Seminari PLS

Contesti e pretesti nei problemi di matematica

Dario Benedetto

Professore associato in Fisica Matematica, *Sapienza*

La matematica contestualizzata

Di fronte a un fenomeno o a una situazione del “mondo reale”:

- formalizzare matematicamente
- usare la matematica
- interpretare e valutare i risultati

L'insegnamento della matematica

Il nostro insegnamento si concentra tradizionalmente sul solo "uso" della matematica, che include praticamente tutti gli aspetti per noi importanti: concetti, formule, procedure, ragionamenti

L'insegnamento della matematica

Il nostro insegnamento si concentra tradizionalmente sul solo "uso" della matematica, che include praticamente tutti gli aspetti per noi importanti: concetti, formule, procedure, ragionamenti

D'altra parte tutti noi insistiamo sull'enorme attuale rilevanza della matematica nella scienza e nelle attività umane.

L'insegnamento della matematica

Il nostro insegnamento si concentra tradizionalmente sul solo "uso" della matematica, che include praticamente tutti gli aspetti per noi importanti: concetti, formule, procedure, ragionamenti

D'altra parte tutti noi insistiamo sull'enorme attuale rilevanza della matematica nella scienza e nelle attività umane.

È giusto dunque che i nostri studenti sperimentino l'utilità della matematica nel "mondo reale".

La politica accademica

L'insegnamento della matematica è culturalmente figlio dei settori della matematica pura: algebra / geometria / logica.

Nei corsi di laurea, i percorsi per l'insegnamento sono in genere negli indirizzi **generali**, cioè quelli di **matematica pura**.

Nella preparazione del docente della mia generazione mancavano spesso corsi di probabilità, statistica, analisi numerica, che sono i settori più applicati.

L'interazione con la Fisica

La Fisica è il primo ramo applicato della Matematica, senza essere solo matematica (la geometria è matematica...).

In Fisica lo schema precedente

matematizzare / usare / valutare i risultati

si salda con il **metodo scientifico**.

L'interazione con la Fisica

Invece di favorire l'integrazione, la comunità fisica è riuscita a prendere altro spazio autonomo nei percorsi didattici, fino ad aprire alla possibilità di una seconda prova di fisica all'esame di maturità, alternativa a quella di matematica.

L'interazione con la Fisica

Invece di favorire l'integrazione, la comunità fisica è riuscita a prendere altro spazio autonomo nei percorsi didattici, fino ad aprire alla possibilità di una seconda prova di fisica all'esame di maturità, alternativa a quella di matematica.

Questo accade nel momento in cui, con il 3+2, la preparazione matematica degli studenti di fisica è scesa drammaticamente: non è piú vero che

fisici sanno la matematica meglio dei matematici

L'interazione con la Fisica

Invece di favorire l'integrazione, la comunità fisica è riuscita a prendere altro spazio autonomo nei percorsi didattici, fino ad aprire alla possibilità di una seconda prova di fisica all'esame di maturità, alternativa a quella di matematica.

Questo accade nel momento in cui, con il 3+2, la preparazione matematica degli studenti di fisica è scesa drammaticamente: non è piú vero che

fisici sanno la matematica meglio dei matematici

Naturalmente era falso. Ma era vero che i fisici sapevano “usare” la matematica meglio dei matematici, dovendolo fare in continuazione in un mondo **non racchiuso** nel perimetro della matematica.

Un po' di politica

Per la comunità matematica, la sfida della

matematica e realtà
applicazioni della matematica
matematica contestualizzata

è una sfida culturale cruciale! Ce lo chiede la società, e ce lo impone la concorrenza, pena la nostra irrilevanza culturale.

Quali difficoltà?

Si tratta di sviluppare una competenza di livello decisamente "superiore" rispetto alle competenze incluse nel tradizionale curriculum scolastico.

È un po' come sperare che tutti gli studenti di italiano compongano poesie, o filosofeggino sul mondo.

Quali difficoltà?

Si tratta di sviluppare una competenza di livello decisamente "superiore" rispetto alle competenze incluse nel tradizionale curriculum scolastico.

È un po' come sperare che tutti gli studenti di italiano compongano poesie, o filosofeggino sul mondo.

Servono buone / ottime competenze di base, e non bastano!

Quali difficoltà?

Una via maestra: potenziare la probabilità e la statistica.

Si tratta di due discipline in cui il **contesto** è **sempre presente**: prima di un esercizio di probabilità c'è sempre un **storia**: un ubriaco che cammina, un giocatore che scommette, un medico che guarda il risultato di un test diagnostico.

Quali difficoltà?

Una via maestra: potenziare la probabilità e la statistica.

Si tratta di due discipline in cui il **contesto** è **sempre presente**: prima di un esercizio di probabilità c'è sempre un **storia**: un ubriaco che cammina, un giocatore che scommette, un medico che guarda il risultato di un test diagnostico.

Ma proprio per questo motivo, il corso di probabilità è uno dei più osteggiati dagli studenti del nostro I anno di studi (insieme al "Laboratorio di programmazione e calcolo").

Quali difficoltà?

Ci sono aspetti della matematica che mi sembrano attrarre gli studenti che si iscrivono da noi, e credo siano esemplificabili con la soddisfazione che si prova portando a termine un calcolo:

- c'è un mondo limitato a priori, in cui c'è sicuramente tutto quello che serve
- le procedure sono precise, rigorose, limpide
- c'è un risultato che va raggiunto, che ci attende alla fine del percoso
- raggiungere il risultato conclude il nostro compito.

Quali difficoltà?

Questo è invece il modo in cui può apparire un problema di matematica contestualizzato:

- c'è un mondo dai confini incerti, in cui forse non c'è tutto quello che dobbiamo sapere, e che contiene molte informazioni che non servono ma non sappiano quali
- le procedure non sono note a priori; non sappiamo quale matematica va usata (algebra? funzioni? geometria?)
- non è detto che il risultato sia uno solo, o che esista!
- dovrò convincere qualcuno che le mie intuizioni sono giuste, ragionevoli, corrette

Una psico-digressione

Una osservazione, da profano di didattica e psicologia: in questo mondo più incerto, personalità più "assertive" hanno più successo: si "buttano", sperimentano, difendono con forza le loro idee.

Qui forse c'è un aspetto che differenzia "psicologicamente" la matematica dalla fisica, e può dare qualche indizio sulla separazione per genere tra gli studenti delle due discipline... ma questa è un'altra storia.

Ultime novità

Ci sono stati nei decenni molti tentativi di orientare l'insegnamento della matematica alle applicazioni.

L'ultimo è quello che ha modificato la prova di matematica della maturità.

Perché il Ministero ha deciso di intervenire in questo modo?
Faccio qualche ipotesi.

Ultime novità

Risposte “cattive”:

- non vuole spendere soldi per l’aggiornamento
- il Ministero sa di non saper governare l’aggiornamento

Risposte “buone”:

- i tentativi precedenti non hanno dato risultati
- il tempo dei programmi calati dall’alto è finito da un pezzo
- la comunità degli insegnanti può far meglio dell’apparato ministeriale

I documenti

Questo tentativo ha prodotto tre simulazioni [1]. e un esame di stato [2]:

- Simulazione 1 - Problema 1: Una collisione tra meteoriti
- Simulazione 1 - Problema 2: Un mappamondo prezioso
- Simulazione 2 - Problema 1: Curva nord
- Simulazione 2 - Problema 2: Il vaso
- Esame di Stato - Problema 1: Il piano tariffario
- Simulazione 3 - Problema 1: Il porta scarpe da viaggio
- Simulazione 3 - Problema 2: Il ghiaccio

PS grazie al collega Cristian Pasquinati ho scoperto l'esistenza di altre 3 tracce (con le loro cubiche...): quelle delle sessioni estere, suppletive, straordinarie [2].

I documenti

Come si inventa un problema di matematica contestualizzata?

Semplificando molto, vedo due strade

- $M \subset R$ - la matematica per la realtà: ho un problema reale e provo a risolverlo
- $R \subset M$ - la realtà per la matematica: decido quale matematica usare, e cerco un problema reale a cui applicarla.

$M \subset R$

Pregi

- ti avvicina al metodo scientifico
- studi fenomeni spesso importanti delle altre discipline (orbite planetarie, crescite di popolazione, indici di disuguagliuanza) in cui la matematica ha dato un contributo a volte essenziale
- capisci come usare gli stumenti che conosci

$M \subset R$

Pregi

- ti avvicina al metodo scientifico
- studi fenomeni spesso importanti delle altre discipline (orbite planetarie, crescite di popolazione, indici di disuguagliuanza) in cui la matematica ha dato un contributo a volte essenziale
- capisci come usare gli stumenti che conosci

Il **difetto** principale è che non ci sono abbastanza argomenti su cui costruire un'attività scolastica di routine; e affrontando un problema reale non sai mai che matematica ti viene fuori! (vedi anche i commenti in [3] par. 4).

$R \subset M$

Pregi

- provano a far sentire lo studente protagonista, e a sedurlo con ambientazioni che dovrebbero essere suggestive (per inciso, tutte al "maschile")
- creano effettivamente la necessità di usare la matematica in un contesto

$R \subset M$

Difetti

- sono estremamente diseducativi verso le altre discipline
- passano l'idea che modellizzare vuol dire trovare la "funzione giusta"

$R \subset M$

- S1-P1: gli asteroidi si muovono su ellissi nello spazio, e non su linee con leggi cubiche
- S2-P1: un riempimento cubico di uno stadio è del tutto arbitrario, così come il deflusso esponenziale
- Esame P1: perché l'area di copertura del segnale dovrebbe essere parabolica
- S3-P1: vengono proposte tre funzioni del tutto arbitrarie per l'ipotetico portascarpe (tra cui una cubica)
- S3-P2: vengono proposte senza spiegazioni tre funzioni per il processo di riscaldamento

$R \subset M$

- S1-P1: gli asteroidi si muovono su ellissi nello spazio, e non su linee con leggi cubiche
- S2-P1: un riempimento cubico di uno stadio è del tutto arbitrario, così come il deflusso esponenziale
- Esame P1: perché l'area di copertura del segnale dovrebbe essere parabolica
- S3-P1: vengono proposte tre funzioni del tutto arbitrarie per l'ipotetico portascarpe (tra cui una cubica)
- S3-P2: vengono proposte senza spiegazioni tre funzioni per il processo di riscaldamento

In quale situazione reale ti trovesti mai a disposizione tre funzioni arbitrarie per spiegare un fenomeno?

$R \subset M$

Alcuni tra gli esempi considerati, potrebbero diventare veri esercizi per chi conoscesse le equazioni differenziali: le caratteristiche del modello suggeriscono un'equazione differenziale, la soluzione dell'equazione differenziale dà la funzione cercata. Questi sarebbero esempi in cui la matematica avrebbe qualcosa da dire. Purtroppo richiedono conoscenze più avanzate.

$R \subset M$

In molte simulazioni, il fenomeno reale è un evidente **pretesto**, che dà un sapore artificiale al problema e, secondo molti, svilisce la matematica.

$R \subset M$

In molte simulazioni, il fenomeno reale è un evidente **pretesto**, che dà un sapore artificiale al problema e, secondo molti, svilisce la matematica.

Ciro Ciliberto, Presidente dell'UMI, in [4]:
Insomma, se non si riescono a trovare applicazioni credibili, non sarebbe forse meglio restare nel mondo, tutt'altro che spregevole, delle figure geometriche pure?

$R \subset M$

In molte simulazioni, il fenomeno reale è un evidente **pretesto**, che dà un sapore artificiale al problema e, secondo molti, svilisce la matematica.

Ciro Ciliberto, Presidente dell'UMI, in [4]:
Insomma, se non si riescono a trovare applicazioni credibili, non sarebbe forse meglio restare nel mondo, tutt'altro che spregevole, delle figure geometriche pure?

NB: non dice "invece di usare applicazioni credibili"!!!

Indice

In queste ultime slide, provo a dare qualche suggerimento pratico e qualche possibile esercizio.

- Esempi più semplici
- Allenamenti
- Problemi di inseguimento
- Problemi di massimo e minimo
- Un tentativo di problema complesso

Esempi più semplici

Se non abbiamo la necessità di contestualizzare complicati studi di funzione, ci si può limitare alle **funzioni imporanti per le applicazioni**

- leggi lineari (interpolazioni e approssimazioni al I ordine)
- esponenziali (popolazioni e radioattività)
- potenze x^α (allometria, leggi di scala)
- logaritmi (variazioni di scala, risposta agli stimoli)
- funzioni trigonometriche (fenomeni periodici, oscillazioni)

(*vedi* [5] e [6] per esempi).

Esempi più semplici

Legare ogni funzione elementare alle sue principali applicazioni aiuta lo studente a tenere insieme matematica e fenomeno naturale: “velocità di variazione costante” dovrebbe diventare sinonimo di “retta”, “crescita di popolazione” dovrebbe diventare sinomimo di “esponenziale”, etc..

Un'osservazione sui polinomi. A parte le parabole per il moto uniformemente accelerato, i polinomi non sono cosí utili nelle applicazioni, se non negli usi più sofisticati: sviluppi in serie, metodi di approssimazione, polinomi ortogonali etc.

Allenamenti

Visti i testi delle simulazioni, ci si può allenare con studi di funzione "al contrario":

- guardare il grafico e trova le proprietà
- assegnare le proprietà, disegna il grafico, trova espressioni analitiche possibili
- modificare grafici per simmetria, traslazione, scala
- riconoscere grafici modificati da simmetrie, traslazioni, scale

In questo modo si esce dall'esercizio di routine, e si approfondisce il rapporto tra le procedure per determinare il grafico di funzione e il suo eventuale significato nella descrizione di un fenomeno.

Problemi di inseguimento

Negli esempi che segono, la matematica è elementare e ben nota (grafici di funzioni semplici, traslazioni). Questo permette di concentrarsi su alcuni aspetti tipici dei problemi "contestualizzati", rispetto a quelli "tradizionali"

- il problema non è già matematizzato
- il risultato non si ottiene mediante l'applicazione di una sola procedura nota (per esempio lo studio di una funzione)

Problemi di inseguimento: I-1

Problema I-1

Un'auto ad un semaforo scatta al verde accelerando a un metro al secondo quadro, fino a che non arriva a 40 $\mathrm{km\,h^{-1}}$. *Una seconda auto che va a* 60 $\mathrm{km\,h^{-1}}$, *attraversa il semaforo 5 secondi dopo la prima; quando la raggiunge?*

Problemi di inseguimento: I-1

Più passi da compiere:

Moto uniformemente accelerato: usare sia l'espressione della velocità in funzione del tempo (per scoprire quando la prima auto smette di accelerare), sia lo spazio in funzione del tempo (per scoprire dove è l'auto quando smette di accelerare).

Uso delle traslazioni (per stabilire la legge oraria della seconda auto dopo che ha smesso di accelerare, e per stabilire la legge oraria della prima auto)

Funzioni definite a tratti e uso del grafico (per capire se la seconda auto sorpassa la prima durante la fase di accelerazione, o dopo).

Problemi di inseguimento I-2

Problema I-2
Una piccola colonia di 24 pipistrelli si insedia in una grotta vuota, riproducendosi con un tasso del 10% all'anno. Cinque anni dopo una, popolazione di 12 pipistrelli di un'altra specie, raggiunge la grotta e ci si installa, riproducendosi al tasso del 15% annuo. Quando la numerosità della seconda specie sorpassa quella della prima?

Problemi di inseguimento I-2

Auesto problema è più semplice del precedente, ma anche in questo caso ci sono più passi da fare:

- ricostruire la numerosità della prima popolazione usando il modello esponenziale, non esplicitamente suggerito
- fare lo stesso con la seconda popolazione, ma capendo dove entra il ritardo di 5 anni nel modello
- rispondere infine alla domanda mendiante la soluzione di una semplice equazione

Problemi di inseguimento: I-3

Problema I-3A

Fai un modello (fisico-)matematico per il calcolo dello spazio di frenata.

Problema I-3B

Un'auto procede a $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$*; inchioda e impiega* $80\,\mathrm{m}$ *per frenare. Quanto impiega un'auto che procede a* $120\,\mathrm{km\,h^{-1}}$*?*

Problemi di inseguimento: I-3

La versione A è un "vero" problema (anche se lo studente potrebbe già sapere che lo spazio di frenata è quadratico con la velocità).

Il modello si costruisce a partire dall'espressione del moto uniformemente accelerato (ampiamente noto agli studenti)

$$s(t) = vt - at^2/2$$

Ora si deve trovare lo spazio necessario a frenare. La risposta non è ottenibile direttamente, ma si deve usare l'espressione della velocità

$$v(t) = v - at$$

per determinare prima il tempo di frenata (cioè il t tale che $v(t) = 0$) e infine lo spazio corrispondente, che sarà una funzione di a e v.

Problemi di inseguimento: I-3

La versione **B** è decisamente più difficile, perché il testo sembra suggerire una proporzionalità che non c'è, e non viene esplicitamente richiesto di modellizare il fenomeno, cosa invece necessaria per provare a rispondere.

D'altra parte, nella scienza si passa gran parte del tempo a evitare le trappole che si tende da soli, per esempio dare troppe cose per scontate e non verficare la validità delle ipotesi, o semplificare eccessivamente.

Problemi di massimo e minimo

Rispetto agli infiniti esercizi tradizionali di determinazione di punti di massimo e minimo, gli esempi "applicati" ragionevoli mi sembrano pochi (se si esclude la prima classe dei seguenti).

Tre grandi filoni:

- i punti di minimo dell'energia potenziale di sistemi meccanici (uno tra tutti, la determinazione del raggio delle orbite circolari kepleriane, fissando il momento angolare)
- problemi "isoperimetrici" (già presenti nelle simulazioni, vedi "mappamondo" e "ghiaccio")
- cammini minimi

Problemi di massimo e minimo

Cosa hanno di interessante?

- possono essere abbastanza realistici
- la risposta non è di routine

Problemi di massimo e minimo - M-1

Problema M-1

Determina la forma di una lattina che, a parità di volume, ha la superficie più piccola.

Problemi di massimo e minimo - M-1

Problema M-1
Determina la forma di una lattina che, a parità di volume, ha la superficie più piccola.

$$V = \pi r^2 h, \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$h = V/(\pi r^2), \quad S = 2\pi r^2 + 2V/r$$

da cui, studiando la funzione:

$$r = (V/(2\pi))^{1/3}$$

Problemi di massimo e minimo - M-1

Problema M-1
Determina la forma di una lattina che, a parità di volume, ha la superficie più piccola.

$$V = \pi r^2 h, \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$h = V/(\pi r^2), \quad S = 2\pi r^2 + 2V/r$$

da cui, studiando la funzione:

$$r = (V/(2\pi))^{1/3}$$

Ma la cosa più interessante è che

$$h/r = V/(\pi r^3) = 2$$

cioè l'altezza è uguale al diametro.

Problemi di massimo e minimo - M-2

Come si fa a formulare il problema in modo che lo studente **cerchi** questa risposta, senza suggerirla?

Problemi di massimo e minimo - M-2

Come si fa a formulare il problema in modo che lo studente **cerchi** questa risposta, senza suggerirla?

Va sviluppata un'attitudine all'oservazione delle conseguenze del risultato, o alla ricerca della semplificazione...

Problemi di massimo e minimo - M-2

Come si fa a formulare il problema in modo che lo studente **cerchi** questa risposta, senza suggerirla?

Va sviluppata un'attitudine all'oservazione delle conseguenze del risultato, o alla ricerca della semplificazione...

C'è anche da commentare che le lattine **non hanno** questa forma, ma ce l'hanno le quelle da un kg di pomodoro, e approssimativamente, i barattoloni di vernice. Bisogna abiutuarsi all'idea che le nostre risposte matematiche possono essere solo un aspetto da considerare e non **la** soluzione!

Problemi di massimo e minimo - M-2

Il seguente esempio non compare nei testi di matematica tra gli esercizi di massimo e minimo, pur essendo un vero esempio di applicazione del Calcolo alla fisica.

Problmema M-2

È noto che i raggi di luce deviano quando attraversano l'interfaccia tra due mezzi diversi. Una spiegazione di questo fenomeno può essere data affermando che il raggio di luce percorre la traiettoria in cui impiega meno tempo, e assumendo che nei due mezzi la velocità della luce sia differente. Costruisci un situazione matematica ideale per descrivere questo fenomeno e analizzalo quantitativamente.

Problemi di massimo e minimo - M-2

Ci si mette su un piano cartesiano; il raggio deve andare dal punto $(0, a)$ al punto $(\ell, -b)$, con $a, b, \ell > 0$. La velocità è v_1 nel semipiano superiore, v_2 in quello inferiore. Sia x è l'ascissa del punto $(x, 0)$ in cui il raggio attraversa l'interfaccia.

Si deve minimizzare la funzione

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (\ell - x)^2}}{v_2}$$

Il calcolo delle derivate porta all'equazione:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{\ell - x}{v_2\sqrt{b^2 + (\ell - x)^2}} = 0$$

che credo dia una quartica in x.

Problemi di massimo e minimo - M-2

Il fatto è che il valore di x non è interessante!

È invece interessante che l'equazione: ci dice che il rapporto tra seno dell'angolo incidente e la velocità è uguale al rapporto tra il seno dell'angolo rifratto e la velocità, che è proprio al legge di Snell.

Problemi di massimo e minimo - M-3

Problema M-3

Una corda elastica tesa è si può modellizzare con un segmento di retta. Discuti la forma che assume la corda stesa su un piano, se tocca un ostacolo circolare

Problemi di massimo e minimo - M-3

Problema M-3

Una corda elastica tesa è si può modellizzare con un segmento di retta. Discuti la forma che assume la corda stesa su un piano, se tocca un ostacolo circolare

La matematizzazione non è detto che sia semplice, a meno di non cominciare da casi particolari: ostacolo circolare posto nell'origine e corda che va da due punti fissi su uno degli assi.

Si cerca il punto di contatto che minimizza la lunghezza. Usando come variabile un angolo, l'equazione finale che si ottiene è risolubile, ma anche in questo caso la soluzione non è importante.

La risposta infatti è che il punto di contatto è il punto di tangenza tra la corda e l'ostacolo!

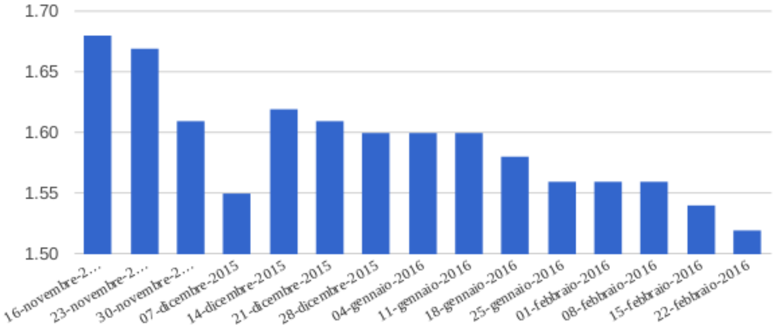
Una bozza di problema

In queste slide finali, presento una bozza di "problema complesso", ispirato dalla lettura dei quotidiani sulla ricorrente questione del rapporto tra il prezzo della benzina e il prezzo del petrolio.

Una bozza di problema: C-1

Problema C - parte 1

Osserva questo grafico che riporta i prezzi della benzina in Italia



Che commenti da "matematico" faresti su questo grafico?

Una bozza di problema: C-1

Sui giornali c'è mondo di "matematica" applicata sotto forma di grafici, percentuali, semplici calcoli. In genere sono presenti sciatterie, errori, se non proprio affermazioni volutamente fuorvianti. Saper usare la matematica di base che si conosce per valutare le informazioni è sicuramente un aspetto della "matematica concreta".

In questo esempio, probabilmente per ragioni "estetiche", l'asse orizzontale ha ordinata 1.5. La conseguenza è che sembra che il prezzo della benzina sia crollato...

Una bozza di problema: C-1

Sai che in questi mesi il prezzo del petrolio è precipitato da 100 dollari al barile di agosto 2014 ai 60 euro del dicembre 2014, mentre il prezzo della benzina è scesa nello stesso periodo da 1.80 euro al litro a 1.6 euro al litro. Come puoi spiegare questo fenomeno?

Fai un modello quantitativo di come il prezzo della benzina dipenda dal prezzo del barile e illustra i tuoi risultati.

Una bozza di problema: C-1

Se si cerca la retta che compatibile con i dati, si trova che

$$b = 1.6 + (p - 60)/40 \times 0.2 = 1.3 + 0.005p$$

Che ha di interessante questa espressione?

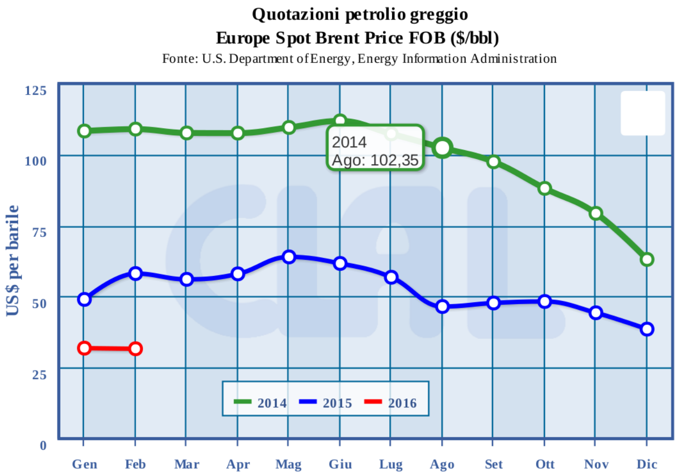
Mette in evidenza una parte “incomprimible” del costo della benzina: 1.3 euro presumibilmente costituiti da costi indiretti (trasporto, trasformazione), e da “accise”, tasse non proporzionali al prezzo (come l’IVA) ma al bene.

Un modo suggestivo per illustrare i risultati è dire che quando la benzina era a 1.6 euro al litro, più dell’80% del costo non serviva a pagare il petrolio, come viene riportato in alcuni siti.
È da notare, però, che questa percentuale dipende dal prezzo!

Una bozza di problema: C-2

Problema C - parte 2

Osserva questo grafico riassuntivo del presso del barile negli ultimi due anni.



Una bozza di problema: C-2

Nella parte di grafico relativa al 2014, si osserva un "plateu" iniziale, poi una discesa che accelera. Con questo esercizio imparerai uno dei possibili modi con cui descrivere una "brusca caduta" di una grandezza.

Considera la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\alpha x}}$$

dove α è un parametro reale positivo, a volte detta "logistica" o "sigmoide".

Disegnane il grafico, e spiega perché questa funzione risulti essere molto utilizzata nello studio di fenomeni che hanno una transizione da uno stato ad un altro.

Quale ruolo gioca il parametro α? (Aiutati nell'analisi calcolando il limite per $\alpha \to 0$ e per $\alpha \to +\infty$).

In quale punto è massima la velocità di decrescita?

Una bozza di problema: C-2

La logistica non viene, in genere, usata nella descrizione dell'andamento dei prezzi, ma ci possiamo provare: come puoi mettere in relazione il grafico della logistica con il grafico dei prezzi della benzina del 2014?

Dal grafico sembra esserci un iniziale "plateu" a 110 dollari, ad agosto il prezzo è (circa) 100 dollari, a dicembre 60. Usando traslazioni e dilatazioni, trova una logistica che si adatta ai dati.

Una bozza di problema: C-2

Può essere ragionevole assumere che la logistica descriva il fenomeno fino al tempo di massima velocità di caduta, dunque $t = 0$ sarà l'ordinata del punto di flesso.
È evidente che f non si adatta al grafico verde. Per mantere la "qualità" della funzione e addarla ai dati possiamo traslarla e scalarla:

$$f(t) = a + b/(1 + \mathrm{e}^{\alpha t})$$

Usando l'informazione asintotica a $-\infty$ e il valore in 0 si ottiene

$$f(t) = 10 + 100/(1 + \mathrm{e}^{\alpha t})$$

Imponendo $f(-4) = 100$ si ottiene il valore di α.

Una bozza di problema: C-2

I produttori vengono accusati di essere lenti nell'adeguare i prezzi della benzina ai prezzi del barile, durante la fase di discesa dei prezzi.

Supponi che il modello logistico descriva bene la discesa. Scrivi tutte le logistiche che passano da un plateu di 1.9 euro, a un valore di 1.6 euro, analogamente a come hai fatto precedentemente.

L'accusa di lentezza può riguardare due aspetti: il ridardo con cui cominicia e finisce la discesa, o la velocità con la quale avviene la discesa.
Come scrivi una discesa logistica "ritardata"?
Come scrivi una discesa logistica "più lenta"?

Per finire

da **Lettera a una Professoressa** (1976)

Il problema di geometria faceva pensare a una scultura della Biennale: *Un solido è formato da una semisfera sovrapposta a un cilindro la cui superficie è tre settimi di quella*. Non esiste uno strumento che misuri le superfici. Dunque nella vita non può accadere mai di conoscere le superfici e non le dimensioni. Un problema così può nascere solo nella mente di un malato.

Per finire

da **Lettera a una Professoressa** (1976)

Nella Nuova Media queste cose non si vedranno più. I problemi partiranno **da considerazioni di carattere concreto**. Difatti la Carla quest'anno alla licenza ha avuto un problema moderno a base di caldaie: "Una caldaia ha la forma di una semisfera sovrapposta...". E di nuovo si parte dalle superfici. Meglio un professore all'antica, d'uno che crede d'essere moderno perché ha mutato le etichette.

Letture consigliate

Segnalo le riflessioni del 1976, ma **attualissime**, nel primo capitolo, par. 1-5, dello Spotorno Villani [3].

Un grande lavoro di rivistazione della matematica di base è stato fatto per gli insegnamenti di matematica per biologi, affiancando la matematica alle sue applicazioni. Tra gli altri vi segnalo i testi [5] e [6].

Bibliografia

[1] Simulazioni: http://questionariolsosa.miur.carloanti.it/

[2] Tracce: http://www.matmedia.it/
seguendo Esami di Stato / Seconda prova / Le tracce dei compiti Anno 2015

[3] B. Spotorno, V. Villani: *Mondo reale e modelli matematici*, La Nuova Italia, Firenze, 1976

[4] C. Ciliberto *La simulazione dell'esame di stato di matematica nei licei scientifici*, http://matematica.unibocconi.it/sites/default/files/Commento_Ciliberto.pdf

[5] D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei: **Matematica per le Scienze della Vita 3/ed**, CEA, 2015

[6] V. Villani, G. Gentili: **Matematica 5/ed** , Mc Graw Hill, 2012