

PLS – 2012 Laboratorio di orientamento
5 – Le meraviglie del logaritmo: esercizi

Esercizio 1: Si può calcolare!

È piuttosto semplice calcolare un'approssimazione del logaritmo in base 10 degli interi da 1 a 10 (e quindi di qualunque numero con una sola cifra significativa) **senza usare una calcolatrice**. Per approssimare $\log_{10} 2$, osserva che $2^{10} = 1024$. Calcolando il logaritmo in base 10 di entrambi i membri ottieni

$$\log_{10} 2^{10} = \log_{10} 1024, \quad \text{da cui} \quad \log_{10} 2 = \frac{1}{10} \log_{10} 1024$$

- a) Calcola approssimativamente $\log_{10} 1024$.
- b) Conseguentemente, calcola approssimativamente $\log_{10} 2$.
- c) Calcola approssimativamente il \log_{10} di 4 e 8.

- d) Usando il valore approssimato che hai trovato per $\log_{10} 2$, calcola $\log_{10} 5$ usando che $2 \times 5 = 10$.

- e) Usando che $3^4 = 81$ non è troppo diverso da 80, dai un'approssimazione di $\log_{10} 3$

- f) Calcola approssimativamente il \log_{10} di 9 e 6

- g) Usando che $7^2 = 49$ non è troppo diverso da 50, dai un'approssimazione di $\log_{10} 7$

- h) Sapendo che $6^9 = 10\,077\,696$, calcola una ulteriore (migliore) approssimazione di $\log_{10} 6$ e da questa una (migliore) approssimazione di $\log_{10} 3$.

Esercizio 2: pH

Il pH di una soluzione è l'opposto del logaritmo in base 10 della concentrazione in moli per litro di H^+ ; a bassi valori del pH corrispondono soluzioni acide, ad alti valori del pH corrispondono soluzioni basiche. Rispondi usando il fatto che, approssimativamente, $\log_{10} 2 = 0.3$.

- a) Calcola, approssimativamente, il pH del succo di pomodoro, che ha una concentrazione di H^+ pari a 6.3×10^{-5} moli/litro (usa che 6.3 è approssimabile con 6.4), e del latte, che ha una concentrazione di 4×10^{-8} moli/decilitro. Quale dei due è più acido?
- b) Il pH dell'acqua di un lago passa in una stagione dal valore 7.2 al valore 7.5. La concentrazione di H^+ aumenta o diminuisce? Come cambia quantitativamente?

Esercizio 3: la datazione dei fossili

Uno dei più famosi e semplici metodi di datazione dei reperti archeologici è il metodo del carbonio-14, ideato alla fine degli anni quaranta dal chimico statunitense Walter F. Libby (che ricevette per questo il Premio Nobel nel 1960).

Il ^{14}C è un isotopo instabile del carbonio, e si trasforma in azoto ^{14}N per decadimento β . Nell'atmosfera, l'abbondanza del ^{14}C rispetto al ^{12}C (che è l'isotopo di carbonio più importante, ed è stabile) si mantiene costantemente pari a circa un atomo su 10^{12} , perché i raggi cosmici, urtando l'azoto atmosferico, riformano il ^{14}C (si ipotizzando che il flusso dei raggi cosmici sia costante nel tempo).

Negli organismi viventi il carbonio viene continuamente scambiato con l'ambiente, dunque la concentrazione relativa di ^{14}C rispetto a ^{12}C è pari a quella atmosferica. Quando l'organismo muore, il carbonio non viene più scambiato con l'esterno, e il ^{14}C decade secondo le leggi della radioattività, dimezzandosi in circa 5730 anni.

- a) Indica con M_0 la concentrazione di ^{14}C rispetto al ^{12}C , presente in un organismo all'istante della sua morte, e scrivi l'espressione di $M(t)$, la concentrazione relativa del ^{14}C dopo t anni.

- b) Per datare un reperto, si misura il rapporto tra M e $M_0 = 10^{-12}$. Se questo rapporto è $1/2$, a quando risale il reperto? E se è $1/8$?

- c) Supponi di misurare una concentrazione relativa del ^{14}C di 10^{-14} . A quando risale il reperto?

Esercizio 4: uranio e torio

Un metodo di datazione delle rocce di età fino a 500 000 anni si basa sul decadimento dell'uranio ^{234}U in torio ^{230}Th , che a sua volta decade in altri elementi (radio, che decade in radon). Una massa di uranio 234, inizialmente pari a U_0 , decade con legge esponenziale $U_0 e^{-at}$, con $a \simeq 6 \times 10^{-6}$; una massa di torio 230, inizialmente pari a T_0 decade con legge esponenziale $T_0 e^{-bt}$, dove $b \simeq 2 \times 10^{-5}$.

- a) Quali sono i tempi di dimezzamento di U e T ?

- b) Per motivi chimici, il torio non può penetrare nelle rocce, e dunque quello che c'è è solo quello prodotto dal decadimento dell'uranio. A partire da questa osservazione si può dimostrare che il rapporto $r(t) = T(t)/U(t)$ è pari a

$$r(t) = \frac{a}{b-a} (1 - e^{-(b-a)t})$$

Disegna un grafico approssimativo di $r(t)$, per $t \geq 0$. Il rapporto $r(t)$ è una funzione crescente o decrescente?

- c) Supponi di misurare $r = 0.5$. Che età ha la roccia?

Esercizio 5: stelle brillanti

Da [wiki/Magnitudine_apparente](#): in età ellenistica le stelle visibili ad occhio nudo si dividevano in sei classi (le **magnitudini**). Le stelle più luminose erano dette di prima magnitudine, quelle brillanti la metà di queste erano di seconda magnitudine, e così via fino, alla sesta magnitudine, al limite della visione umana ad occhio nudo. Questo metodo di indicare la luminosità delle stelle fu reso popolare da Tolomeo nel suo *Almagesto*, e si pensa che sia stato inventato da Ipparco.

Nel 1856, Pogson formalizzò questo sistema definendo una stella di prima magnitudine come una stella che fosse 100 volte più luminosa di una stella di sesta magnitudine, e fissando per la stella Polare la magnitudine 2.

- a) Calcola come cambia la luminosità se la magnitudine aumenta di 1.
- b) La magnitudine della Luna piena è -12.6; quella del Sole è -26.8. Quante Lune piene servirebbero per illuminare “a giorno” la terra?

Esercizio 6: deboli tremori

La magnitudo di un terremoto secondo la scala Richter si ottiene calcolando il logaritmo in base 10 del massimo spostamento in micrometri di un sismografo posto a 100km dall'epicentro. L'energia liberata da un terremoto è proporzionale all'ampiezza dell'oscillazione elevata alla potenza $3/2$. In tempi più recenti è stata introdotta come misura la magnitudo-momento, che dà valori analoghi a quelli della meno precisa scala Richter.

- a) In occasione del terremoto in Emilia del maggio 2012, un giornalista ha riferito di una scossa di magnitudo 4.9, che seguiva una scossa di poco superiore di magnitudo 5.4. Che errore c'è in questa affermazione?
- b) Durante questo terremoto, la massima magnitudo raggiunta è stata di 5.86. Confronta l'energia liberata da questo sisma con quella liberata durante le scosse del terremoto dell'Aquila del 2009 (magnitudo 6.3), dell'Irpinia del 1980 (magnitudo 6.89) e di Reggio Calabria e Messina del 1908 (magnitudo stimata 7.2), che fece circa 100 000 morti.