INDICI  TASSI 

e altri misteri...

Una delle esigenze più sentite dal genere umano è, da sempre, quella di comprendere e mettere ordine nel caos della realtà fenomenica.
La crescita delle informazioni e delle conoscenze in ambiti diversi come quello delle scienze sociali, dell'economia, della demografia, della medicina ha amplificato questa esigenza.

Nelle ricerche sociali, per esempio, si usano concetti generali astratti come quello di *benessere* che sono difficili da definire rigorosamente e sfuggono quindi ad una trattazione scientifica.
Per fare una ricerca sul benessere è necessario precisare meglio questo concetto in modo che la ricerca possa utilizzarlo.

Per es. può essere utile dire se si vuole parlare di ”*benessere nella condizione economica*” o di ” *benessere alimentare*” o ancora di ”*benessere fisico*”.



Questa precisazione permette di riduce la complessità dell'eventuale studio sul benessere, selezionando, tra i tanti possibili, uno degli aspetti ritenuti importanti del fenomeno.

Per arrivare alla descrizione quantitativa, è spesso necessario procedere a ulteriori scomposizioni, che restringano ancora di più l'ambito di studio. Per esempio, un aspetto concreto e meglio precisato del *benessere economico* può essere il *reddito*.

Procedendo in questo modo si individuano le **variabili del problema**, ultimo gradino della scala di astrazione, che permettono di **quantificare** aspetti concreti riguardanti il fenomeno.

Molto spesso le variabili usate nella pratica derivano da un calcolo matematico.

Supponiamo, per esempio, di essere interessati al benessere economico degli abitanti di un comune.

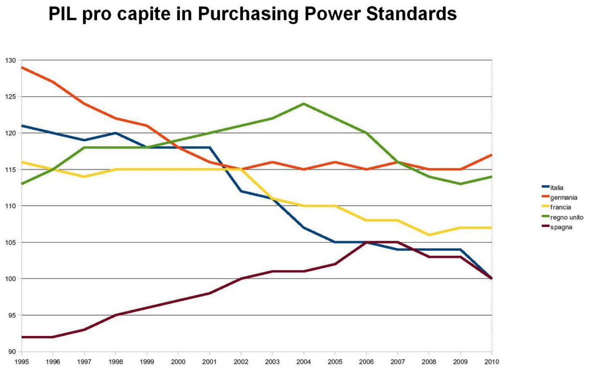
Riteniamo che il reddito pro-capite possa essere un buon indicatore di questa condizione. Il reddito procapite è una variabile che si può quantificare (cioè esprimere con un numero).
Per ottenere il valore del reddito pro-capite r degli abitanti di un comune è necessario **dividere** l'ammontare complessivo R dei redditi dei cittadini del comune, per il numero N di abitanti di quel comune: $r = R/N$.
Il reddito pro-capite è un indice del benessere economico.

In economia si usano molti indici, uno dei più importanti è il **PIL** (Prodotto Interno Lordo), introdotto dall'economista John Maynard Keynes (1883-1946). Il PIL stima, sinteticamente, la ricchezza prodotta da uno stato, in termini di beni e servizi:

$$\text{PIL} = C + G + I + (X - M)$$

dove C è il totale dei consumi finali, G la spesa dello stato, I gli investimenti, X e M le esportazioni e le importazioni.
Il PIL viene in genere calcolato su base annua, ma sono importanti anche le sue variazioni trimestrali. Si afferma che uno stato è in recessione se il PIL decresce per due trimestri di seguito.

Se si divide il PIL per il numero di abitanti di uno stato, si ottiene una stima del reddito pro-capite, che permette di valutare il benessere economico di una popolazione, ma non altro: come è noto, i grandi disastri fanno crescere il PIL perché attivano investimenti e lavoro, ma certamente non contribuiscono al benessere generale di una popolazione.



Tra gli altri indici importanti, la variazione percentuale del PIL da un'anno all'altro è il **tasso di crescita** dell'economia.
Esempio: variazione PIL italiano novembre 2012 -2.4%

Tra gli altri indici importanti, la variazione percentuale del PIL da un'anno all'altro è il **tasso di crescita** dell'economia.
Esempio: variazione PIL italiano novembre 2012 -2.4%

Il **tasso di cambio** è il rapporto tra il valore di due valute, per esempio euro e dollaro, ed è dunque il coefficiente di proporzionalità che ci permette di convertire i prezzi da una valuta all'altra.
Esempio: euro contro dollaro: 1.3383

Tra gli altri indici importanti, la variazione percentuale del PIL da un'anno all'altro è il **tasso di crescita** dell'economia.
Esempio: variazione PIL italiano novembre 2012 -2.4%

Il **tasso di cambio** è il rapporto tra il valore di due valute, per esempio euro e dollaro, ed è dunque il coefficiente di proporzionalità che ci permette di convertire i prezzi da una valuta all'altra.
Esempio: euro contro dollaro: 1.3383

Il **tasso di disoccupazione** è il rapporto tra le persone in cerca di lavoro e la forza lavoro (costituita dalle persone che lavorano e quelle che lo cercano).
Esempio: tasso di disoccupazione a novembre 2012 11.1%

Tra gli altri indici importanti, la variazione percentuale del PIL da un'anno all'altro è il **tasso di crescita** dell'economia.
Esempio: variazione PIL italiano novembre 2012 -2.4%

Il **tasso di cambio** è il rapporto tra il valore di due valute, per esempio euro e dollaro, ed è dunque il coefficiente di proporzionalità che ci permette di convertire i prezzi da una valuta all'altra.
Esempio: euro contro dollaro: 1.3383

Il **tasso di disoccupazione** è il rapporto tra le persone in cerca di lavoro e la forza lavoro (costituita dalle persone che lavorano e quelle che lo cercano).
Esempio: tasso di disoccupazione a novembre 2012 11.1%

Una rete trasmette informazione con un **tasso** espresso in numero di simboli per secondo (**boud**) o in bit al secondo.
Esempio: modem analogico $58\ \mathrm{kbit\,s^{-1}}$.

tassi e rate

it.wikipedia.org: Il **tasso** è un rapporto avente come numeratore il numero di eventi registrati in una popolazione statistica e come denominatore il numero totale di elementi di quella stessa popolazione.

en.wikipedia.org: In mathematics, a **rate** is a ratio between two measurements with different units.

tassi e rate

it.wikipedia.org: Il tasso è un rapporto avente come numeratore il numero di eventi registrati in una popolazione statistica e come denominatore il numero totale di elementi di quella stessa popolazione.

en.wikipedia.org: In mathematics, a rate is a ratio between two measurements with different units.

La parola **tasso** traduce parzialmente l'inglese **rate**, e si usa in matematica, statistica, economia, con significati simili ma non del tutto equivalenti e non del tutto coerenti tra loro; in ogni caso, calcolare un tasso vuol dire calcolare un rapporto.

I tassi in demografia

Indicatori importanti delle condizioni di vita di una popolazione e dalle sua evoluzione sono i tassi di **natalità, mortalità, immigrazione, emigrazione**.

Il tasso di natalità è il rapporto tra il numero n dei nati in una comunità **durante un periodo di tempo** e la numerosità N della popolazione **nello stesso periodo**. Per esempio nel 2011 gli Italiani erano circa N=60.630 milioni e sono nati circa n=560 000 bambini e quindi

$$\text{tasso di natalità} = \frac{n}{N} \approx 0.0092$$

cioè circa 9.2 per mille annuo.

Si noti che il tasso di natalità della Turchia è stato del 18 per mille,
quello della Francia del 13 per mille,
quello della Germania dell'8 per mille.

Inoltre il tasso di mortalità registrato nello stesso anno in Italia è stato del 9.7 per mille (quindi superiore al tasso di natalità)

La parola inglese **rate** serve anche a indicare la **velocità di cambiamento**, e in effetti la velocità è un rapporto!

La parola inglese **rate** serve anche a indicare la **velocità di cambiamento**, e in effetti la velocità è un rapporto!

 Alla fine del '700 un grande demografo, Thomas R. Malthus (1766-1834), sosteneva (senza fondamento empirico) che la produzione di risorse alimentari R seguisse un andamento lineare nel tempo:

$$R(t) = R_0 + mt$$

Data questa legge, con quale velocità/rate/tasso crescono le risorse alimentari?

Tasso di variazione

Dobbiamo confrontare la **variazione** di risorse disponibili con la il tempo in cui si è prodotta. Consideriamo due istanti di tempo $t_1 < t_2$: Si ha

$$\frac{R(t_2) - R(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{mt_2 - mt_1}{t_2 - t_1} = \frac{m(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = m$$

abbiamo ottenuto una costante, che non dipende da t_1 e t_2.

Tasso di variazione

Dobbiamo confrontare la **variazione** di risorse disponibili con la il tempo in cui si è prodotta. Consideriamo due istanti di tempo $t_1 < t_2$: Si ha

$$\frac{R(t_2) - R(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{mt_2 - mt_1}{t_2 - t_1} = \frac{m(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = m$$

abbiamo ottenuto una costante, che non dipende da t_1 e t_2.

Dunque la **velocità di variazione** delle risorse è costante nel tempo e vale m, che è proprio il coefficiente angolare della legge lineare $R_0 + mt$.

Tasso di variazione

Dobbiamo confrontare la **variazione** di risorse disponibili con la il tempo in cui si è prodotta. Consideriamo due istanti di tempo $t_1 < t_2$: Si ha

$$\frac{R(t_2) - R(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{mt_2 - mt_1}{t_2 - t_1} = \frac{m(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = m$$

abbiamo ottenuto una costante, che non dipende da t_1 e t_2.

Dunque la **velocità di variazione** delle risorse è costante nel tempo e vale m, che è proprio il coefficiente angolare della legge lineare $R_0 + mt$.

Questo è un fatto generale delle leggi lineari:
il coefficiente angolare a della legge $f(x) = ax + b$ esprime la velocità (costante) con cui f varia al variare di x.

In generale, il tasso di variazione di una funzione $f(x)$ tra i punti x_1 e x_2 è uguale al coefficiente angolare della retta che passa per i $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, e non è costante se la legge non è lineare.

Per esempio, data la funzione quadratica $f(x) = ax^2$ si ha

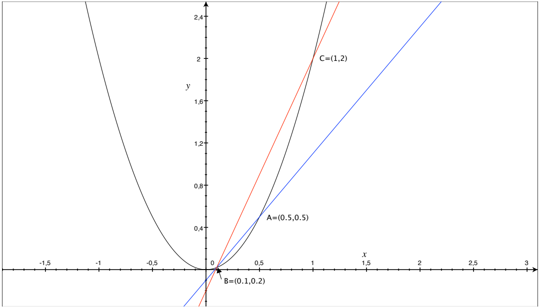
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$$

che dipende dalla scelta di x_1 e x_2.

Nel caso di $f(x) = ax^2 = 2x^2$, il tasso è $2(x_2 + x_1)$, dunque è

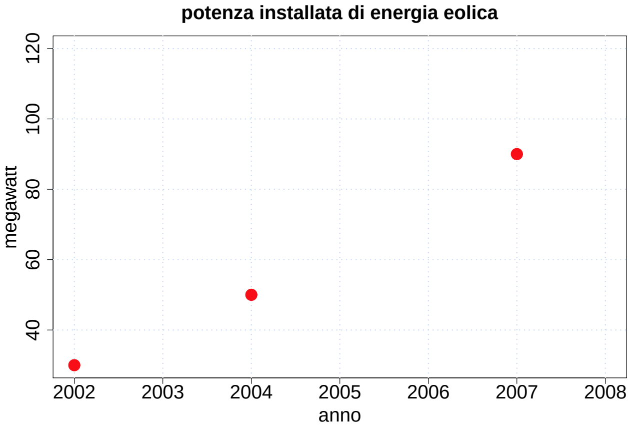
$$6/5 \text{ se } \quad x_1 = 0.1 \text{ e } x_2 = 0.5$$

$$11/5 \text{ se } x_1 = 0.1 \text{ e } x_2 = 1$$



Perchè è utile calcolare il tasso di variazione?

Per esempio, nel grafico sono riportati i dati della potenza eolica installata, al variare dell'anno.



La legge non è sicuramente lineare, perché i tre punti non sono allineati.

Calcolare il tasso con cui la potenza installata è cresciuta tra il 2002 e il 2004, e tra il 2004 e il 2007, ci dà un'informazione importante:

tasso tra 2002 e 2004 $= \frac{50-30}{2004-2002} = 10$

tasso tra 2004 e 2007 $= \frac{90-50}{2007-2004} = 40/3 = 16.67$

dunque la potenza installata sta **accelerando**!

Inoltre, utilizzando i tassi di crescita calcolati possiamo

interpolare tra i dati, e affermare, per esempio, che nel 2003 la potenza installata doveva essere vicina a

$$30 + 10 \times 1 = 40 \text{ MW}$$

oppure possiamo **estrapolare** e affermare che nel 2008 la potenza installata dovrebbe essere stata di circa circa

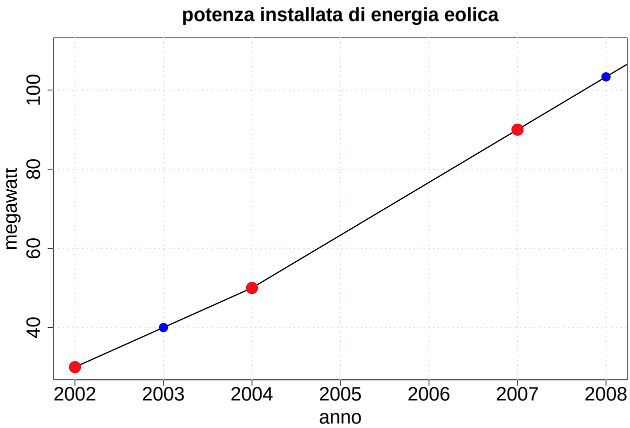
$$90 + 40/3 \times 1 \approx 107 \text{ MW}$$

e nel 2013

$$90 + 40/3 \times (2013 - 2007) = 170 \text{ MW}$$

Per calcolare questi valori, abbiamo usato un dato noto, al quale abbiamo sommato la velocità di variazione per il tempo trascorso.

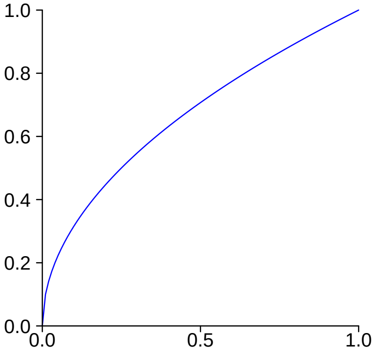
Interpolare e estrapolare corrisponde a utlizzare la retta che passa per due punti per fare previsioni:



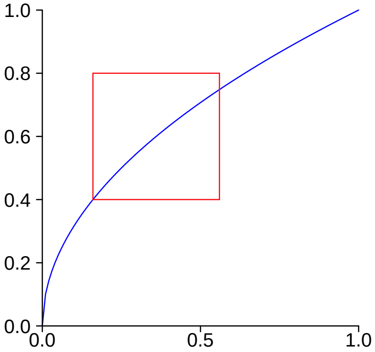
A volte, non avendo molti dati, approssimare una legge utilizzando tassi costanti (e dunque utilizzando leggi lineari), è l'unica possibilità.

Ma c'è un'altro motivo che rende così diffuse le leggi lineari tra quelle che si usano per spiegare i fenomeni naturali...

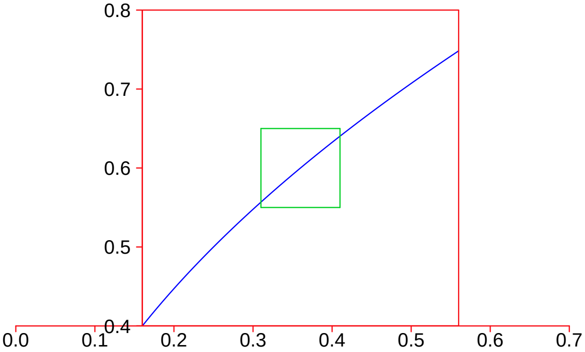
Zoom....



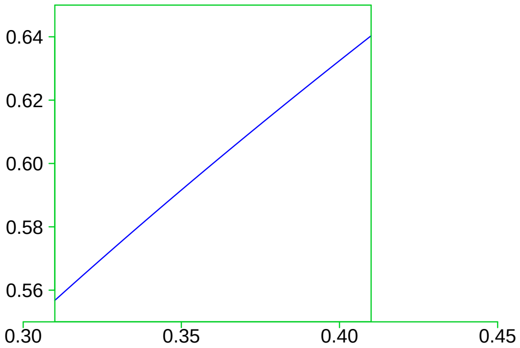
Zoom....



Zoom....



Zoom....



Se ingrandisco abbastanza intorno a un punto, ogni grafico di funzione appare rettilineo. Questo vuol dire che, per piccole variazioni della variabile indipendente, posso considerare costante il tasso di variazione.

Se ingrandisco abbastanza intorno a un punto, ogni grafico di funzione appare rettilineo. Questo vuol dire che, per piccole variazioni della variabile indipendente, posso considerare costante il tasso di variazione.

La teoria dei materiali elastici (dalle molle alle travi ingegneristiche) è una teoria in cui la **forza è proporzionale allo spostamento** perché si considerano solo piccoli spostamenti.

Se ingrandisco abbastanza intorno a un punto, ogni grafico di funzione appare rettilineo. Questo vuol dire che, per piccole variazioni della variabile indipendente, posso considerare costante il tasso di variazione.

La teoria dei materiali elastici (dalle molle alle travi ingegneristiche) è una teoria in cui la **forza è proporzionale allo spostamento** perché si considerano solo piccoli spostamenti.

Per lo stesso motivo, **la dilatazione dei solidi è proporzionale alla variazione di temperatura** ... per piccole variazioni di temperatura.

Se ingrandisco abbastanza intorno a un punto, ogni grafico di funzione appare rettilineo. Questo vuol dire che, per piccole variazioni della variabile indipendente, posso considerare costante il tasso di variazione.

La teoria dei materiali elastici (dalle molle alle travi ingegneristiche) è una teoria in cui la **forza è proporzionale allo spostamento** perché si considerano solo piccoli spostamenti.

Per lo stesso motivo, **la dilatazione dei solidi è proporzionale alla variazione di temperatura** ... per piccole variazioni di temperatura.

Il peso di un neonato aumenta di un **numero fisso di etti alla settimana**... per poche settimane.

Le leggi lineari

Le leggi lineari sono il primo esempio importante di legge che descrive un cambiamanto.

Le leggi lineari

Le leggi lineari sono il primo esempio importante di legge che descrive un cambiamanto.

Usare una legge lineare corrisponde a considerare **costante la velocità del cambiamento**.

Le leggi lineari

Le leggi lineari sono il primo esempio importante di legge che descrive un cambiamanto.

Usare una legge lineare corrisponde a considerare **costante la velocità del cambiamento**.

Sono usate frequentemente perché:
• descrivono una approssimazione ragionevole per piccoli cambiamenti
• in mancanza di altre informazioni, interpolare o estrapolare linermente è l'unica possibilità ragionevole

Le leggi lineari

Le leggi lineari sono il primo esempio importante di legge che descrive un cambiamanto.

Usare una legge lineare corrisponde a considerare **costante la velocità del cambiamento**.

Sono usate frequentemente perché:
• descrivono una approssimazione ragionevole per piccoli cambiamenti
• in mancanza di altre informazioni, interpolare o estrapolare linermente è l'unica possibilità ragionevole
Sulle leggi lineari non ci si puo' sbagliare!