1 FEBBRAIO 2013

MODELLI ESPONENZIALI

COS'E' UN MODELLO ?

La ricerca scientifica ha tra i suoi principali obiettivi quelli di

comprendere

descrivere

come si svolgono

I FENOMENI

nel mondo che ci circonda

MODELLI

COME SI COSTRUISCE UN MODELLO?

Individuare i fattori cruciali che caratterizzano il fenomeno → Variabili qualitative e quantitative

Trovare le eventuali relazioni tra le grandezze individuate → Formulare ipotesi

Quantificare le relazioni trovate → Stabilire la LEGGE

COMINCIAMO A COSTRUIRE MODELLI…

Metteremo a confronto i seguenti fenomeni:

Scissione cellulare binaria
(numero di cellule prodotte durante il processo)

Fissione nucleare
(numero di neutroni prodotti durante il processo)

Decadimento radioattivo
(quantità di massa della sostanza radioattiva al passare del tempo)

Cosa li accomuna?

SCISSIONE CELLULARE BINARIA

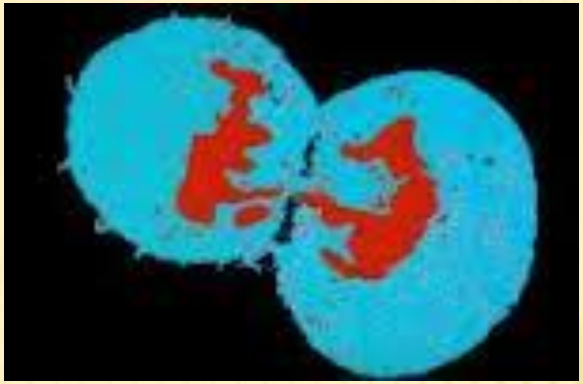
La scissione cellulare binaria è una **riproduzione asessuata** tipica delle **cellule procariote**.

Le cellule procariote sono state le prime a comparire sulla Terra, più di 3 miliardi di anni fa; esse sono prive di un nucleo delimitato dalla membrana nucleare e dotate di un DNA circolare, libero di muoversi nel citoplasma.

Ogni cellula produce due cellule figlie identiche alla madre (cloni).

Esempi di cellule procarioti sono i BATTERI.

SCISSIONE CELLULARE BINARIA



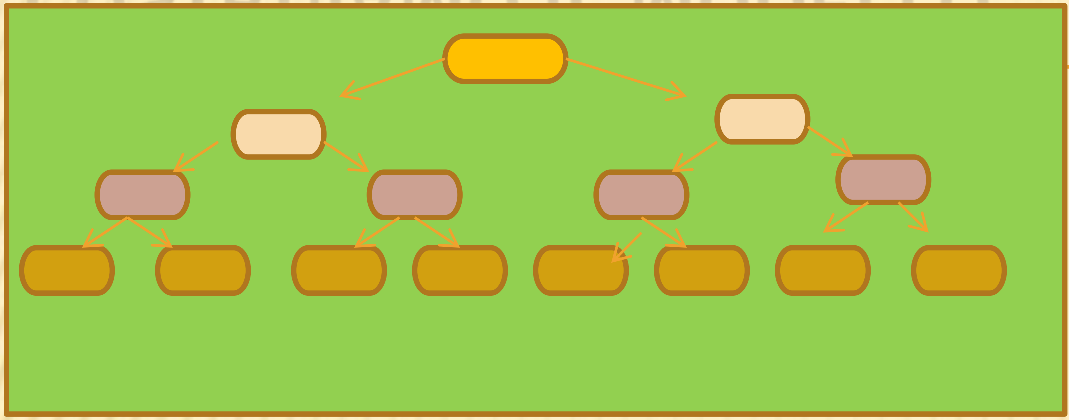
Che cosa abbiamo osservato?

Le cellule si riproducono per duplicazione

Quali sono le variabili quantitative che descrivono il fenomeno, assumendo per semplicità che le duplicazioni avvengano nello stesso istante?

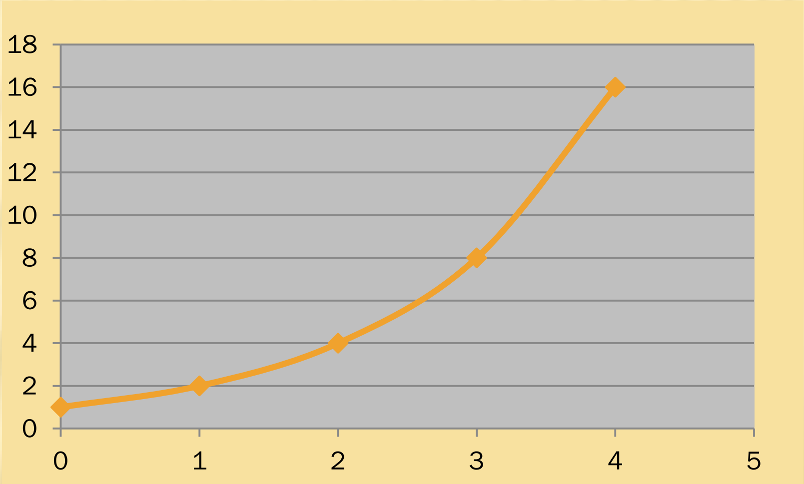
Il numero di scissioni k e il corrispondente numero di cellule N

COSTRUIAMO IL MODELLO



Consideriamo
1 sola cellula iniziale:
$N_0=1$

Numero di scissioni k	Numero di cellule N
	1
1	2
2	4
3	8
....	......
K	?



$$\boxed{N = 2^k}$$

Numero di scissioni k	Numero di cellule N
	1
1	2
2	2^2
3	2^3
....	......
K	?

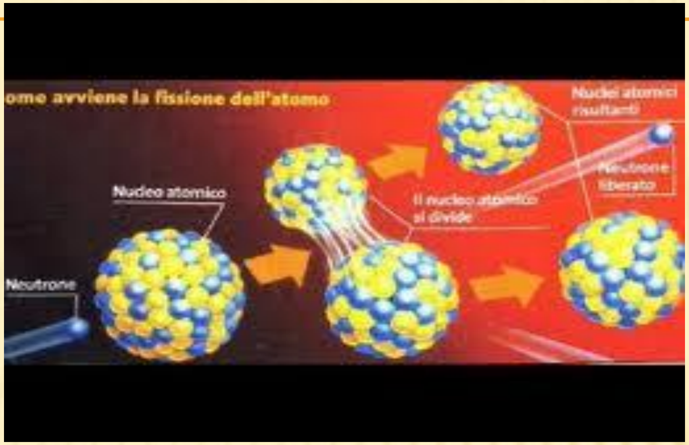
FISSIONE NUCLEARE

la **fissione nucleare** è una reazione nucleare in cui il nucleo di un elemento pesante decade in frammenti di minori dimensioni con **emissione** di una grande quantità di **energia** e un numero variabile di nuovi **neutroni**

La fissione può avvenire spontaneamente in natura oppure essere indotta tramite **bombardamento di neutroni**.

Quest'ultima è la reazione nucleare comunemente utilizzata nei reattori nucleari e nei tipi più semplici di bombe atomiche

FISSIONE NUCLEARE: URANIO 235



Che cosa abbiamo osservato?

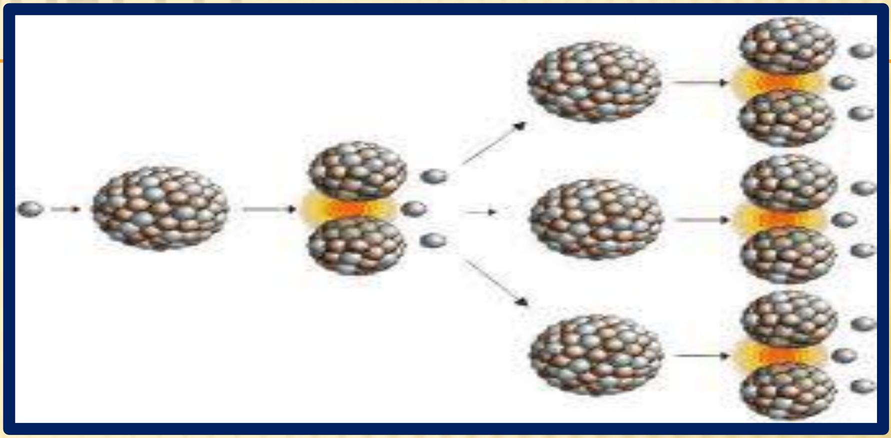
- Ogni nucleo di Uranio 235 si trasforma in un nucleo di Bario 142 e in un nucleo di Cripto 91
- I neutroni ad ogni collisione triplicano

Quali sono quindi le variabili quantitative che descrivono il fenomeno?

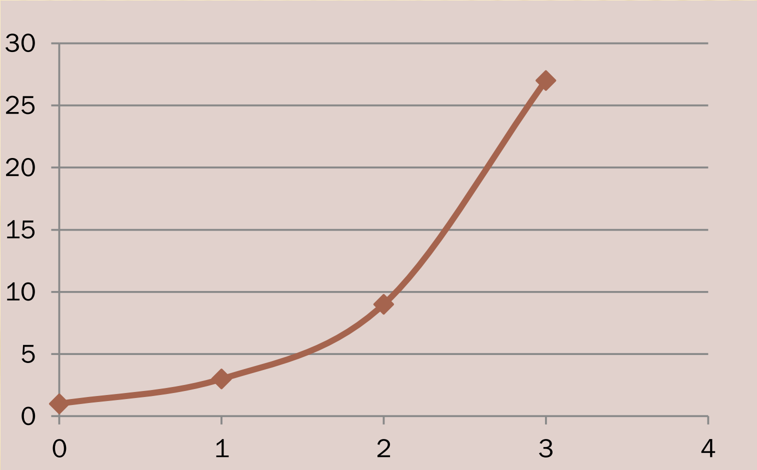
Il numero di collisioni k e il numero di neutroni prodotti N

COSTRUIAMO IL MODELLO

Consideriamo un solo neutrone iniziale
$N_0=1$



Numero collisioni k	Numero di neutroni N
	1
1	3
2	9
3	27
….	……
K	?



Numero collisioni k	Numero di neutroni N
	1
1	3
2	3^2
3	3^3
….	……
K	?

$$N = 3^k$$

DECADIMENTO RADIOATTIVO

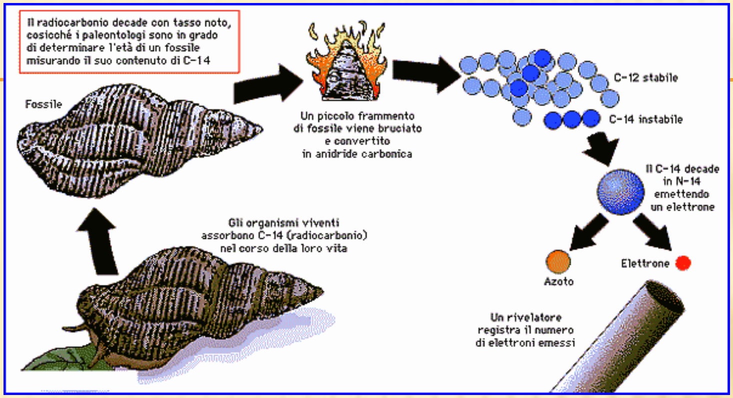
Molti isotopi radioattivi sono instabili perché il nucleo è soggetto a trasformazioni nucleari che avvengono spontaneamente mediante emissione di particelle.

Parte degli atomi dell'isotopo si trasformano in atomi di un altro elemento provocando una diminuzione della massa

Tale diminuzione avviene in modo proporzionale alla massa presente.

Un interessante applicazione del decadimento radioattivo riguarda **un metodo di datazione di fossili e materiale organico mediante l'analisi del decadimento del Carbonio 14**

DECADIMENTO RADIOATTIVO: DATAZIONE CON IL CARBONIO14



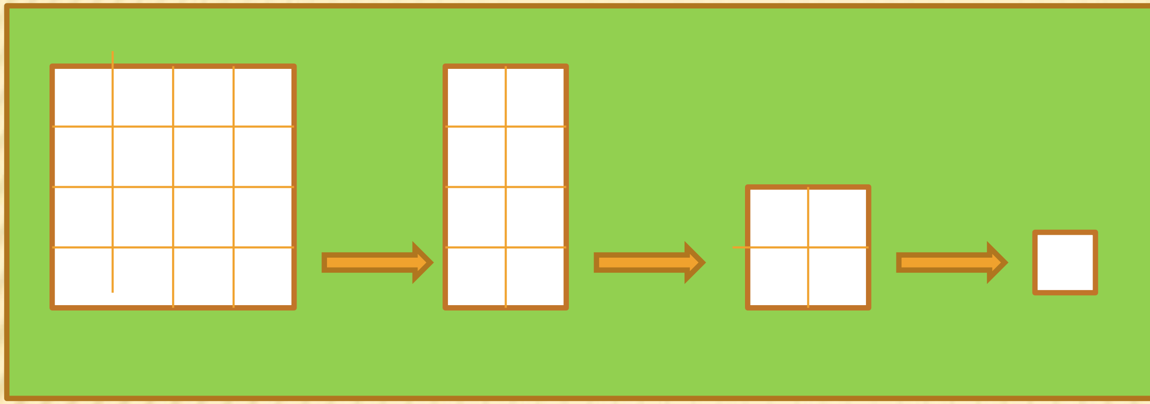
Che cosa abbiamo osservato?

La massa di un isotopo di Carbonio 14 dimezza a passi costanti nel tempo (circa ogni 5730 anni), perché parte degli atomi dell'isotopo si trasformano in elementi di azoto

Quali sono quindi le variabili quantitative che descrivono il fenomeno?

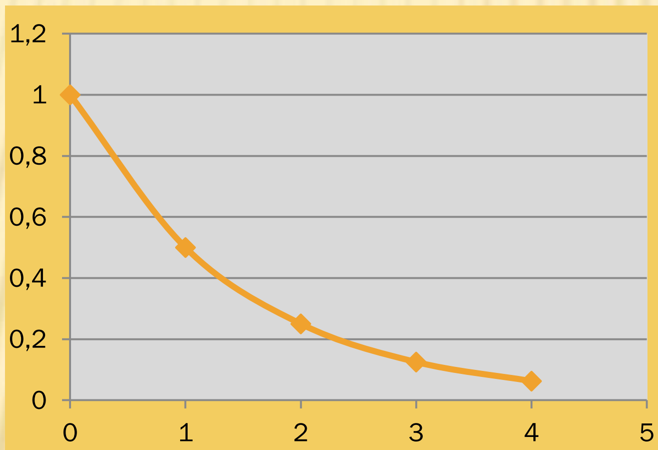
Il tempo di dimezzamento della massa e la massa di Carbonio 14

COSTRUIAMO IL MODELLO



Consideriamo la massa iniziale del C14
M_0= 1g

Tempo di dimezzamento t	Massa del C14 M(g)
	1
1	1/2
2	1/4
3	1/16
....	......
K	?



Tempo di dimezzamento t	Massa del C14 M(g)
	1
1	1/2
2	$(1/2)^2$
3	$(1/2)^3$
....	......
K	?

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

…COSA LI ACCOMUNA?

…i tre fenomeni sono descrivibili da

un modello esponenziale

Scissione cellulare binaria:

$$N = N_0 2^k$$

Fissione nucleare

$$N = N_0 3^k$$

Decadimento radioattivo

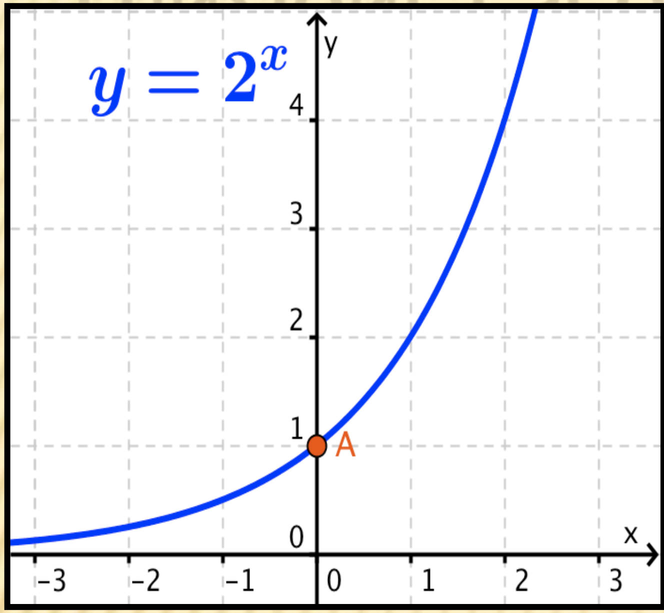
$$M = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

PASSIAMO ORA AD ANALIZZARE LE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI ESPONENZIALI…

$$y = a^x$$

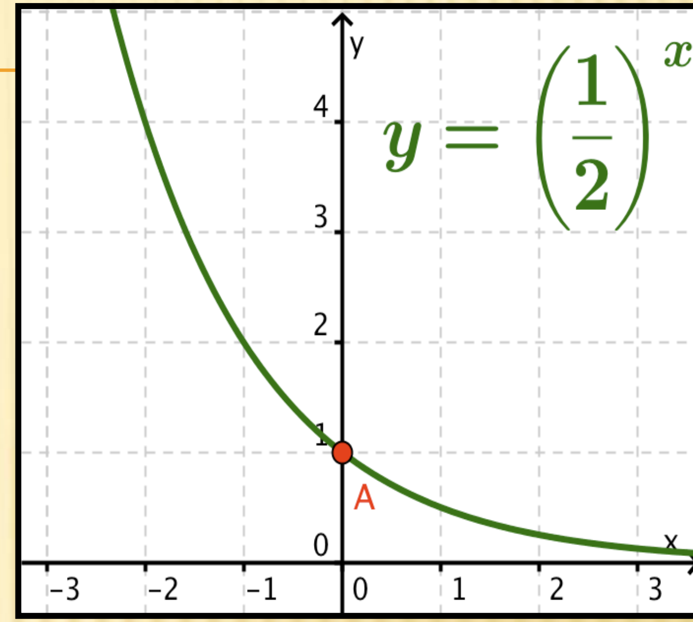
$$con\ a\ \in R^+$$

FUNZIONE ESPONENZIALE



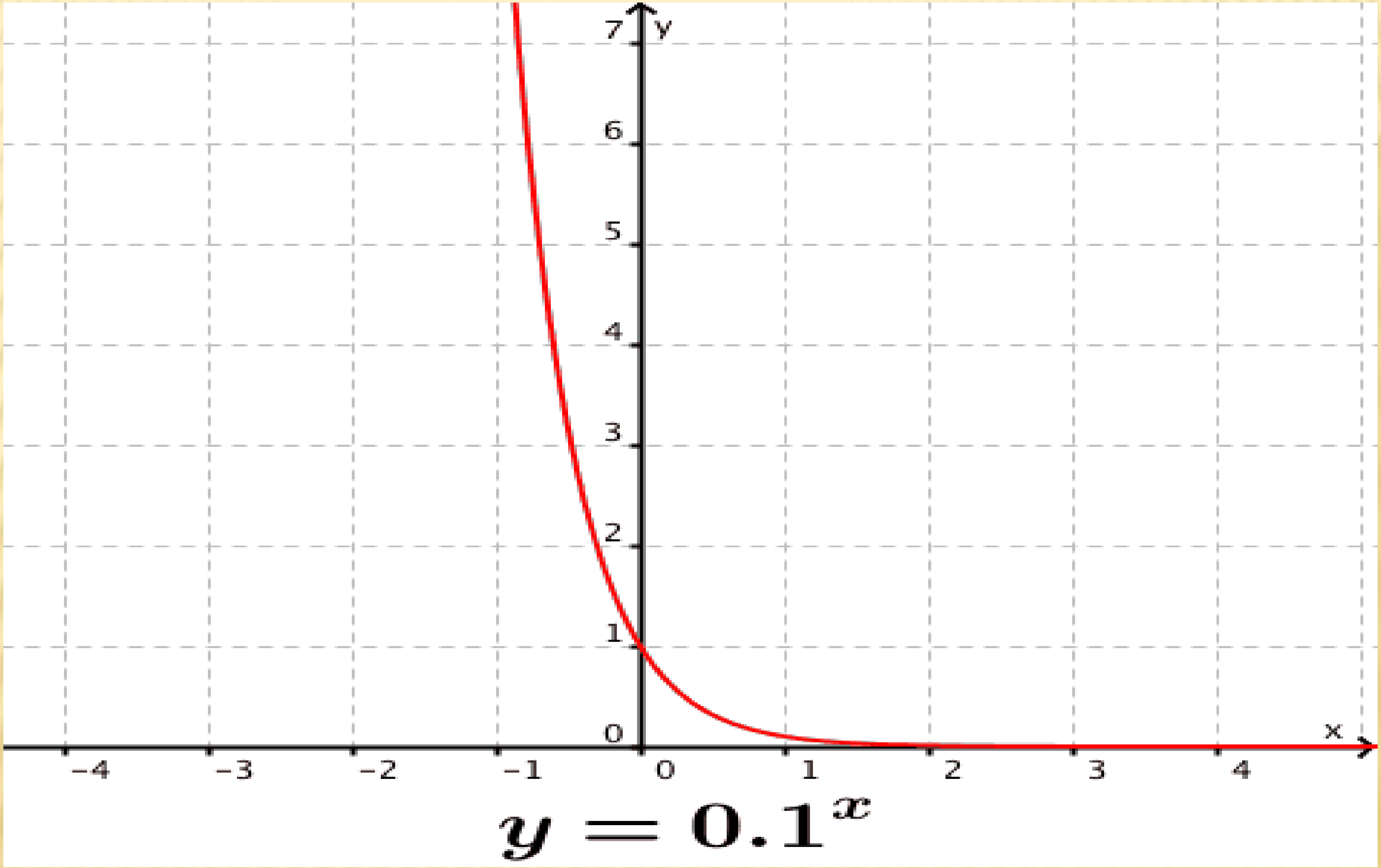
$$y = a^x$$

$a > 0, a \in R$



$a > 1$	$0 < a < 1$
La funzione è: positiva monotona crescente passante per il punto (0;1) $a^x \rightarrow 0 \; se \; x \rightarrow -\infty$ $a^x \rightarrow +\infty \; se \; x \rightarrow +\infty$	La funzione è: positiva monotona decrescente passante per il punto (0;1) $a^x \rightarrow 0 \; se \; x \rightarrow +\infty$ $a^x \rightarrow +\infty \; se \; x \rightarrow -\infty$

IN SINTESI



Tra le funzioni esponenziali, interessanti sono quelle con base "e"
(numero di Nepero)

IL NUMERO DI NEPERO: COME NASCE IL NUMERO“e”?

Tra il 1600 e la metà del 1700 i matematici Nepero ed Eulero si occuparono di trovare un modello che permettesse di calcolare la crescita di un capitale depositato in banca *all’interesse* pari a 1/n ottenendo la seguente legge

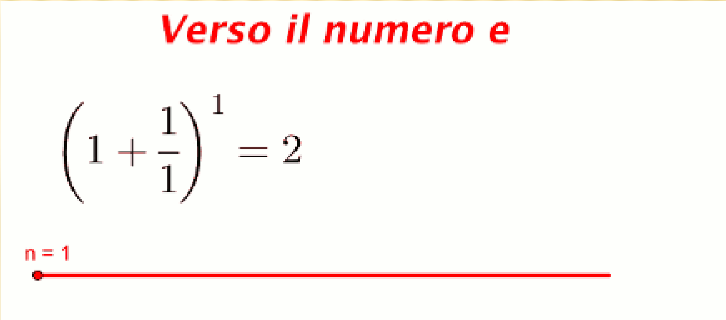
$$C = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

esempio

Se n diventa sempre più grande, C si avvicina al numero

e ≅ 2,71828 18284 59045 23536

“vedere per credere……”



Frazionamento dell'interesse	Interesse	Numero di volte n	Capitale alla fine del primo anno C
Annuo	1	1	$1 + 1 = \mathbf{2}$
Semestrale	$\frac{1}{2}$	2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$
Trimestrale	$\frac{1}{4}$	4	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \cong 2{,}441406$
Bimestrale	$\frac{1}{6}$	6	$\left(1+\frac{1}{6}\right)^6 \cong 2{,}521626$
Giornaliero	$\frac{1}{365}$	365	$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \cong 2{,}714567$
	$\frac{1}{n}$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Per capire meglio come funziona l'interesse frazionato…

a. Interesse semestrale: 50% $= \dfrac{1}{2}$

- fine 1° semestre: $C = 1 + \dfrac{1}{2}$

- fine 2° semestre: $C = \left(1+\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2$

La fine del 2° semestre coincide con la fine del 1° anno; così ottengo un capitale C dato da:

$$C = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$$

ESEMPI DI MODELLI ESPONENZIALI CON BASE "e"

DIFFUSIONE DI UN VIRUS INFORMATICO

Il numero di computer infettati dopo t minuti dall'infezione dei primi N_0 computer è:

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

Dove r, coefficiente dell'esponente è una costante positiva, che dipende dalla velocità di **crescita**

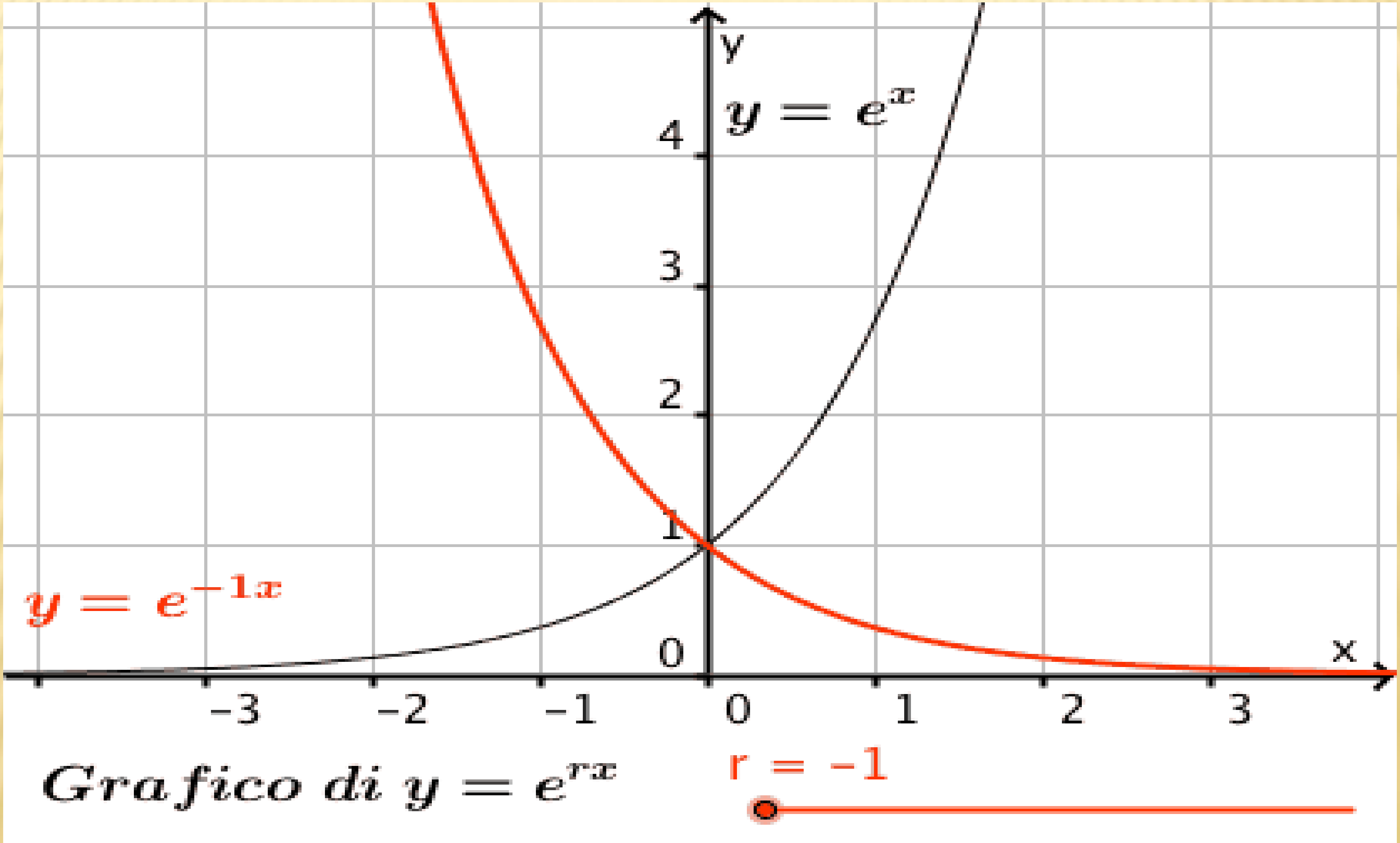
PROCESSO DI CARICA DI UN CONDENSATORE

Il valore dell'intensità della corrente i di carica di un condensatore di capacità C inserito in un circuito caratterizzato da una forza elettromotrice fem e da una resistenza R, al passare del tempo t è:

$$i(t) = \frac{fem}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Dove -1/RC, coefficiente dell'esponente è una costante negativa, che rende la legge un esempio di modello di **decrescita**

VEDIAMO IL GRAFICO DI $y = e^{rx}$ AL VARIARE DI r



CONCLUDENDO …OSSERVANDO