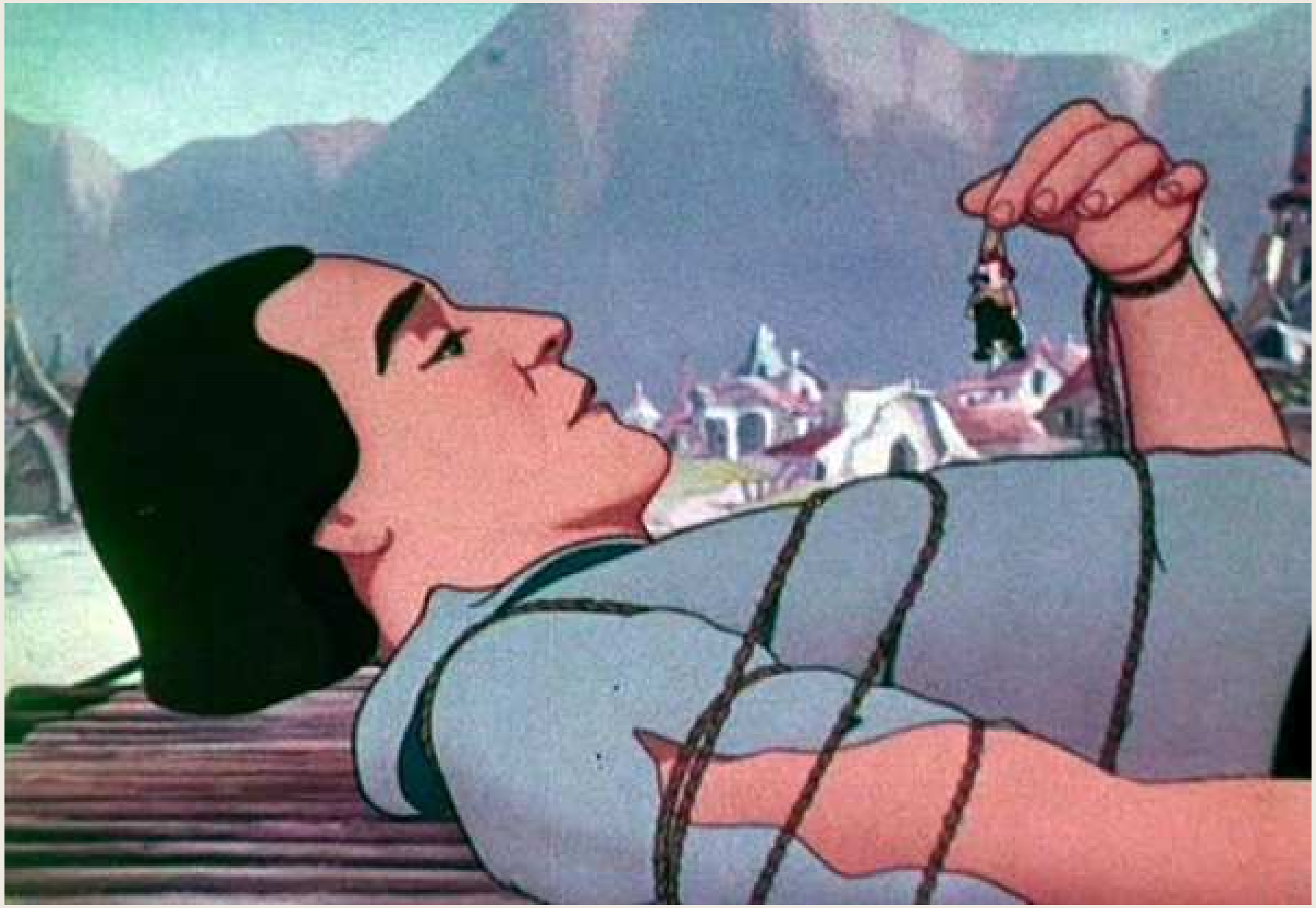
NANI e GIGANTI



Leggi di potenza

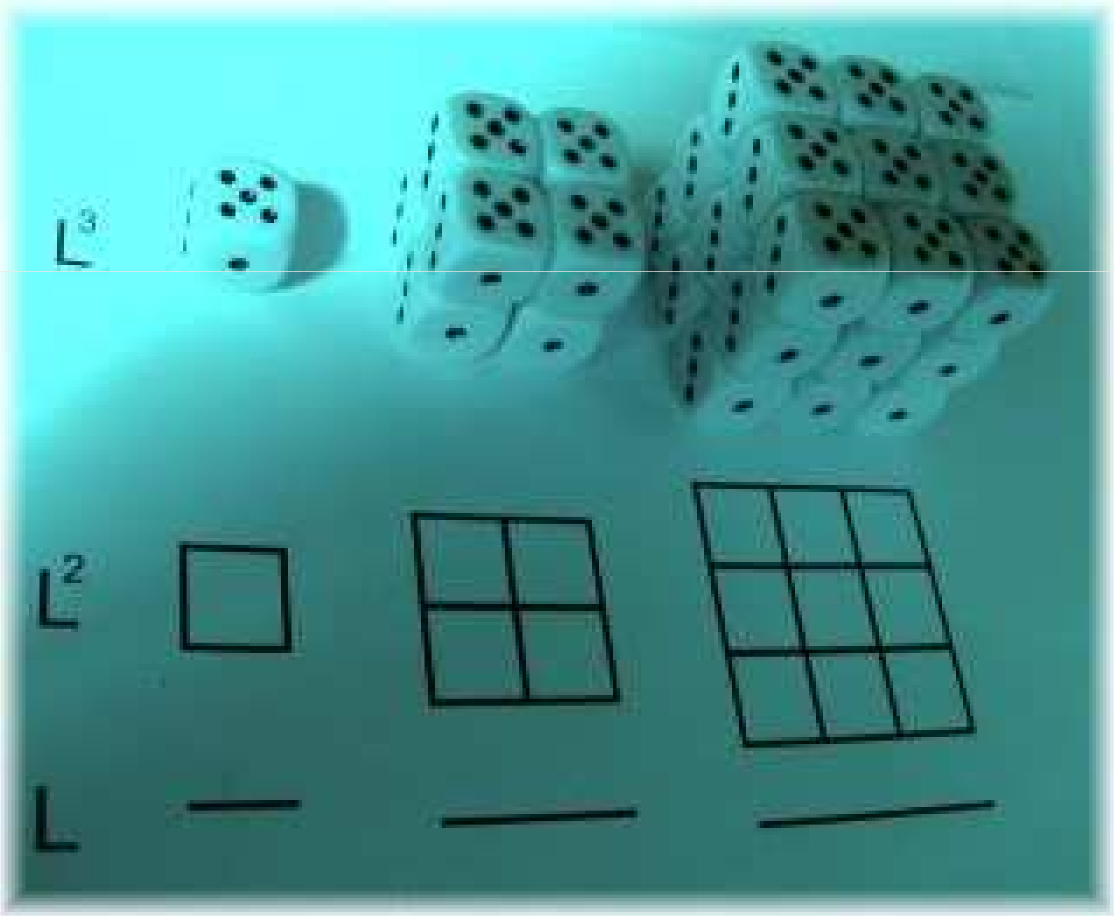
Possono esistere formiche giganti?

La letteratura e la cinematografia hanno spesso utilizzato creature mostruose, immaginate ingrandendo o rimpicciolendo esseri viventi reali. Basti pensare ai Viaggi di Gulliver, a King Kong, a Polifemo….

Ma è possibile che creature del genere possano esistere, <u>mantenendo la stessa struttura biologica</u>, cioè la stessa densità dei tessuti?

Proviamo a rispondere

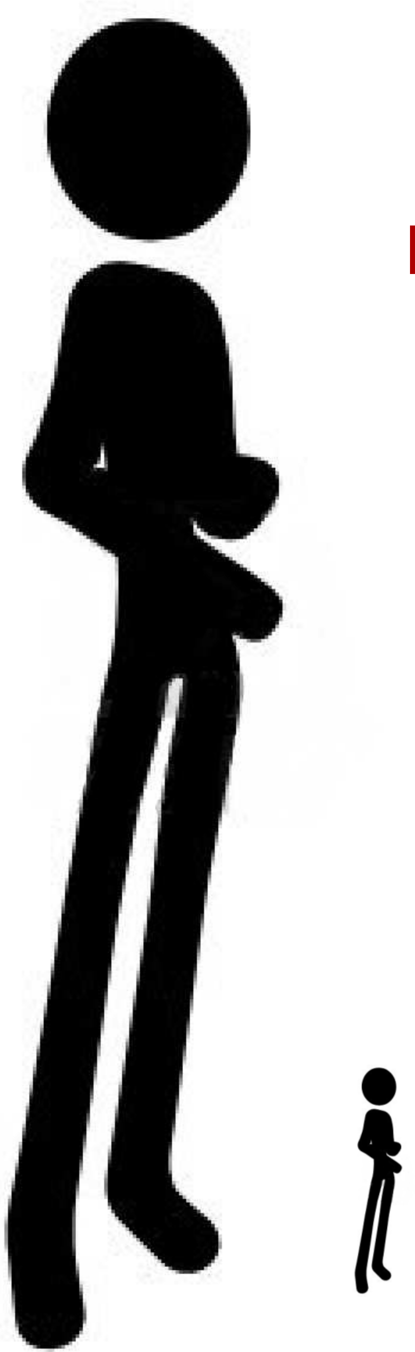
- Leggi di scala



Come cambiano le dimensioni di un oggetto quando aumentiamo o diminuiamo la sua scala?

Guardiamo l'immagine.

L'ipotesi che la densità del corpo rimanga la stessa implica che il peso, essendo direttamente proporzionale al volume, venga moltiplicato per la stessa potenza. Se il primo dado pesasse 6 g, il secondo ne peserebbe $6 * 2^3 = 48\,g$, il terzo $6 * 3^3 = 162\ g$



Ingrandiamo

Una persona che pesa 70 kg e alta 1,70 m che diventasse per magia 10 volte più grande mantenendo la stessa densità della sua struttura, avrebbe un'altezza di 17 m e un peso di 70000 kg cioè 70 tonnellate!

La pressione esercitata sulla sezione degli arti è direttamente proporzionale all'altezza perché

$$pressione_{10} = \frac{peso * 10^3}{superficie * 10^2} = pressione * 10$$

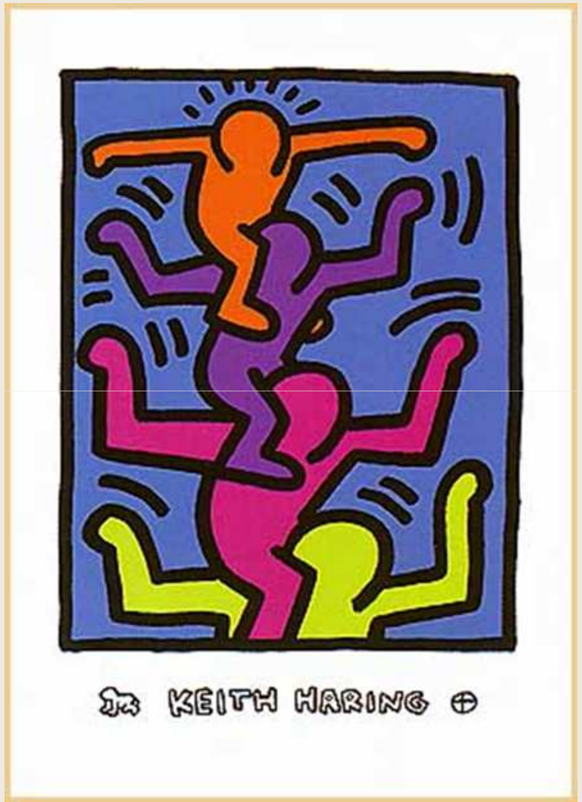
10 è il coefficiente di dilatazione lineare

quindi sugli arti si esercita una pressione 10 volte maggiore

Questo gigante sarebbe destinato ad essere schiacciato dal proprio peso

Vediamo i rapporti

- Altezza: 10 volte
- Sezione degli arti: 100 volte
- Peso: 1000 volte
- Pressione: 10 volte



Per rendere l'idea, è come se uno di noi portasse sopra le spalle altre nove persone identiche!!!

quindi

poiché il peso cresce con il cubo delle dimensioni lineari, animali molto grandi possono sostenere solo sforzi minori

una **formica** può traportare pesi anche 20 – 30 volte superiori al suo,

un **bambino** può portare un altro bambino sulle spalle

con maggiore difficoltà un **uomo** può portare un altro uomo,

ma non esiste nessun **cavallo** che può portare un altro cavallo sulla schiena

Le formiche giganti…

… non possono esistere per motivi biologici.

Ingrandiamo 1000 volte una formica lunga 3 mm per ottenere un insetto gigante lungo 3m.

La pressione esercitata sulle zampe sarà 1000 volte quella originale e l'insetto gigante non sarà in grado di muoversi.

L'evoluzione favorisce la riproduzione di organismi le cui dimensioni siano contenute entro opportuni limiti e il cui corpo sia composto da materiali adeguati.

Già Galileo …

…aveva notato, insieme ad altri, che macchine reali con parti in movimento tendevano a rompersi molto più spesso dei loro modellini funzionanti

Questo non vuol dire che non possano esistere esseri giganti…

… ma la struttura diventa tozza come negli elefanti (7 tonnellate). L'azione della gravità è compensata dal diametro degli arti e dal fatto che sono distanziati per sostenere l'enorme peso. L'animale in salita si muove molto lentamente

Gli alberi sono esseri viventi. Perché possono crescere fino a 100 m e oltre come le sequoie?

Un albero è sostanzialmente una colonna , fatta di una struttura solida ancorata al terreno.

(il *Generale Sherman*, con i suoi 32 m di circonferenza basale, e i suoi quasi 85 m di altezza, è considerato l'essere vivente più voluminoso della Terra)

Questo non vuol dire che non possano esistere esseri giganti…

…. ma deve cambiare l'ambiente

balenottera azzurra oltre 33 metri di lunghezza e 180 tonnellate di peso

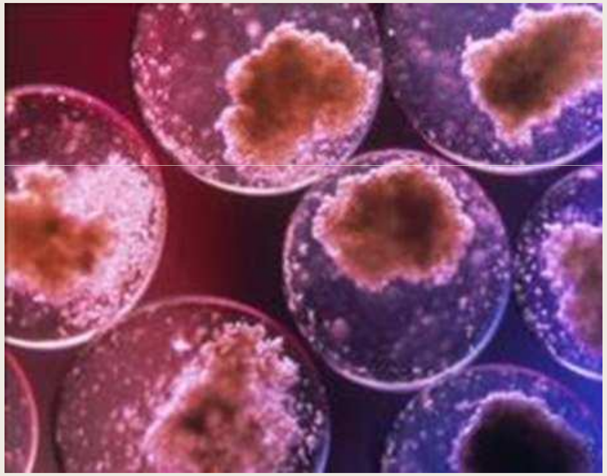
Le balenottere spiaggiate muoiono per soffocamento a causa dello schiacciamento della cassa toracica sotto l'azione del loro peso , non più sostenuto dalla spinta di Archimede

Le funzioni potenza e la descrizione dei fenomeni

Molte delle leggi che esprimono le relazioni tra caratteristiche quantitative della morfologia di un organismo sono **non lineari**, in particolare sono **funzioni potenza**.

Esempi

- **Leggi allometriche**
- **Indice di massa corporea**
- **Modello di Von Bertalanffy**
- **Legge di Zipf**



In genere in biologia, i modelli matematici si riferiscono a particolari situazioni concrete; nelle scienze di più antica matematizzazione, come la fisica, le affermazioni hanno invece la forza di «legge naturale». Si pensi alla legge di Gravitazione universale o alla legge di Coulomb.

Le funzioni potenza

Una funzione a potenza generalmente è del tipo

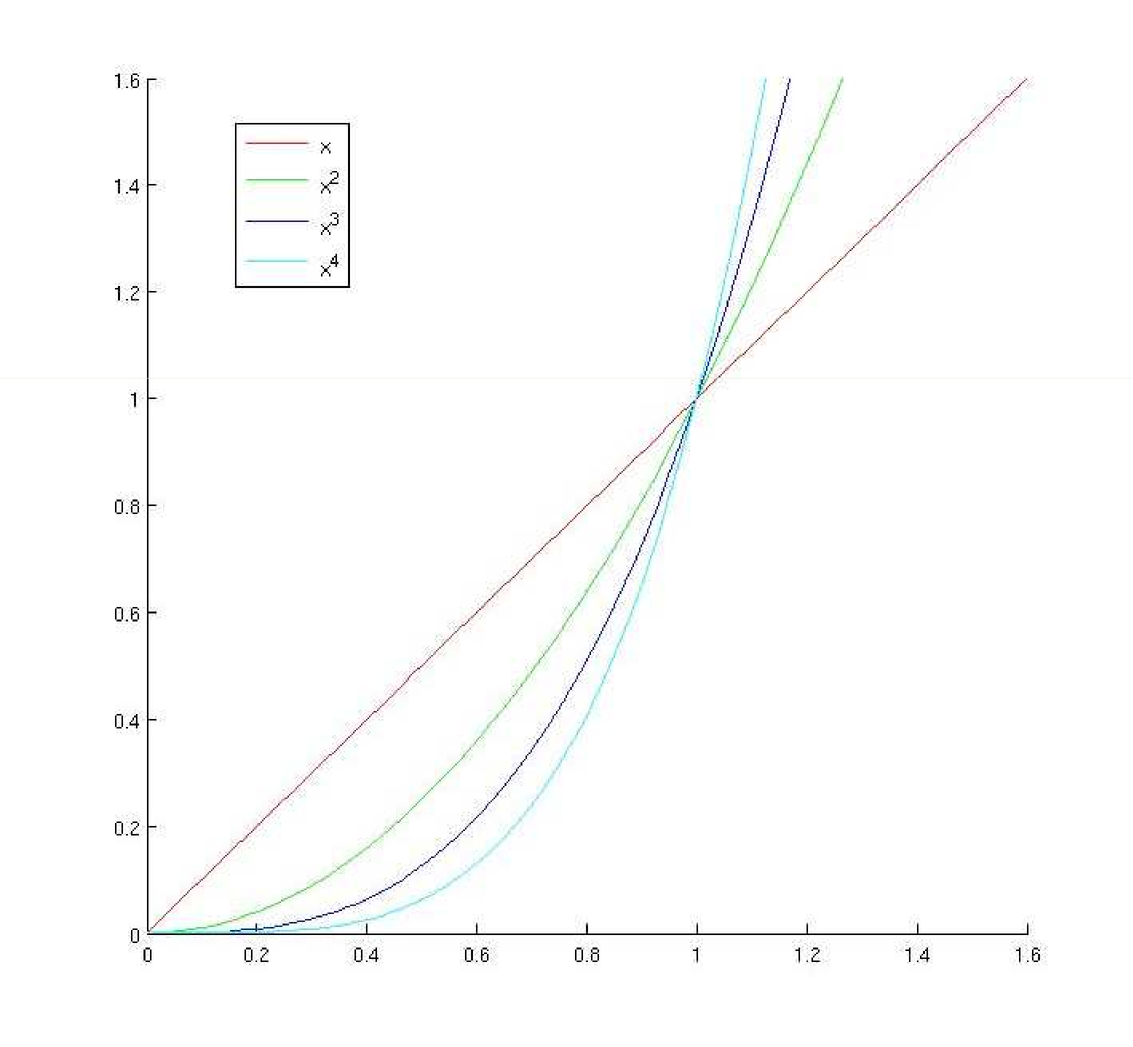
$$f(x) = a \cdot x^{\beta}$$

con $a \epsilon R$, $\beta \epsilon Q$.

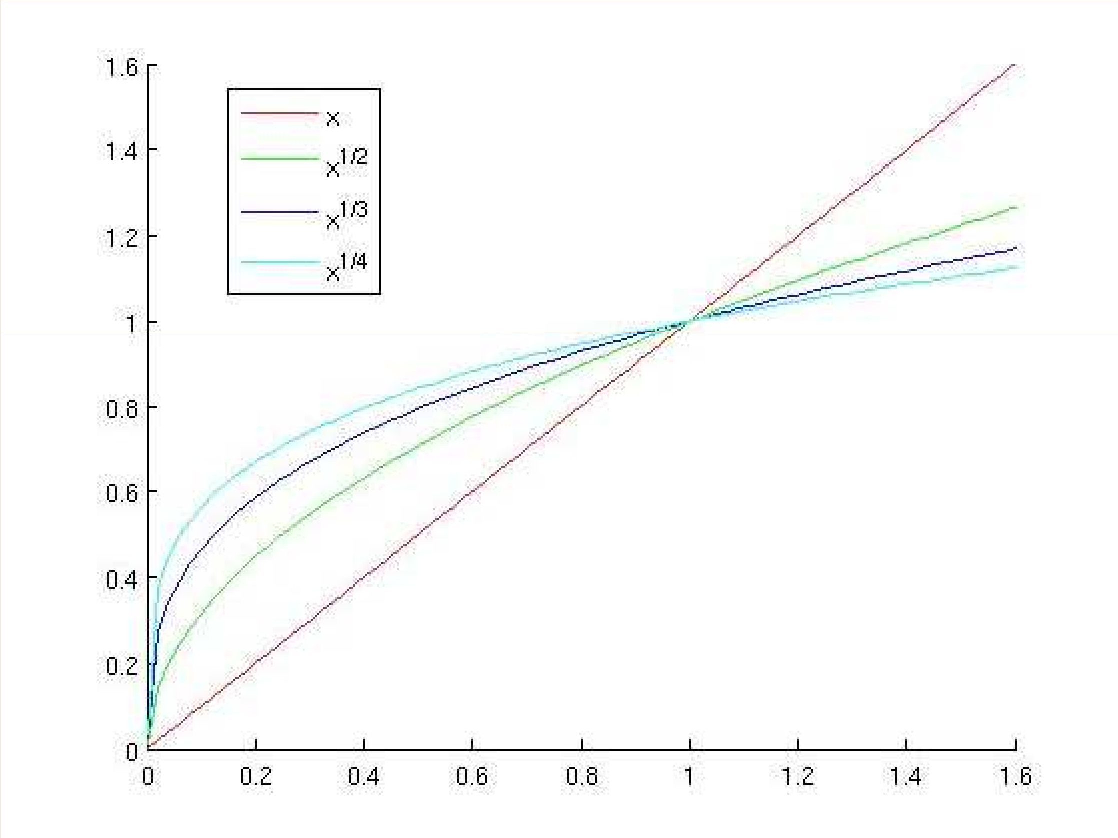
Nelle scienze sperimentali si considerano solo i valori $x \geq 0.$

Nei grafici che seguono vediamo l'andamento delle funzioni avendo posto a=1

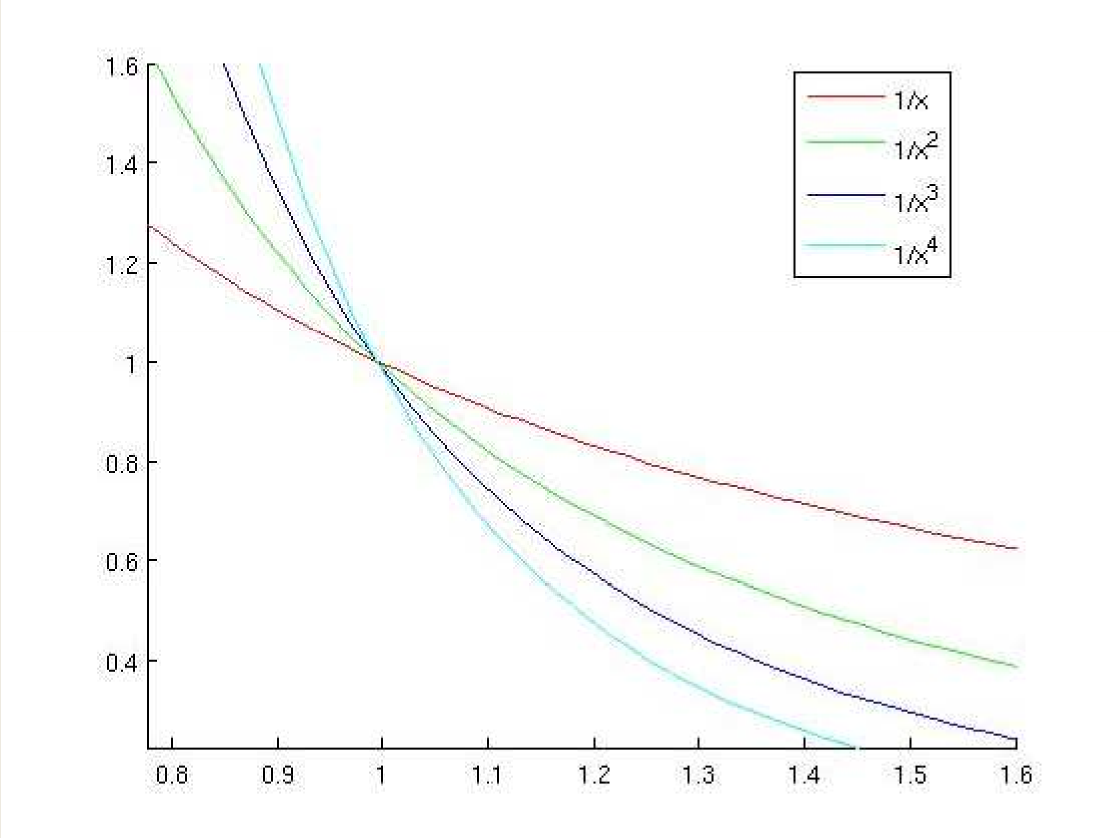
Funzioni potenza con β >1



Funzioni potenza con 0< β <1

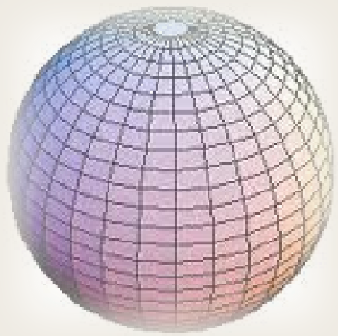


Funzioni potenza con β <0



Ritorniamo all'osservazione: crescita di una massa di cellule

Consideriamo una massa di cellule M_o assimilabile a una sfera



Per aumentare la sua massa trae il nutrimento dall'ambiente in cui si trova, in modo proporzionale alla superficie

$$\Delta M \propto S$$

Passiamo al modello

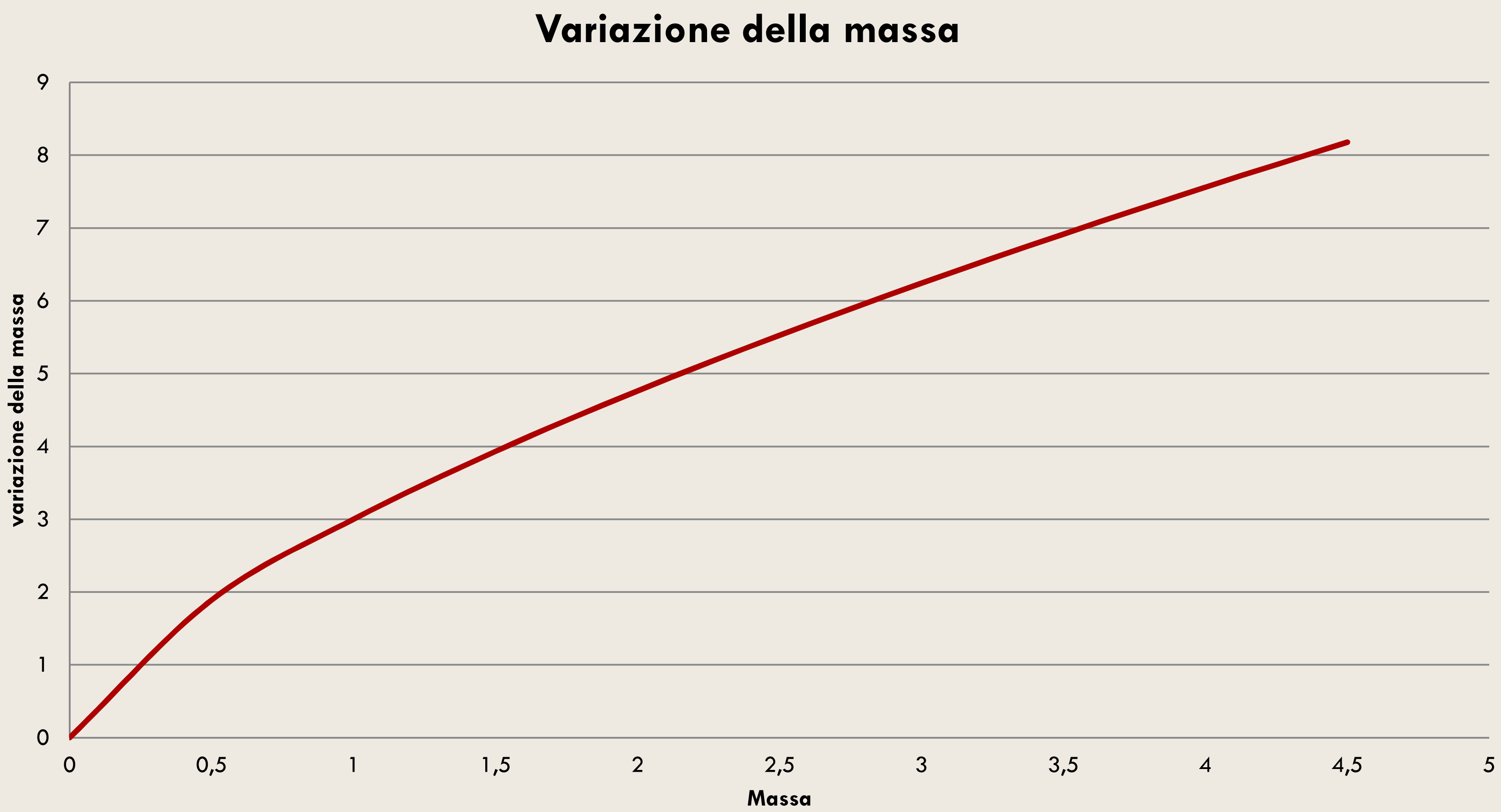
$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot V^{\frac{1}{3}}$$

$$S = 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S \propto V^{\frac{2}{3}}}$$

$$\boxed{\Delta M \propto M^{\frac{2}{3}}}$$

Supponendo la densità costante, si ottiene lo stesso esponente anche per la dipendenza dalla massa

Le masse più piccole crescono più rapidamente….



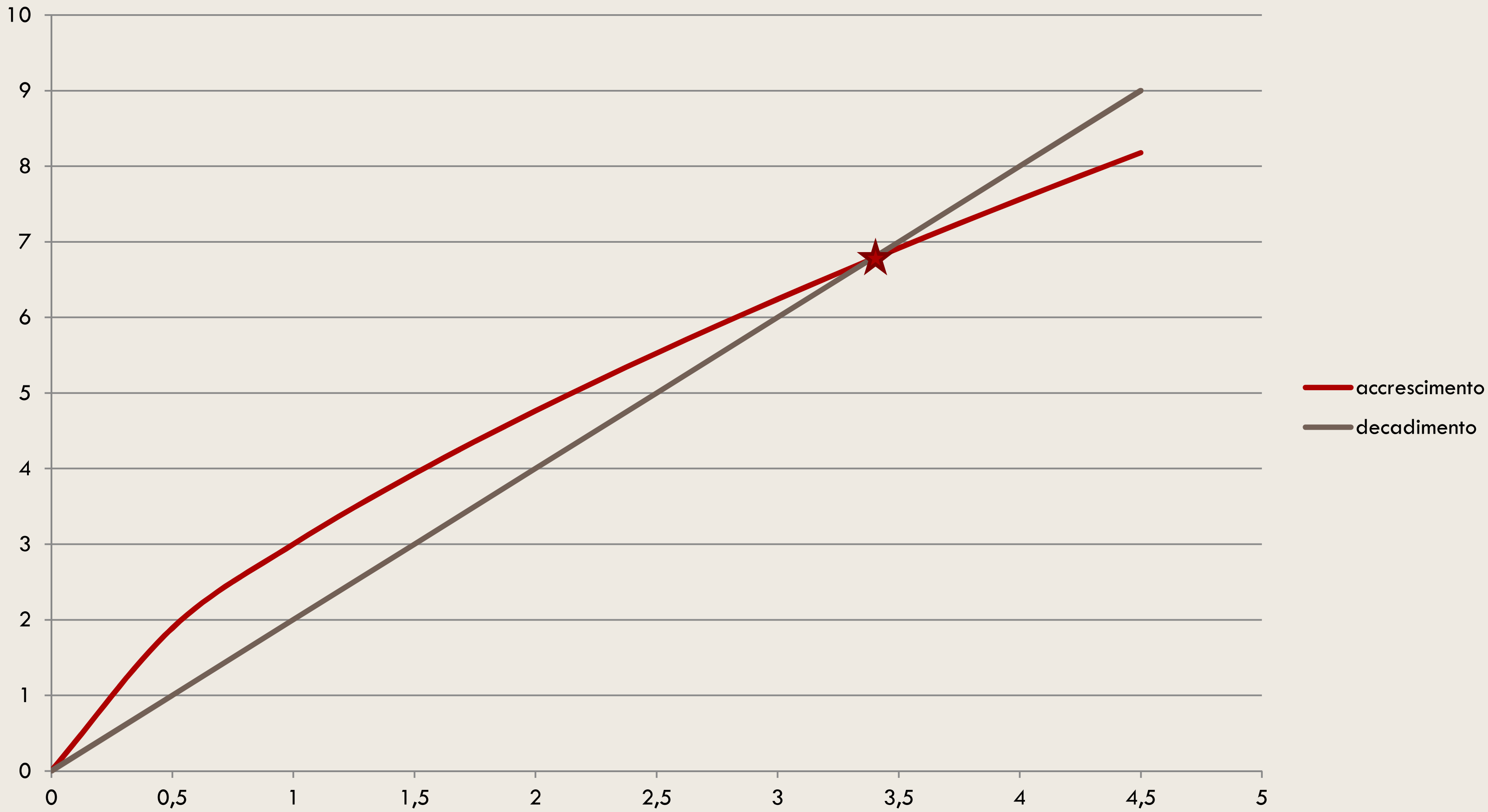
IL MODELLO DI VON BERTALANFFY

Uno dei primi modelli di crescita tumorale fu proposto intorno agli anni ‘60 del secolo scorso dal biologo austriaco **Ludwig von Bertalanffy**, che propose di definire il tasso di crescita di un tumore di massa m, nel modo seguente

$$T(m) = am^{2/3} - bm$$

- **$am^{2/3}$** è l’accrescimento della massa tumorale
- **$-\, bm$** è il decadimento dovuto alla morte delle cellule nell’unità di tempo (verosimilmente proporzionale alla massa).

Il modello di von Bertalanffy $T(m) = 3m^{2/3} - 2m$



Il modello di von Bertalanffy $T(m) = 3m^{2/3} - 2m$

Se
$T(m) > 0$, la massa tumorale cresce,
se $T(m) < 0$, la massa tumorale diminuisce

Come si vede dal grafico

$$3m^{2/3} - 2m > 0 ,$$

$$\text{quando } 3/2 > m^{1/3} ,$$

$$\text{cioè } m < 27/8 = 3.375$$

Il modello predice che il tumore ha una crescita limitata e che non supererà la dimensione critica **m=3.375.**

I grafici in doppia scala logaritmica

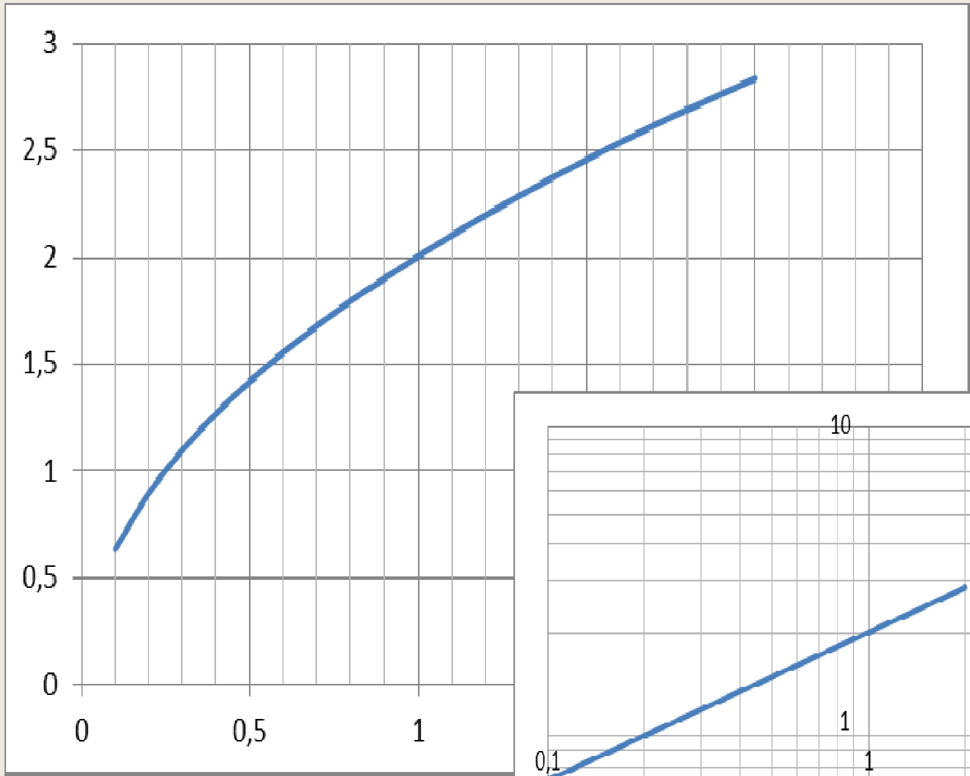
E’ usuale rappresentare molte quantità in scala logaritmica, soprattutto quando queste possono assumere valori che differiscono di vari ordini di grandezza

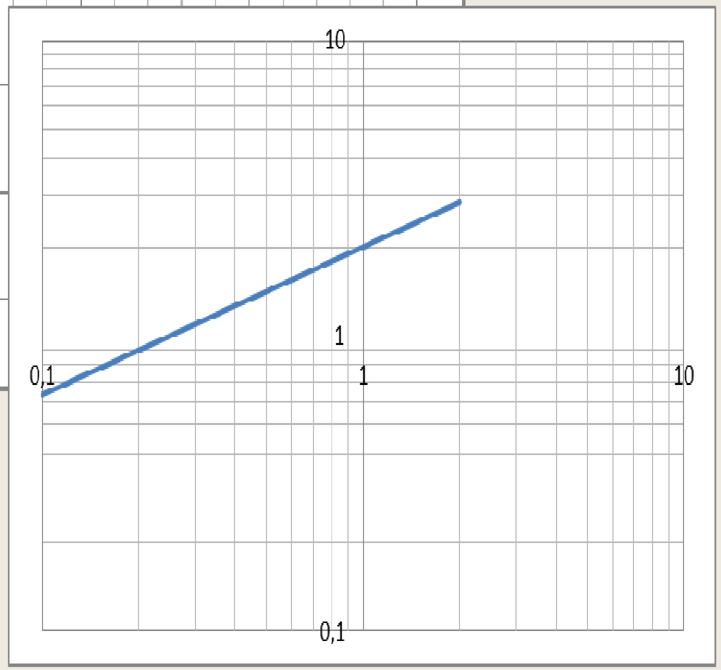
Poichè le leggi di tipo potenza sono frequenti in biologia (spesso dette allometrie), la scala logaritmica doppia permette di individuarle facilmente dai dati.

Periodo del pendolo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Periodo del pendolo	
T=2π(l/g)^1/2	
lunghezza (m)	periodo (s)
0,1	0,634
0,2	0,897
0,3	1,099
0,4	1,269
0,5	1,419
0,6	1,554
0,7	1,678
0,8	1,794
0,9	1,903
1	2,006
1,1	2,104
1,2	2,198
1,3	2,287
1,4	2,374
1,5	2,457
1,6	2,538
1,7	2,616
1,8	2,691
1,9	2,765
2	2,837





Grafici log-log delle funzioni a potenza

$$f(x) = a \cdot x^{\beta}$$

$$\Downarrow$$

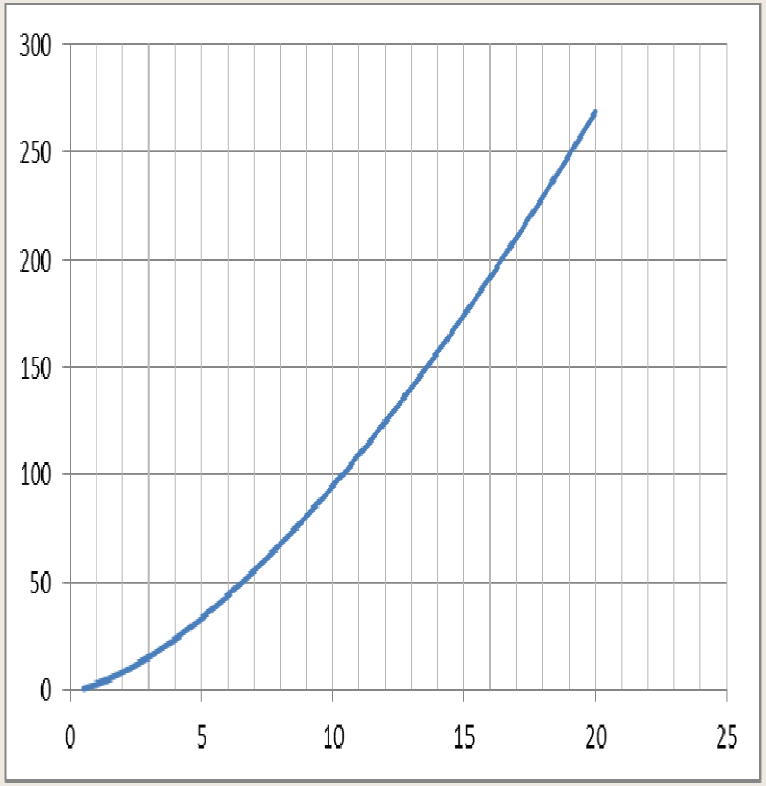
$$log f(x) = \log(a) + \beta \log(x)$$

$$\Downarrow$$

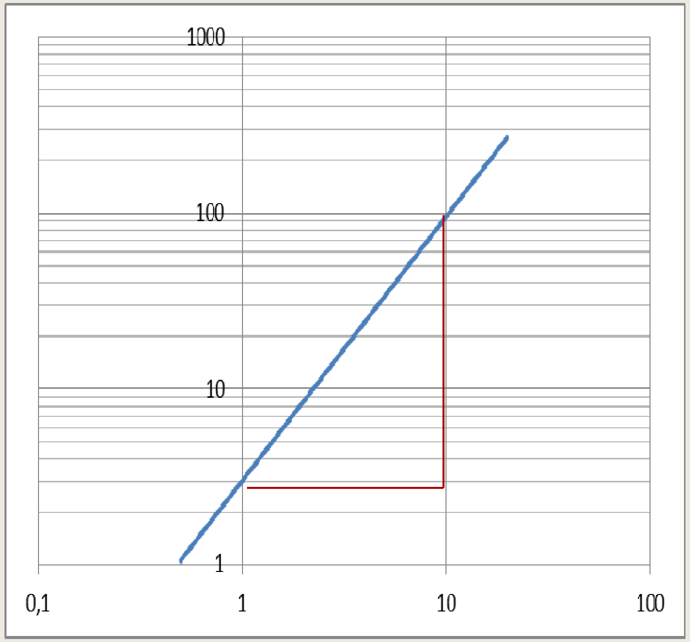
$$Y = Q + MX$$

- **Perché le funzioni a potenza in un grafico log-log diventano rette?**
- **Che cosa rappresenta il coefficiente angolare?**

Osserviamo i grafici della funzione $f(x)=3x^{3/2}$



$$m = ?$$



Adiabatica

$$p \cdot V^{\gamma} = \cos t$$

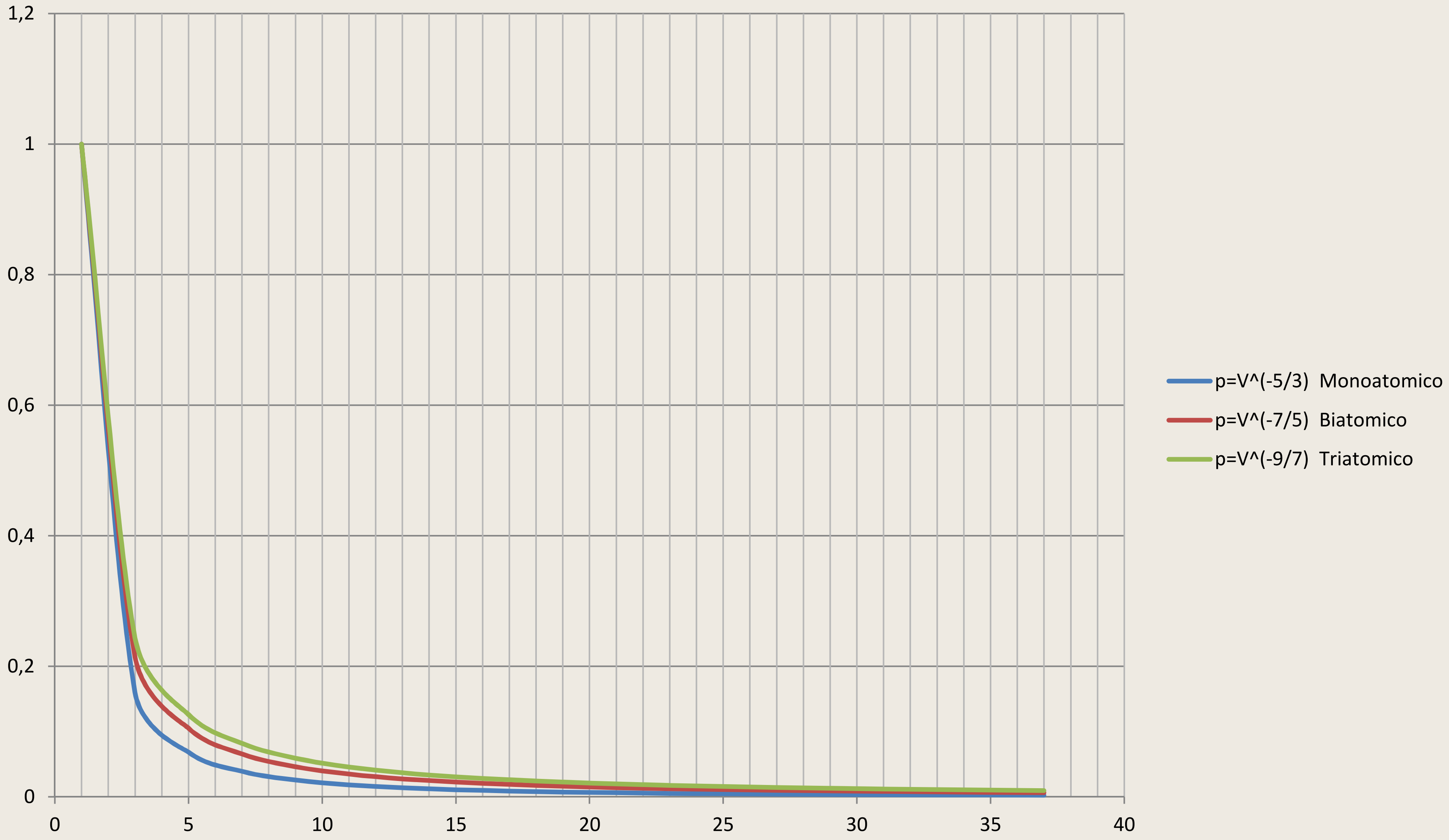
Le adiabatiche			
V	p=V^(-5/3) Monoatomico	p=V^(-7/5) Biatomico	p=V^(-9/7) Triatomico
1	1	1	1
3	0,160	0,215	0,244
5	0,068	0,105	0,126
7	0,039	0,066	0,082
9	0,026	0,046	0,059
11	0,018	0,035	0,046
13	0,014	0,028	0,037
15	0,011	0,023	0,031
17	0,009	0,019	0,026
19	0,007	0,016	0,023
21	0,006	0,014	0,020
23	0,005	0,012	0,018
25	0,005	0,011	0,016
27	0,004	0,010	0,014
29	0,004	0,009	0,013
31	0,003	0,008	0,012
33	0,003	0,007	0,011
35	0,003	0,007	0,010
37	0,002	0,006	0,010

$$p = V^{-\gamma}$$

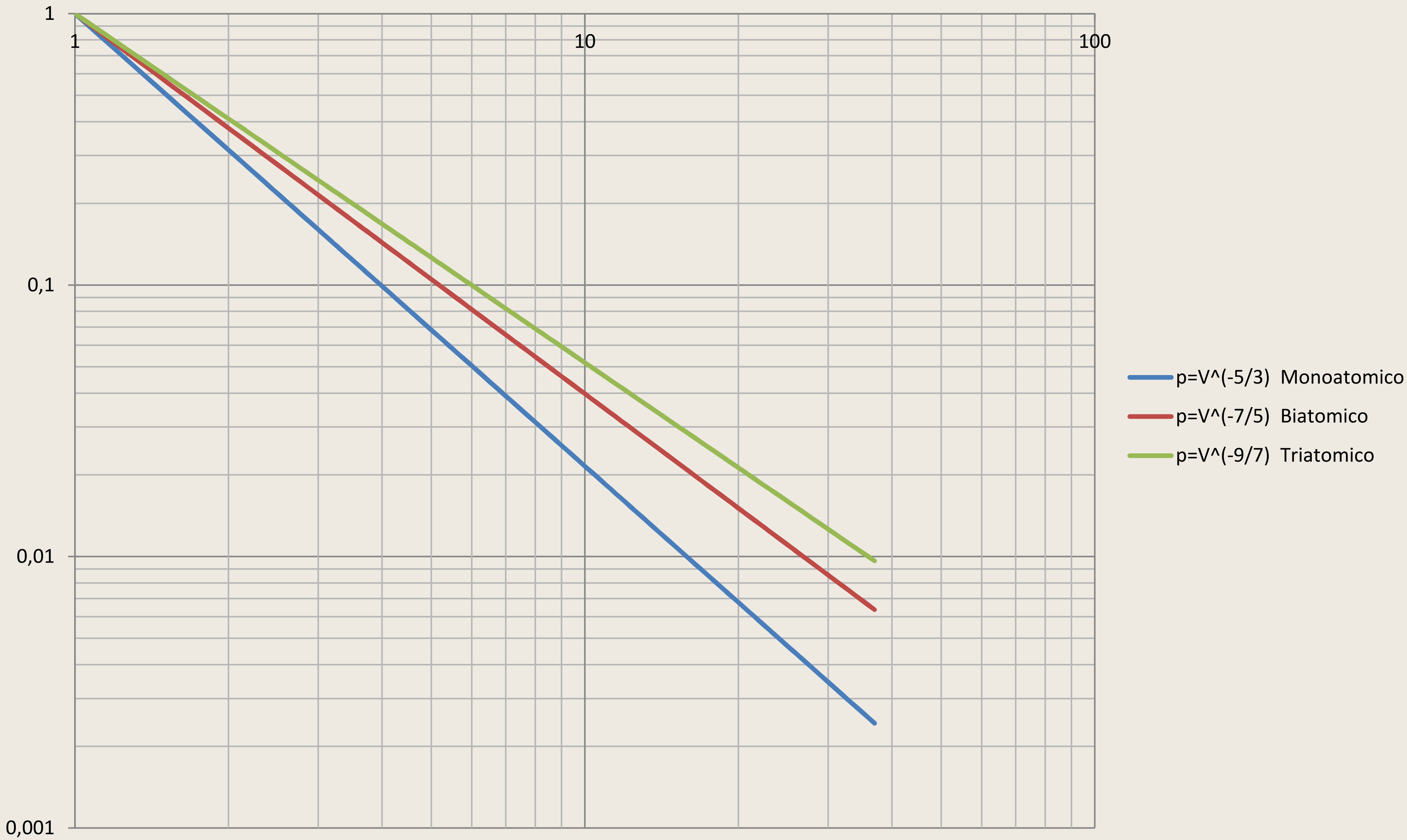
Nelle formule è stata posta la costante =1 per semplicità

Adiabatica

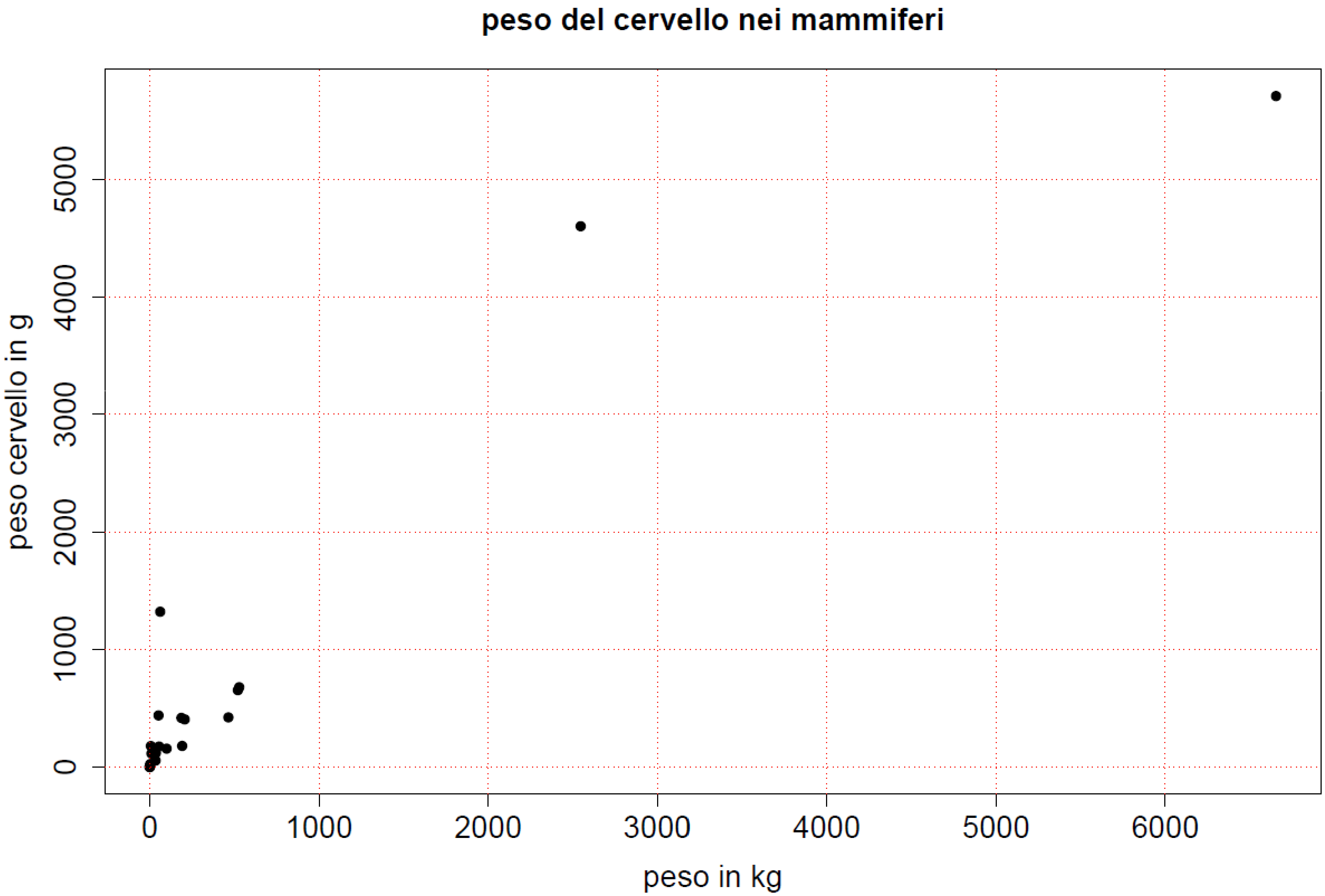
$$p = V^{-\gamma}$$

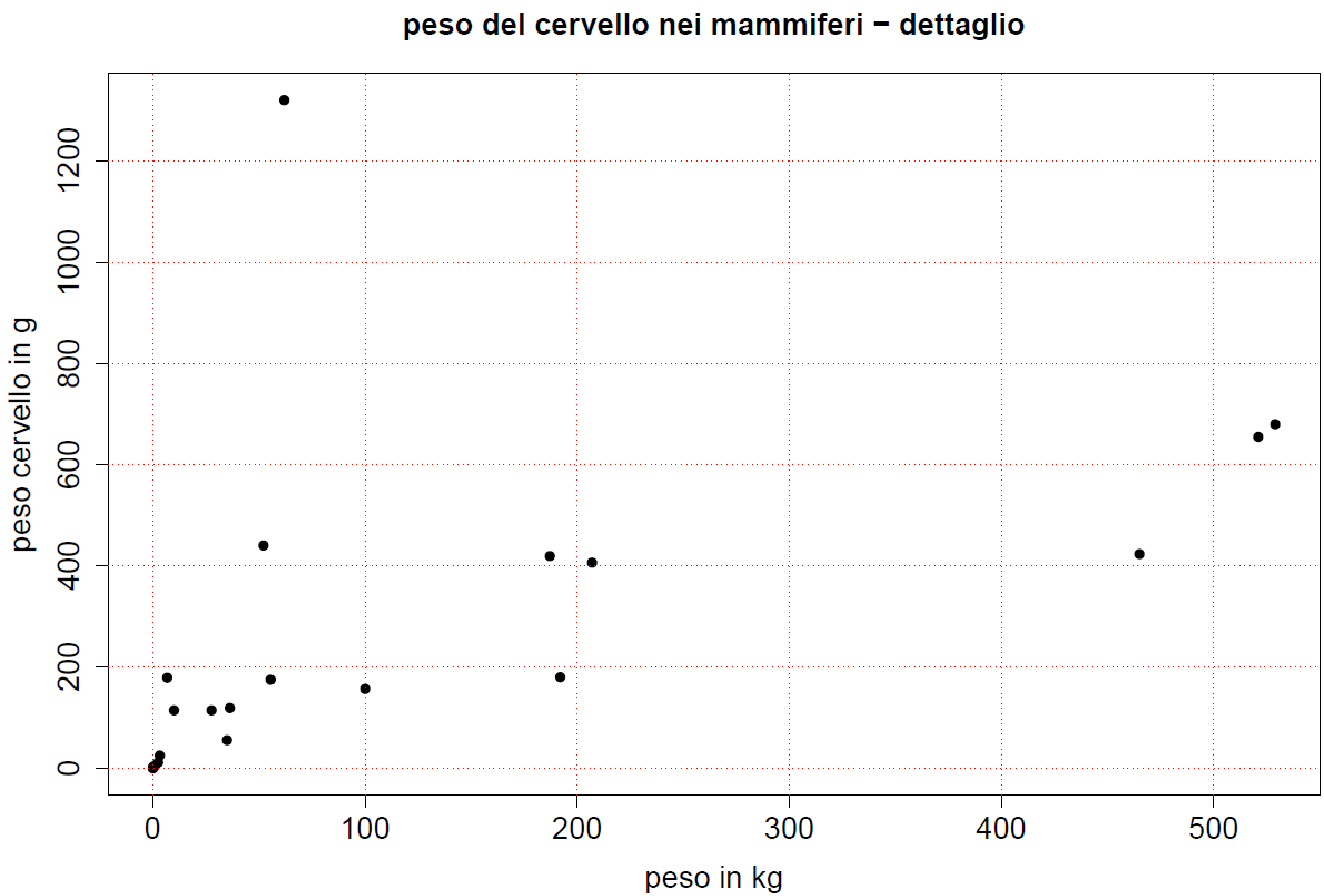


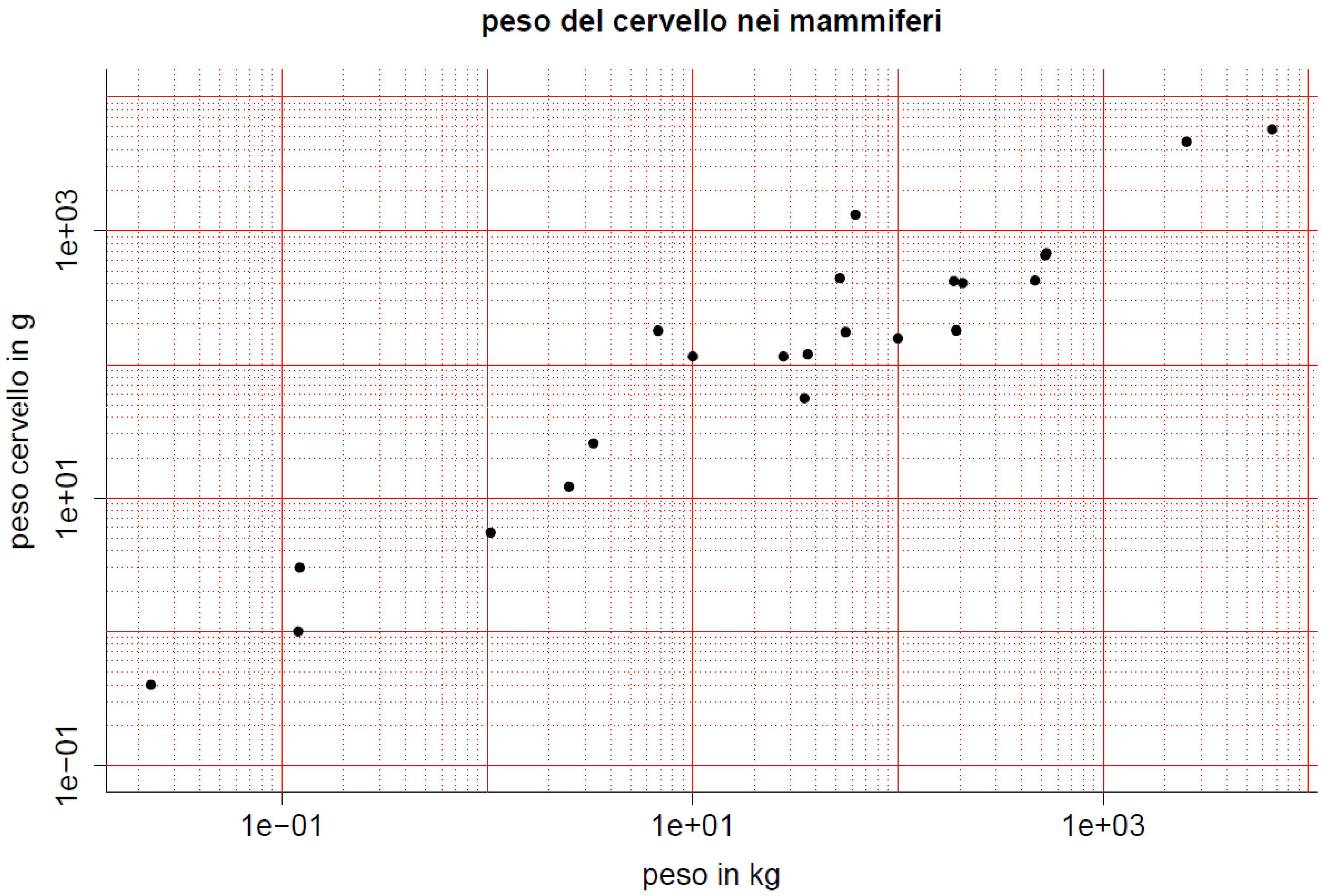
Adiabatica grafico log - log

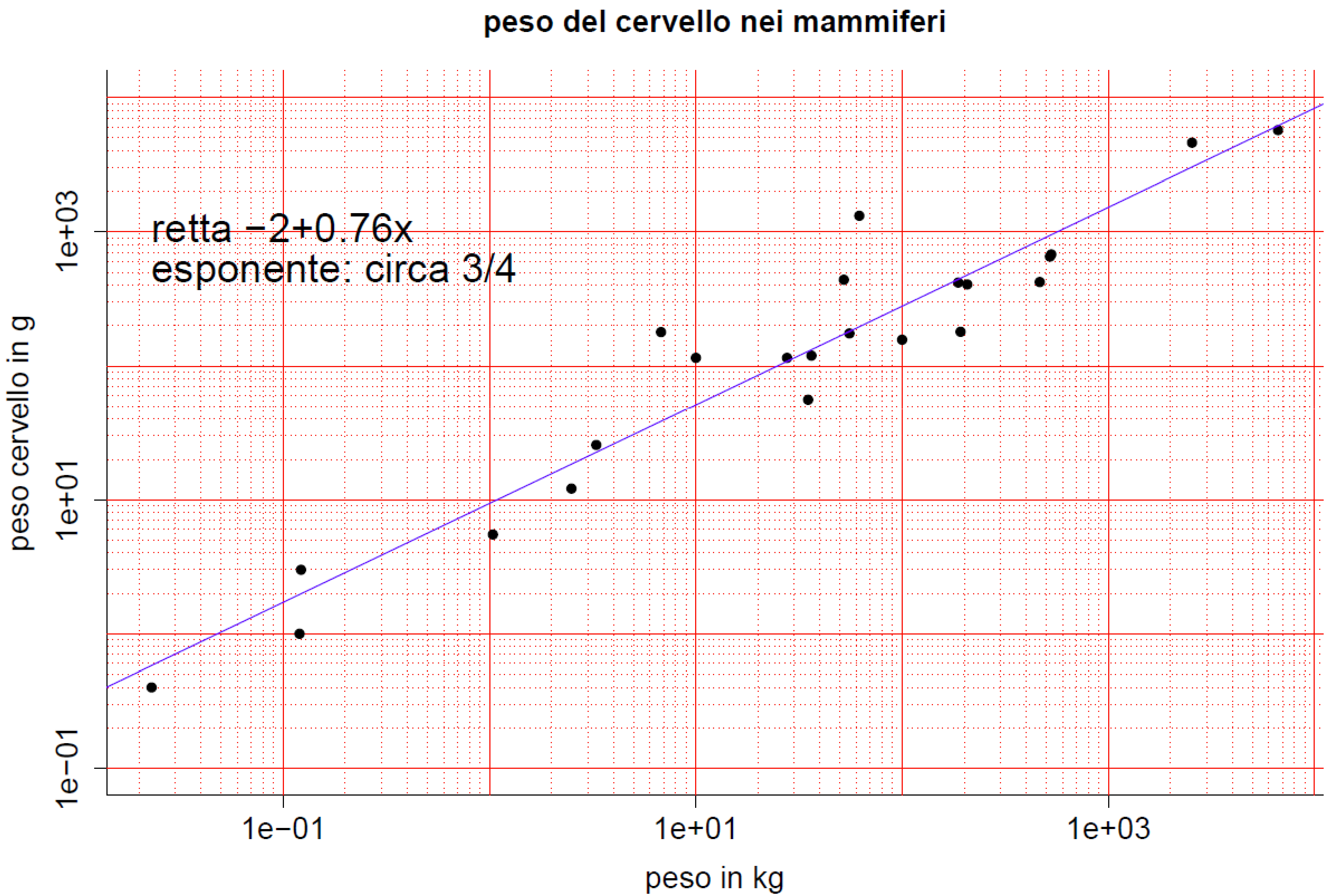


Un esempio: cervelli




peso del cervello nei mammiferi − dettaglio
peso cervello in g
0
200
400
600
800
1000
1200
0
100
200
300
400
500
peso in kg


peso del cervello nei mammiferi
peso cervello in g
1e−01
1e+01
1e+03
1e−01
1e+01
1e+03
peso in kg


peso del cervello nei mammiferi
retta −2+0.76x
esponente: circa 3/4
peso cervello in g
1e−01
1e+01
1e+03
1e−01
1e+01
1e+03
peso in kg