con

$$r = \sup_{\mathbf{x} \in D} |\phi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})|.$$

Ipotesi  $\omega_0 \in L_\infty$  in dominio limitato: limitatezza del campo di velocità, stima quasi-lipschitziana. Esistenza di flussi per campi quasi-lipschitziani. Costruzione delle soluzioni deboli. Unicità delle soluzioni deboli. Regolarità delle soluzioni deboli (la prova esplicita della regolarità  $C^{1+\alpha'}$  del campo se  $\omega$  è  $C^\alpha$  è parzialmente negli esercizi).

## 2.6 Flussi laminari, flussi turbolenti. Evoluzione di singolarità

Questa parte è stata svolta in modo meno formale, e richiede l'uso di più fonti.

Flussi laminari incomprimibili nei canali piani.

Condizioni al contorno per l'equazione di Navier-Stokes. Flusso viscoso nei canali piani, e profilo parabolico del campo; caduta di pressione (vedi IP).

Soluzione dell'equazione di Navier-Stokes nel semipiano (vedi IP). Generazione di vorticità la bordo e strato limite (vedi IP e MP pag 39-40).

Il numero di Reynolds (MP pag. 235)..

Cenni al moto di un fluido intorno a un ostacolo al variare del numero di Reynolds: distacco dello strato limite, scia di von Karman, turbolenza (può essere utile guardare qualche sito in rete, tipo wikipedia, usando queste parole chiave

[https://en.wikipedia.org/wiki/Flow\\_separation](https://en.wikipedia.org/wiki/Flow_separation)

<https://en.wikipedia.org/wiki/Turbulence>

[https://en.wikipedia.org/wiki/K%C3%A1rm%C3%A1n\\_vortex\\_street](https://en.wikipedia.org/wiki/K%C3%A1rm%C3%A1n_vortex_street))

Vedi anche MOHR par. 9.1 9.3

L'equazione per la linea di vorticità (vortex sheet) MP pag 191-194. Instabilità di Kelvin-Helmoltz (vedi esercizi).

## 2.7 L'equazione di Eulero in dimensione 3

Per questo argomento ho usato il MP, ma trovate tutto anche su IP.

La vorticità in termini dello Jacobiano del flusso. I tubi di vorticità.

## 2.8 Esistenza e unicità locale per Eulero su $\mathbb{T}^3$

Per questo argomento ho usato il MP, ma trovate tutto anche su IP.

I coefficienti di Fourier. Spazi di Sobolev  $H_m$  definiti attraverso i coefficienti di Fourier. Teoremi di immersione di  $H_m(\mathbb{T}^3)$ . Proprietà di algebra di  $H_m(\mathbb{T}^3)$  per  $m$  sufficientemente grande.

Il metodo dell'energia per le stime a priori per tempi piccoli.

Costruzione di soluzioni approssimate mediante troncamenti.

Convergenza delle soluzioni approssimanti. Passaggio al limite per il termine non lineare dell'equazione.

Unicità delle soluzioni regolari.

## 2.9 L'equazione di Navier–Stokes in $\mathbb{T}^3$

Per questo argomento vedi il paragrafo 4 di questo documento.

Vorticità e dissipazione dell'energia.

La stima a priori data dalla dissipazione dell'energia.

Compattezza delle soluzioni troncate. Passaggio al limite nel termine non lineare. Non derivabilità nel tempo delle soluzioni.

## 3 Il tensore degli sforzi per Navier–Stokes

Qui dimostro l'equazione (15.75) dell'Esposito sul tensore degli sforzi per Navier–Stokes. Per ipotesi il tensore degli sforzi  $N$  è nullo se il tensore di deformazione  $D$  è nullo, dunque, per piccoli valori di  $D$ , si può supporre che  $N(D)$  sia lineare di  $D$ . Inoltre, deve valere l'invarianza per rotazioni nel senso seguente: per ogni  $U \in O_3$  (gruppo unitario di  $\mathbb{R}^3$ ), deve valere

$$N(U^t D U) = U^t N(D) U.$$

Voglio mostrare come da questa ipotesi segue che  $N(D)$  ha un'espressione semplice:

$$N(D) = aD + b \operatorname{tr}(D) \mathbb{I},$$

dove  $a$  e  $b$  sono valori fissati e  $\operatorname{tr}(D)$  è la traccia della matrice  $D$ .

Ricordo che sia  $D$  che  $N$  sono matrici simmetriche. Comincio determinando  $N(\mathbb{I})$ . Per ogni  $U$  unitario

$$N(\mathbb{I}) = N(U^t \mathbb{I} U) = U^t N(\mathbb{I}) U,$$

ma l'unica matrice invariante per qualunque rotazione è necessariamente proporzionale all'identità, dunque

$$N(\mathbb{I}) = \eta \mathbb{I}$$

(in particolare la matrice è invariante per la rotazione che la diagonalizza, dunque è diagonale; l'invarianza per scambi di assi porta alla tesi)). Non ho veramente bisogno di questo fatto, però la dimostrazione è istruttiva per quello che segue.

Sia  $M_i$  la matrice che è 0 tranne che nell'elemento  $ii$ . Sia  $U$  una rotazione che lascia invariato l'asse  $i$ :

$$N(M_i) = N(U^t M_i U) = U^t N(M_i) U,$$

cioè  $N(M_i)$  è invariante per tutte le rotazioni che lasciano invariato l'asse  $i$ . Procedendo con lo stesso ragionamento precedente, ottengo che  $N(M_i)$  è una matrice diagonale, con i due valori  $j \neq i$  uguali. Posso quindi rappresentarla come segue:

$$N(M_i) = aM_i + b\mathbb{I}.$$

I coefficienti  $a$  e  $b$  non possono dipendere da  $i$  per l'invarianza per  $O_3$  (prova ad usare la matrice unitaria che scambia  $i$  con  $j$ ...). Sia ora  $D$  una matrice simmetrica, e sia  $U$  l'unitaria che la diagonalizza:

$$D = U^t \left( \sum \lambda_i M_i \right) U,$$

dove  $\lambda_i$  sono gli autovalori di  $D$ .

$$N(D) = U^t \left( \sum \lambda_i N(M_i) \right) U = aU^t \left( \sum \lambda_i M_i \right) U + b \left( \sum \lambda_i \right) \mathbb{I} = aD + b \operatorname{tr}(D) \mathbb{I},$$

dove la traccia di  $D$  coincide con la somma degli autovalori.

## 4 Navier–Stokes in 3 dimensioni

In questa sezione discuto l'equazione di Navier–Stokes nel toro tridimensionale, provando l'esistenza di soluzioni deboli globali. Discuto inoltre la regolarità delle soluzioni deboli e mostro come in dimensione due si ottiene con le stesse tecniche l'esistenza, unicità e regolarità delle soluzioni. Per approfondimenti e per la teoria di Leray vedi il Gallavotti tra le letture consigliate.

Notazioni e fatti preliminari

$\mathbb{T}^3 = [-\pi, \pi]^3$  con condizioni periodiche = toro tridimensionale

$\hat{f}_{\mathbf{k}} = \int_{\mathbb{T}^3} d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{k}$ -esimo coefficiente di Fourier, definiti per  $f \in L_1$

e dunque per  $f \in L_p$ ,  $p \in [1, +\infty]$ , infatti vale la disuguaglianza di Hölder:

$$\|f\|_1 \leq (2\pi)^{1/q} \|f\|_p, \text{ con } 1/p + 1/q = 1$$

$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f_{\mathbf{k}}$  valida per funzioni  $L_2$

$$\int_{\mathbb{T}^3} f^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{k}} |f_{\mathbf{k}}|^2$$

## 4.1 L'equazione nel toro e in Fourier

L'equazione di Navier–Stokes è

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0; \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Poichè l'impulso medio è una quantità conservata, posso assumere che

$$\int_{\mathbb{T}^3} d\mathbf{x} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0$$

Questa assunzione non è restrittiva, infatti la fisica è invariante per cambiamenti di sistema di riferimento inerziali. Per esercizio scrivi l'equazione di Navier–Stokes per il campo  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ , dove  $\mathbf{w}$  è in vettore costante. Scoprirai che  $\mathbf{v}$  soddisfa l'equazione e dunque le soluzioni per  $\mathbf{v}$  e per  $\mathbf{u}$  si ottengono l'una dall'altra aggiungendo  $\mathbf{w}$ . La condizione di impulso medio nullo in termini di Fourier è  $\hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$ .

Per i coefficienti di Fourier l'equazione di Navier–Stokes è

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_k &= 0, \\ \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{u}}_k &= -i \sum_{\mathbf{h}} (\hat{\mathbf{u}}_{k-h} \cdot \mathbf{h}) \hat{\mathbf{u}}_h - \nu |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{u}}_k - i \mathbf{k} p_k.\end{aligned}\tag{4.2}$$

La condizione di divergenza nulla dice che in realtà  $\hat{\mathbf{u}}_k$  non è un vettore incongiato in  $\mathbb{R}^3$  ma è bidimensionale, e vive nello spazio ortogonale al vettore  $\mathbf{k}$ . Proiettando l'equazione sull'ortogonale a  $\mathbf{k}$  ottengo un'equazione completa, da cui sparisce il termine di pressione  $\mathbf{k} p_k$ . Esso infatti è parallelo a  $\mathbf{k}$ , e sparisce perché è in effetti la reazione vincolare al vincolo  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_k = 0$  (è un fatto generale della meccanica dei sistemi vincolati che proiettare sulla varietà vincolare dà equazioni chiuse, infatti la reazione di un vincolo ideale è ortogonale al vincolo).

Indico con  $\hat{\mathbf{k}}$  il versore  $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ . Il proiettore nella direzione di  $\mathbf{k}$  e nel piano ortogonale a  $\mathbf{k}$  sono dati da:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathbf{k}} &= \hat{\mathbf{k}} \otimes \hat{\mathbf{k}} \\ \Pi_{\mathbf{k}}^\perp &= \mathbb{I} - \hat{\mathbf{k}} \otimes \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Proietto l'equazione sul piano ortogonale a  $\mathbf{k}$ , semplicemente applicando l'operatore  $\Pi_{\mathbf{k}}^\perp$ . Tenendo presente che  $\Pi_{\mathbf{k}}^\perp \hat{\mathbf{u}}_k = \hat{\mathbf{u}}_k$ , che  $\hat{\mathbf{u}}_{k-h} \cdot \mathbf{h}$  è uno scalare, e che  $\mathbf{k} p_k$  è ovviamente parallelo a  $\hat{\mathbf{k}}$ , ottengo:

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{u}}_k = -i \sum_{\mathbf{h}} (\hat{\mathbf{u}}_{k-h} \cdot \mathbf{h}) \Pi_{\mathbf{k}}^\perp \hat{\mathbf{u}}_h - \nu |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{u}}_k.\tag{4.3}$$

Indicherò la parte non lineare dell'equazione con un simbolo

$$\Gamma_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}) = -i \sum_{\mathbf{h}} (\hat{\mathbf{u}}_{k-h} \cdot \mathbf{h}) \Pi_{\mathbf{k}}^\perp \hat{\mathbf{u}}_h.\tag{4.4}$$

Utilizzando il fatto che  $\hat{\mathbf{u}}_k \cdot \mathbf{k} = 0$ , posso riscrivere

$$\hat{\mathbf{u}}_{k-h} \cdot \mathbf{h} = \hat{\mathbf{u}}_{k-h} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{k} + \mathbf{k}) = \hat{\mathbf{u}}_{k-h} \cdot \mathbf{k},$$

quindi

$$\Gamma_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}) = -i \sum_{\mathbf{h}} (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}-\mathbf{h}} \cdot \mathbf{k}) \Pi_{\mathbf{k}}^{\perp} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}. \quad (4.5)$$

Questo passaggio è la versione in Fourier dell'identità

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}),$$

che vale proprio perché  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

La differenza tra Navier–Stokes ed Eulero per domini senza bordo è nella sola presenza del termine viscoso  $\nu \Delta \mathbf{u}$ , che in Fourier è  $-\nu |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$ . Per trarre vantaggio dal segno negativo (cioè dal fatto che il laplaciano è un operatore negativo), e per eliminare parte dei termini dell'equazione (4.3), la riscriviamo in forma integrale perturbando rispetto al flusso dell'equazione lineare  $\frac{d}{dt} a(t) = -\nu |\mathbf{k}|^2 a$ , che ha soluzione  $e^{-\nu |\mathbf{k}|^2 t} a(0)$ :

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t) = e^{-\nu |\mathbf{k}|^2 t} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(0) + \int_0^t ds e^{-\nu |\mathbf{k}|^2 (t-s)} \Gamma_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}(s)) \quad (4.6)$$

## 4.2 Il laplaciano e l'equazione del calore

Il laplaciano è un operatore negativo (ha autovalori negativi). Consideriamo a esempio il problema parabolico  $\partial_t f = \nu \Delta f$  sul toro. Integrando in  $\mathbf{x}$  si ottiene immediatamente che  $\int f$  è una costante del moto.

La soluzione dell'equazione del calore  $\partial_t f = \Delta f$  in Fourier è

$$\hat{f}_{\mathbf{k}}(t) = e^{-\nu |\mathbf{k}|^2 t} \hat{f}_{\mathbf{k}}(0),$$

e dunque nel limite  $t \rightarrow +\infty$  tutti i coefficienti di Fourier vanno a 0, tranne quello per  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ , che è costante. Dunque  $f$  tende esponenzialmente all'equilibrio, che è  $\frac{1}{|\mathbb{T}|} f_{\mathbf{0}} = \frac{1}{|\mathbb{T}|} \int_{\mathbb{T}} f$ , che è proprio la media di  $f$ .

Oltre alla convergenza rapidissima all'equilibrio, il laplaciano regolarizza la soluzione. Ricordo che in Fourier sul toro l'appartenenza allo spazio di Sobolev  $H_m$  (cioè lo spazio delle funzioni con derivate  $m$ -esime in  $L_2$ ) coincide con la limitatezza di

$$|\hat{f}_{\mathbf{0}}|^2 + \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^{2m} |\hat{f}_{\mathbf{k}}|^2.$$

Ora

$$|\mathbf{k}|^a e^{-\nu |\mathbf{k}|^2 t} = \frac{1}{(\nu t)^{a/2}} |\sqrt{\nu t} \mathbf{k}|^a e^{-(\sqrt{\nu t} |\mathbf{k}|)^2} \leq \frac{C_a}{(\nu t)^{a/2}},$$

dunque  $f(t) \in H_m$  per ogni  $m$  non appena  $t > 0$ . L'appartenenza a qualunque Sobolev implica  $f(t) \in C^\infty$ .

Inoltre, se i coefficienti di Fourier di una funzione decadono a 0 come  $e^{-a|\mathbf{k}|}$ , allora la funzione è analitica. Per esercizio, provate che se  $f(x)$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$ , con i coefficienti di Fourier che verificano  $\sum_k e^{a|k|} |\hat{f}_k| < +\infty$ , allora  $f$  è prolungabile ad una funzione analitica per  $z = x + iy$ , con  $|y| < a$ . Se decadono come  $e^{-a|\mathbf{k}|^2}$ , allora la funzione si prolunga analiticamente a tutto il piano complesso.

Dunque, la soluzione dell'equazione del calore  $f(t)$  è analitica per  $t > 0$ .



Parlando rozzamente, questa proprietà di regolarizzazione è dovuta al fatto che  $e^{\nu t \Delta}$  deprime il  $\mathbf{k}$ -esimo coefficiente di Fourier in modo tanto più efficace quanto più  $|\mathbf{k}|$  è grande. Inoltre, a grandi valori di  $\mathbf{k}$  corrispondono piccole scale in  $\mathbf{x}$  (infatti il corrispondente contributo è del tipo  $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ , che oscilla su scala  $1/|\mathbf{k}|$ ). Dunque la presenza del laplaciano regolarizza più velocemente le scale più piccole, cioè proprio quelle che “minacciano” la regolarità.

### 4.3 Stime a priori per Navier–Stokes

Le stime a priori che servono per provare l’esistenza debole globale delle soluzioni sono particolarmente semplici.

La prima disuguaglianza ha a che fare con l’energia. Mentre per Eulero l’energia è conservata, per Navier–Stokes è dissipata. Indicherò l’energia al tempo  $t$  con  $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}(t)|^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= (\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u}) = -(\mathbf{u}, (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \nu (\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) - (\mathbf{u}, \nabla p) \\ &= \nu (\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = \nu \sum_i \int_{\mathbb{T}^3} u_i \Delta u_i = -\nu \sum_i \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla u_i|^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Infatti il termine (nonlineare) di trasporto dà contributo nullo per antisimmetria, e il termine di pressione dà contributo nullo perché i gradienti sono ortogonali ai campi a divergenza nulla. In Fourier questa uguaglianza si scrive

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}|^2 - \frac{\nu}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}|^2. \quad (4.8)$$

Conseguenze:

$$\sum_{\mathbf{k}} |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}|^2 \leq c E_0, \quad (4.9)$$

$$|\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}| \leq c \sqrt{E_0}, \quad (4.10)$$

$$\int_0^t \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t)|^2 = \frac{(2\pi)^3}{\nu} (E_0 - E(t)) \leq \frac{c}{\nu} E_0 \quad (4.11)$$

(sto indicando con  $c$  qualunque costante numerica indipendente dal dato iniziale e dalla viscosità). L’ultima stima è stata ottenuta integrando nel tempo l’uguaglianza 4.8.

La stima dell’energia permette di stimare il termine non lineare (4.5) dell’equazione:

$$|\Gamma_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}})| \leq |\mathbf{k}| \sum_{\mathbf{h}} |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}-\mathbf{h}}| |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}| \leq c |\mathbf{k}| E_0, \quad (4.12)$$

dove per la somma ho usato la disuguaglianza di Schwartz.

### 4.4 Esistenza delle soluzioni deboli

Lavoro in Fourier. Come abbiamo fatto per Eulero, considero  $N$  intero e costruisco le soluzioni dell’equazione troncata

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^N = \mathbb{P}^N \Gamma_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^N) - \nu |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^N. \quad (4.13)$$

con  $\hat{\mathbf{u}}_k^N = 0$  per  $|\mathbf{k}| > N$ ,  $\mathbb{P}^N$  proiettore sul sottospazio dei modi  $|\mathbf{k}| \leq N$ . Il dato iniziale del problema troncato è la proiezione del dato iniziale:  $\hat{\mathbf{u}}_k^N(0) = \mathbb{P}^N \hat{\mathbf{u}}_k(0)$ .

Per esercizio provate che le stime (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) valgono anche per le soluzioni del problema troncato.

Per  $\mathbf{k}$  fissato, la sequenza  $\hat{\mathbf{u}}_k^N(t)$  è limitata in  $t$ , uniformemente (dalla (4.10)). Usando le stime (4.12) e (4.10), l'equazione (4.13) dà:

$$\left| \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{u}}_k^N(t) \right| \leq c|\mathbf{k}| E_0 + c\nu|\mathbf{k}|^2 \sqrt{E_0} \quad (4.14)$$

Dunque la sequenza ha anche la derivata temporale uniformemente limitata. Posso invocare il teorema di Ascoli–Arzelà ed estrarre una sottosequenza uniformemente convergente su ogni compatto di  $t \in [0, +\infty)$ . Usando il consueto argomento triangolare, esiste una sottosequenza, che continuo ad indicare con  $N$ , per cui, per ogni  $\mathbf{k}$  e per ogni  $t$

$$\hat{\mathbf{u}}_k^N(t) \rightarrow \hat{\mathbf{u}}_k(t),$$

dove le  $\hat{\mathbf{u}}_k(t)$  sono continue in  $t$  e la convergenza è uniforme sui compatti di  $[0, +\infty)$ .

Devo dimostrare che le funzioni  $\hat{\mathbf{u}}_k$  risolvono l'equazione di Navier–Stokes, in una qualche forma. Per ora provo che risolvono l'equazione (4.6). Si tratta di provare che

$$\int_0^t ds e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)} \Gamma_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}^N(s)) \rightarrow \int_0^t ds e^{-\nu|\mathbf{k}|^2(t-s)} \Gamma_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}(s))$$

Il termine  $\Gamma_{\mathbf{k}}$  è definito dalla somma (4.5), con  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^3$ . Proverò che il resto di questa somma, cioè  $\sum_{|\mathbf{h}| \geq M}$ , integrata nel tempo, tende a 0 per  $M \rightarrow +\infty$ , per ogni  $\hat{\mathbf{u}}$  che soddisfa le stime a priori (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) (e quindi indipendentemente da  $N$ ). Questo fatto, attraverso un consueto argomento triangolare, permette effettivamente di passare al limite nel termine non lineare dell'equazione (4.6).

$$\left| \sum_{|\mathbf{h}| \geq M} (\hat{\mathbf{u}}_{k-h} \cdot \mathbf{h}) \Pi_{\mathbf{k}}^\perp \hat{\mathbf{u}}_h \right| \leq |\mathbf{k}| \sum_{|\mathbf{h}| \geq M} |\hat{\mathbf{u}}_{k-h}| |\hat{\mathbf{u}}_h|$$

Usando il fatto che  $\hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$  (campo di velocità a media nulla), e che se  $\mathbf{h} \neq \mathbf{k}$  allora  $|\mathbf{h} - \mathbf{k}| \geq 1$ , posso stimare dall'alto moltiplicando per  $|\mathbf{h} - \mathbf{k}|$ ; inoltre, poiché la somma è ristretta a  $|\mathbf{h}| \geq M$ , posso anche moltiplicare per  $|\mathbf{h}|/M$ . Ottengo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|\mathbf{h}| \geq M} (\hat{\mathbf{u}}_{k-h} \cdot \mathbf{h}) \Pi_{\mathbf{k}}^\perp \hat{\mathbf{u}}_h \right| &\leq \frac{1}{M} |\mathbf{k}| \sum_{|\mathbf{h}| \geq M} |\mathbf{h} - \mathbf{k}| |\hat{\mathbf{u}}_{k-h}| |\mathbf{h}| |\hat{\mathbf{u}}_h| \\ &\leq \frac{1}{M} |\mathbf{k}| \sum_{|\mathbf{h}|} |\mathbf{h}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_h|^2, \end{aligned}$$

dove ho usato come al solito Schwartz. Usando (4.11) ottengo:

$$\left| -i \int_0^t e^{-\nu(t-s)|\mathbf{k}|^2} \sum_{|\mathbf{h}| \geq M} (\hat{\mathbf{u}}_{k-h} \cdot \mathbf{h}) \Pi_{\mathbf{k}}^\perp \hat{\mathbf{u}}_h \right| \leq \frac{c|\mathbf{k}|E_0}{\nu M}$$

Osservazioni.

(1) La stessa costruzione di  $\hat{\mathbf{u}}$  funziona anche per Eulero tranne l'ultimo passaggio, quello che prova che posso passare al limite nell'equazione. Per Eulero non si riesce a provare l'esistenza di soluzioni deboli globali.

(2) L'effetto regolarizzante del laplaciano è stato utilizzato in realtà solo per la stima (4.11). Potevamo passare al limite nello stesso modo anche nell'equazione integrale che si ottiene dall'equazione differenziale (4.3), integrando in  $t$ .

(3) La stima chiave (4.11) parla di vorticità. Infatti

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{k}} &= i\mathbf{k} \wedge \hat{\mathbf{u}}_k \\ |\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{k}}| &= |\mathbf{k}| |\hat{\mathbf{u}}_k|, \quad \text{perché } \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_k = 0.\end{aligned}$$

Dunque

$$\int_0^t \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_k(t)|^2 = c \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \boldsymbol{\omega}^2.$$

Ricordo che solo nel caso bidimensionale si conservano le norme  $L_p$  della vorticità. Infatti l'equazione di Navier–Stokes per la vorticità in dimensione tre è:

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega},$$

e l'unica legge di conservazione valida è quella per la vorticità totale  $\int \boldsymbol{\omega}$ .

## 4.5 Soluzioni deboli

Ho solo trovato una soluzione continua in  $t$  per l'equazione (4.6), forma integrale per i coefficienti di Fourier. Poiché l'integrando è limitato, come segue dalla stima (4.12), l'integrale è continuo e derivabile quasi ovunque in  $t$ , e dunque, quasi ovunque in  $t$  vale l'equazione in forma differenziale (4.3). Poiché  $\hat{\mathbf{u}}_k$  sono quadrato sommabili, per la stima dell'energia, ho in effetti definito una funzione  $\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{T}^3)$ . Moltiplicando per i coefficienti di Fourier di un campo regolare e a divergenza nulla e sommando su  $\mathbf{k}$ , si ottiene che  $\mathbf{u}$  verifica quasi ovunque in  $t$  la seguente equazione debole:

$$\partial_t(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}) = (\partial_j \phi_j, u_i u_j) + \nu(\Delta \boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}).$$

Osservazione: un punto fondamentale è che mentre  $\hat{\mathbf{u}}_k(t)$  sono continue in  $t$ , la continuità non è nota per  $\mathbf{u}(t)$  in  $L_2$ . Inoltre, anche “dato iniziale” va inteso in senso debole: per ogni  $\boldsymbol{\phi}$  regolare

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}(t)) = (\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}(0)).$$

Infine, non essendo garantita la continuità  $L_2$ , l'energia può non essere una funzione continua del tempo.

## 4.6 Autoregolazione

Mi aspetto che la presenza del laplaciano nell'equazione dia regolarità alle soluzioni, come avviene per l'equazione del calore. Non è veramente così. L'appartenenza allo spazio  $H_m$  (derivate  $m$ -esime in  $L_2$ ) è equivalente alla limitatezza, insieme a  $|\hat{\mathbf{u}}_k|$ , di

$$\sum |\mathbf{k}|^{2m} |\hat{\mathbf{u}}_k|^2.$$

Come abbiamo visto nella sezione 4.2 l'applicazione del semigrupp del calore regolarizza la soluzione. Però il termine non lineare in Fourier è una convoluzione, dunque ogni  $\hat{\mathbf{u}}_h$  non nullo dà contributi a tutte le derivate  $\hat{\mathbf{u}}_k$ . In altri parole, anche assumendo che inizialmente  $|\mathbf{u}|_m^2 = \sum |\mathbf{k}|^{2m} |\hat{\mathbf{u}}_k|^2 < +\infty$ , l'unica informazione che è sempre valida è la limitazione dell'energia  $\sum |\hat{\mathbf{u}}_k|^2 < +\infty$ , e il termine non lineare potrebbe spostare energia dai moti per  $\mathbf{k}$  piccolo ai moti per  $\mathbf{k}$  grande, facendo divergere  $\sum |\mathbf{k}|^{2m} |\hat{\mathbf{u}}_k|^2$ .

In quello che segue useremo un'altra caratterizzazione per la regolarità:

$$D_m(\hat{\mathbf{u}}) = \sup_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^m |\hat{\mathbf{u}}_k|.$$

La limitatezza di  $D_m$  non è equivalente alla limitatezza di  $H_m$ . Un semplice calcolo (esercizio) mostra che per limitare  $H_m$  serve  $D_a < \infty$  per  $a - d \geq d/2$ . In dimensione tre le funzioni in  $H_m$  per  $m > 3/2$  sono continue, dunque se  $D_a < \infty$  la funzione è in  $C^{a-3}$ .

Il teorema di autogolarizzazione afferma che se la soluzione debole  $\mathbf{u}$  è sufficientemente regolare, allora è  $C^\infty$ . L'ipotesi è che per un  $\alpha > d - 1$ , dove  $d$  è la dimensione 2 o 3, valga

$$\sup_{t \in [0, T]} D_\alpha(\hat{\mathbf{u}}(t)) \leq C_\alpha < +\infty. \quad (4.15)$$

La tesi è che  $D_\beta(\hat{\mathbf{u}})$  è limitata per ogni  $\beta$  per  $t > 0$ , e quindi  $\mathbf{u}$  è una funzione  $C^\infty$ .

La prova passa attraverso una migliore stima di  $\Gamma_{\mathbf{k}}$ , possibile per l'ipotesi fatta. Ripartendo dalla definizione (4.5) e dando un'occhiata alla (4.12):

$$|\Gamma_{\mathbf{k}}| \leq |\mathbf{k}| \sum_{\mathbf{h}} |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}-\mathbf{h}}| |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}| \leq |\mathbf{k}| C_\alpha^2 \sum_{\mathbf{h} \neq \mathbf{0}, \mathbf{k}} \frac{1}{|\mathbf{k}-\mathbf{h}|^\alpha |\mathbf{h}|^\alpha} \quad (4.16)$$

dove ho usato ancora che  $\hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$ , cioè che la media è nulla per il campo di velocità. La somma è stimabile, a meno di costanti, con

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mathbf{y}}{(1 + |\mathbf{k}-\mathbf{y}|^\alpha)(1 + |\mathbf{y}|^\alpha)} = \int_B \dots + \int_{B^c} \dots \quad (4.17)$$

dove  $B$  è la regione  $|\mathbf{y}| < 2|\mathbf{k}|$ , e  $B^c$  la sua complementare. Il contributo per  $B^c$  è facilmente stimabile perché

$$|\mathbf{k}-\mathbf{y}| \geq ||\mathbf{y}| - |\mathbf{k}|| > \frac{1}{2}|\mathbf{y}|. \quad (4.18)$$

Dunque, a meno di costanti

$$\int_{B^c} \dots \leq c \int_{|\mathbf{y}| \geq 2|\mathbf{k}|} \frac{1}{|\mathbf{y}|^{2\alpha}} = \frac{c}{|x|^{2\alpha-d}},$$

se  $\alpha > d/2$  (notate che se  $\alpha < d/2$  l'integrale complessivo è divergente per ogni  $\mathbf{k}$ ).

Il contributo per  $B$  lo stimo così:

$$\begin{aligned} \int_B \frac{d\mathbf{y}}{(1 + |\mathbf{k}-\mathbf{y}|^\alpha)(1 + |\mathbf{y}|^\alpha)} &= \frac{1}{|\mathbf{k}|^\alpha} \int_B d\mathbf{y} \frac{|\mathbf{k}|^\alpha}{(1 + |\mathbf{k}-\mathbf{y}|^\alpha)(1 + |\mathbf{y}|^\alpha)} \\ &\leq c \frac{1}{|\mathbf{k}|^\alpha} \int_B d\mathbf{y} \frac{|\mathbf{k}-\mathbf{y}|^\alpha + |\mathbf{y}|^\alpha}{(1 + |\mathbf{k}-\mathbf{y}|^\alpha)(1 + |\mathbf{y}|^\alpha)} \leq c \frac{1}{|\mathbf{k}|^\alpha} \left( \int_B \frac{d\mathbf{y}}{1 + |\mathbf{k}-\mathbf{y}|^\alpha} + \int_B \frac{d\mathbf{y}}{1 + |\mathbf{k}|^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Notando che in  $B$  vale  $|\mathbf{k} - \mathbf{y}| \leq 3|\mathbf{k}|$  ottengo

$$\int_B \dots \leq \frac{c}{|\mathbf{k}|^\alpha} \int_{1 \leq |\mathbf{y}| \leq 3|\mathbf{k}|} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^\alpha} = \frac{c}{|\mathbf{k}|^\alpha} \int_1^{3|\mathbf{k}|} dr \frac{r^{d-1}}{r^\alpha}.$$

Il valore dell'ultimo integrale si stima diversamente a seconda dei valori di  $\alpha$ :

$$\int_1^{3|\mathbf{k}|} dr \frac{r^{d-1}}{r^\alpha} \leq \begin{cases} c - \frac{c}{|\mathbf{k}|^{\alpha-d}} \leq c & \text{se } \alpha > d \\ c + c \log |\mathbf{k}| & \text{se } \alpha = d \\ c + c|\mathbf{k}|^{d-\alpha} & \text{se } \alpha < d \end{cases} \quad (4.19)$$

La stima dell'integrale in  $B$  è sempre peggiore di quella in  $B^c$ , dunque  $\Gamma_{\mathbf{k}}$  è stimato, per  $\mathbf{k} \neq 0$ , da

$$|\Gamma_{\mathbf{k}}| \leq \begin{cases} c|\mathbf{k}|^{1-\alpha} & \text{se } \alpha > d \\ c|\mathbf{k}|^{1-\alpha} \log |\mathbf{k}| & \text{se } \alpha = d \\ c|\mathbf{k}|^{1-2\alpha+d} & \text{se } d/2 < \alpha < d \end{cases}$$

Posso ora stimare  $\int_0^t ds e^{-\nu(t-s)|\mathbf{k}|^2} |\Gamma_{\mathbf{k}}|$ , semplicemente sostituendo  $|\Gamma_{\mathbf{k}}|$  con la stima appena trovata e integrando esplicitamente  $\int_0^t ds e^{-\nu(t-s)|\mathbf{k}|^2} \leq 1/(\nu|\mathbf{k}|^2)$ :

$$\int_0^t ds e^{-\nu(t-s)|\mathbf{k}|^2} |\Gamma_{\mathbf{k}}| \leq \begin{cases} \frac{c}{\nu} |\mathbf{k}|^{-1-\alpha} & \text{se } \alpha > d \\ \frac{c}{\nu} |\mathbf{k}|^{-1-\alpha} \log |\mathbf{k}| & \text{se } \alpha = d \\ \frac{c}{\nu} |\mathbf{k}|^{-1-2\alpha+d} & \text{se } d/2 < \alpha < d \end{cases}$$

Sia ora  $\alpha = d - 1 + \varepsilon$  (e dunque anche di  $\alpha > d/2$ , essendo  $d \geq 2$ ). Dall'equazione (4.6):

$$|\hat{\mathbf{u}}_k(t)| \leq |\hat{\mathbf{u}}_k(0)| \frac{\sqrt{\nu t} |\mathbf{k}| e^{-\nu t |\mathbf{k}|^2}}{\sqrt{\nu t} |\mathbf{k}|^\beta} + \left| \int_0^t \dots \right|.$$

Il primo termine è stimato da

$$c/|\mathbf{k}|^\beta,$$

qualunque sia  $\beta$ . Il secondo per  $\varepsilon$  piccolo, usando la stima per  $\alpha < d$ , con

$$c|\mathbf{k}|^{-1-2(d-1)-2\varepsilon+d} = c|\mathbf{k}|^{-(d-1+2\varepsilon)}.$$

Dunque sono passato da  $\alpha = d - 1 + \varepsilon$  a  $\alpha = d - 1 + 2\varepsilon$ . Quando  $\alpha > d$  uso le altre stime, e aumento in regolarità di 1 ad ogni passaggio (se  $\alpha = d$  aumento di  $1 - \delta$ , per ogni  $\delta$ ).

Osservazioni.

(1) Ho ottenuto regolarità per  $t > 0$ ; se il dato iniziale è regolare posso evitare di stimare la parte del dato iniziale ricorrendo a  $e^{-\nu|\mathbf{k}|^2 t}$ , e usare la regolarità del dato iniziale stesso, ottenendo che  $\mathbf{u}$  è regolare quanto il dato iniziale per  $t \in [0, T]$ .

(2) Se il dato iniziale non è regolare, devo essere leggermente più cauto: nella stima della parte  $e^{\nu t \Delta} \mathbf{u}_0$  la costante diverge in  $t = 0$ , dunque potrebbe sembrare che non posso davvero iterare il procedimento per ottenere regolarità superiori. D'altra parte basta far iniziare la procedura

dall'istante  $t_0 > 0$ . In tal caso posso far partire il bootstrap con  $|\mathbf{k}|^{-(d-1+2\varepsilon)}|\hat{\mathbf{u}}_k(t)| \leq c/\sqrt{t_0}+c$  per  $t \leq t_0$ . Dall'arbitrarietà di  $t_0$  ottengo la regolarità per ogni  $t > 0$ .

(3) L'autoregolizzazione afferma che se la soluzione è abbastanza regolare nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ , allora è  $C^\infty$ , non afferma che se in dato iniziale è abbastanza regolare allora lo è anche la soluzione.

(4) Se il dato iniziale è in  $H_m$  per  $m \geq 3$ , posso usare le stime a priori in  $H_m$  valide per tempi piccoli e concludere che la soluzione esiste regolare per tempi piccoli; il teorema di autoregolizzazione garantisce che la soluzione trovata è  $C^\infty$ , ma nulla dice della sua prolungabilità.

(5) Per Navier–Stokes in tre dimensioni nulla garantisce in generale la regolarità sufficiente ad innescare questo “bootstrap” di regolarità. In dimensione due, invece, la conservazione delle norme  $L_p$  della vorticità per Eulero si trasforma in stime a priori che permettono di applicare il teorema.

## 4.7 Il caso bidimensionale

Nel toro bi o tri dimensionale la vorticità totale è nulla, infatti  $\int \omega$  è l'integrale di un rotore per un dominio senza bordo.

Nel caso bidimensionale, tutte le norme  $L_p$  per  $p > 1$  della vorticità decadono nel tempo. Il calcolo è facile se  $p$  è intero positivo

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^2} |\omega|^p = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^2} \omega^p = \nu p \int_{\mathbb{T}^2} \omega^{p-1} \Delta \omega = -\nu p(p-1) \int_{\mathbb{T}^2} \omega^{p-2} |\nabla \omega|^2 \leq 0$$

In particolare (vedi l'osservazione (3) della sottosezione 4)

$$\sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_k|^2 = c \int_{\mathbb{T}^2} \omega^2 \leq c \int_{\mathbb{T}^2} \omega_0^2 \quad (4.20)$$

cioè  $\mathbf{u} \in H_1$ . Ne segue che  $|\mathbf{k}| |\hat{\mathbf{u}}_k| \leq c$ , che però non è ancora sufficiente per innescare il bootstrap. Invece si può controllare meglio  $\Gamma_{\mathbf{k}}$ . Tornando alla sua espressione (4.4):

$$|\Gamma_{\mathbf{k}}| \leq \sum_{\mathbf{h}} |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}-\mathbf{h}}| |\mathbf{h}| |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}| \leq \sum_{\mathbf{h}} |\mathbf{k}-\mathbf{h}| |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}-\mathbf{h}}| |\mathbf{h}| |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}| \leq c \|\omega_0\|_2^2, \quad (4.21)$$

dove ho usato ancora che  $\hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$  e quindi  $1 \leq |\mathbf{k}-\mathbf{h}|$ , e infine la disuguaglianza di Schwartz. Rispetto alla stima (4.12) ho vinto un altro  $|\mathbf{k}|$  al denominatore. Dunque posso stimare

$$\int_0^t ds e^{-\nu(t-s)|\mathbf{k}|^2} |\Gamma_{\mathbf{k}}| \leq c \|\omega_0\|_2^2 \frac{1}{\nu |\mathbf{k}|^2}.$$

Da questa disuguaglianza, procedendo come nel teorema di autoregolizzazione, ottengo che

$$|\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_k| \leq c < +\infty. \quad (4.22)$$

Ora posso invocare il teorema di autoregolizzazione con  $\alpha = 2 > d - 1 = 2 - 1 = 1$ , per affermare che la soluzione è  $C^\infty$  per  $t > 0$ .

Se il dato iniziale è tale che  $|\mathbf{k}|^\alpha |\hat{\mathbf{u}}_k| < +\infty$  per  $\alpha > 3$ , allora si prova facilmente che la soluzione è unica, secondo i seguenti passaggi (svolgerli per esercizio):

- se  $|\mathbf{k}|^\alpha |\hat{\mathbf{u}}_k| < +\infty$  allora lo è per tutti i tempi (usando l'autoregolarizzazione a partire da (4.22))
- $|\mathbf{k}|^\alpha |\hat{\mathbf{u}}_k|$  permette di stimare  $\sup_{\mathbf{x}} |\partial \mathbf{u}|$
- la norma  $L_2$  della differenza di due soluzioni si stima in termini della differenza stessa e di  $\sup_{t,\mathbf{x}} |\partial \mathbf{u}|$
- la soluzione debole ottenuta è continua in  $t = 0$ , nella norma  $L_2$  per  $\mathbf{x}$ , infatti la limitatezza di  $|\mathbf{k}|^\alpha |\hat{\mathbf{u}}_k|$  garantisce l'assoluta sommabilità di  $\sum |\hat{\mathbf{u}}_k|^2$

Osservazioni.

(1) In dimensione due, tutte le soluzioni deboli con dato iniziale  $L_2$  sono  $C^\infty$  non appena  $t > 0$ . Infatti dalla stima a priori (4.11), segue che  $\int_0^t \|\omega(s)\|_2^2 < +\infty$ : questo non implica che  $\|\omega(t)\|_2^2$  è limitato, ma per lo meno implica che è limitato quasi ovunque in  $t$ . Ma allora lo è per una sequenza  $t_k \rightarrow 0$ . Ripetendo l'argomento di regolarità scegliendo  $t_k$  come dato iniziale, si ottiene che la soluzione è  $C^\infty$  per ogni  $t > t_k$ , e dunque, in definitiva, per  $t > 0$ .

(2) L'argomento che prova che  $\mathbf{u}$  è  $C^\infty$  assumendo  $\omega \in L^2$  non funziona in tre dimensioni, infatti valgono solo i primi passaggi che portano ad affermare che  $\hat{\mathbf{u}}_k$  decade come  $|\mathbf{k}|^2$ , mentre per l'autoregolarizzazione in dimensione tre servirebbe  $\alpha > d - 1 = 2$ .

Ciò nonostante, il risultato vale anche in  $\mathbb{T}^3$ . Infatti

$$\begin{aligned} |\Gamma_k| &\leq \sum_{\mathbf{h}} |\hat{\mathbf{u}}_{k-h}| |\mathbf{h}| |\hat{\mathbf{u}}_h| = \sum_{\mathbf{h}} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{h}| |\hat{\mathbf{u}}_{k-h}| |\mathbf{h}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_h|}{|\mathbf{k} - \mathbf{h}| |\mathbf{h}|} \\ &\leq c \left( \sum_{\mathbf{h}} |\mathbf{k} - \mathbf{h}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_{k-h}|^2 |\mathbf{h}|^4 |\hat{\mathbf{u}}_h|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{\mathbf{h}} \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{h}|^2 |\mathbf{h}|^2} \right)^{1/2}; \end{aligned} \quad (4.23)$$

usando la limitatezza di  $|\mathbf{h}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_h|$  e della norma  $L_2$  della vorticità, rimane da stimare solo l'ultima somma. Lo abbiamo in realtà già fatto in (4.17), (4.18), (4.19) con  $\alpha = 2 < d$  e dà

$$\left( \frac{c}{|\mathbf{k}|^{2 \cdot 2 - 3}} \right)^{1/2} = \frac{c}{|\mathbf{k}|^{1/2}}.$$

A questo punto, usando il decadimento dovuto all'integrale temporale, raggiungo un decadimento  $|\mathbf{k}|^{2+1/2}$ , sufficiente per innescare il bootstrap.

## 4.8 Unicità in dimensione due

Nella sezione precedente ho lasciato per esercizio l'unicità in dimensione due, assumendo abbastanza regolarità per il dato iniziale. Basta molto meno: se  $\omega_0 \in L^2$ , si riesce a provare l'unicità. Servono vari passaggi preliminari.

1. Se  $\omega_0 \in L^2$  allora  $\|\omega(t)\|_2 \leq \|\omega_0\|_2$  per ogni  $t$ .

Questa è una semplice conseguenza del decadimento delle norme di  $\omega$ .

2. Poiché  $\|\omega(t)\|_2^2 < c$  per ogni  $t$  allora  $\mathbf{u}$  è continua in  $t$  rispetto alla norma  $L_2$  in  $\mathbf{x}$ .

Come nella sezione precedente stimo  $|\Gamma_k| \leq c$ ; inserendo questa stima nell'equazione (4.3), ottengo

$$\left| \hat{\mathbf{u}}_k(t) - e^{-\nu t|\mathbf{k}|^2} \hat{\mathbf{u}}_k(0) \right| \leq \frac{c}{\nu|\mathbf{k}|^2}.$$

In questo modo provo che la differenza in  $L_2$  tra  $\mathbf{u}$  e  $e^{\nu t \Delta} \mathbf{u}_0$  è assolutamente sommabile in  $L_2$ . Usando la convergenza dominata provo che

$$\sum_{\mathbf{k}} \left| \hat{\mathbf{u}}_k(0) - e^{-\nu t|\mathbf{k}|^2} \hat{\mathbf{u}}_k(0) \right|^2$$

tende a 0 per  $t$  che tende a 0. Unendo quest'ultimo fatto al precedente ottengo esattamente la continuità per  $t = 0$  nella norma  $L_2$  (per  $t > 0$  è tutto più semplice: ho stime di decadimento con esponente comunque grande, che mi danno l'assoluta sommabilità di  $|\hat{\mathbf{u}}_k|^2$  e dunque la continuità).

3. Dalla limitatezza della norma  $L_2$  della vorticità ottengo anche

$$|\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_k(t)| \leq \frac{c}{\sqrt{\nu t}} + c.$$

Infatti, procedendo come per il teorema di autoregolarizzazione, ma esplicitando la dipendenza delle costanti dal tempo:

$$|\hat{\mathbf{u}}_k(t)| \leq e^{-\nu|\mathbf{k}|^2 t} |\hat{\mathbf{u}}_k(0)| + \frac{c}{|\mathbf{k}|^2} \leq \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \left( \frac{c}{\sqrt{\nu t}} + c \right),$$

infatti

$$e^{-\nu|\mathbf{k}|^2 t} |\hat{\mathbf{u}}_k(0)| = \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \left( |\mathbf{k}| \sqrt{\nu t} e^{-\nu|\mathbf{k}|^2 t} \right) (|\mathbf{k}| |\hat{\mathbf{u}}_k(0)|) \leq \frac{c}{|\mathbf{k}|^2 \sqrt{\nu t}}.$$

4. Stimo di nuovo ...

## Riferimenti bibliografici

- [1] Alexandre J. Chorin, Jerrold E. Marsden: **A mathematical introduction to fluid mechanics**, Springer 1993.
- [2] Raffaele Esposito: **Appunti delle lezioni di Meccanica Razionale**, Aracne 1999.
- [3] Giovanni Gallavotti: **Foundations of Fluid Dynamics**, Springer 2005; vedi anche **Ipotesi per una introduzione alla meccanica dei fluidi**, Quaderni del Consiglio Nazionale delle Ricerche, GNFM 1996.
- [4] B.V. Gnedenko: **Teoria della Probabilità**, Editori Riuniti, 1987.
- [5] I. Guikhman, A. Skorokhod: **Introduction à la théorie des processus aléatoires**, Editions Mir 1980.
- [6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz: **Teoria dell'elasticità** (Fisica teorica 7), Editori Riuniti



- [7] Carlo Marchioro, Mario Pulvirenti: **Vortex methods in two-dimensional fluid dynamics**, Lecture notes in physics **203**, Springer 1984.
- [8] Carlo Marchioro, Mario Pulvirenti: **Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids**, Springer 1994.
- [9] R.S. Johnson **A modern introduction to the mathematical theory of water waves** Cambridge text in applied mathematics 1997.