

6 L'equazione di Boltzmann

In tempi recenti sono state introdotte equazioni di tipo Boltzmann come modelli matematici per lo studio di sistemi con interazioni binarie. Questi modelli hanno una natura intrinsecamente probabilistica, al contrario dell'equazione di Boltzmann che proviene da una dinamica deterministica. Ne parlo qui perché permettono al lettore di familiarizzarsi con la struttura dell'equazione e soprattutto con la sua interpretazione probabilistica.

6.1 Modelli discreti

Considero un sistema di N particelle (o agenti) in cui una particella può trovarsi in uno di un numero finito di stati, che indicherò con le cifre da 1 a ℓ . Per fissare le idee, si può pensare a uno stato come a una scatola, o a un valore di energia, o come a una "opinione" di un agente. Indico con n_i il numero di particelle nello stato i .

Descrivo due delle possibili dinamiche probabilistiche per questo sistema.

6.1.1 Il caso lineare e la master equation

Immagino che in un intervallo di tempo Δt piccolo, una particella nello stato i possa saltare nello stato j con probabilità $r(i, j)\Delta t$. La matrice $r(i, j)$ specifica i **rate di salto** ("rate" = "tasso").² Come cambia il numero di particelle nello stato i in questo intervallo di tempo?

$$\Delta n_i = \text{gain} - \text{loss}$$

dove "loss" è il termine di perdita, dovuto al fatto che nel tempo Δt le particelle nello stato i saltano in altri stati, mentre il termine di "gain" è dovuto al fatto che particelle in stati diversi da i saltano nello stato i . È relativamente semplice convincersi che

$$\begin{aligned} \text{loss} &= \sum_{j=1}^{\ell} r(i, j)n_i\Delta t \\ \text{gain} &= \sum_{j=1}^{\ell} r(j, i)n_j\Delta t \end{aligned}$$

Infatti se nel tempo Δt la probabilità di saltare di una particella da i a j è $r(i, j)\Delta t$, in questo tempo ne salteranno $r(i, j)n_i\Delta t$. Indico ora con $p_i(t)$ la frequenza delle particelle nello stato i :

$$p_i(t) = n_i(t)/N, \quad \text{cioè } n_i(t) = Np_i(t)$$

che posso anche interpretare come probabilità che una singola particella sia nello stato i . Posso scrivere,

$$\Delta n_i(t) \approx N \partial_t p_i \Delta t = N \Delta t \left(\sum_{j=1}^{\ell} r(j, i)p_j(t) - \sum_{j=1}^{\ell} r(i, j)p_i(t) \right)$$

²La versione precisa di questo sistema è la seguente: una particella nello stato i salta nello stato j ad tempo t_{ij} che è una variabile esponenziale di valore atteso $1/r(i, j)$. Quindi in un tempo $r(i, j)$ la particella fa circa un salto verso j . Si può pensare a questa variabile come a una sveglia che ricorda alla particella di saltare. Lo stato j in cui finisce la particella è determinato da quale sveglia suona prima.

Dividendo per $N\Delta t$ e passando al limite $\Delta t \rightarrow 0$, $N \rightarrow +\infty$ ottengo

$$\partial_t p_i(t) = \sum_{j=1}^{\ell} (r(j, i)p_j(t) - r(i, j)p_i(t)) \quad (21)$$

Questa equazione prende il nome di **master equation**.

La master equation è l'equazione di evoluzione della distribuzione di probabilità per una catena di Markov, a stati finiti, a tempo continuo con rate di salto r . Si osservi che la master equation vale per la distribuzione di probabilità di ogni singola particella, e per ottenerla non è realmente necessario usare N particelle con N divergente, perché le particelle sono indipendenti. Si osservi infine che si tratta di una equazione lineare.

6.1.2 Interazioni binare

Considero ora la stessa sistema, cioè N particelle in ℓ possibili stati, ma con una dinamica differente, perché considero il caso in cui una particella cambia stato solo se interagisce con un'altra particella. Assumo dunque che in tempo Δt due particelle negli stati i e j interagiscono con probabilità $\lambda(i, j)\Delta t$, per una opportuna matrice a termini non negativi λ . L'interazione porta le due particelle negli stati i', j' con probabilità assegnata $P(i', j'|i, j)$. Complessivamente, in un tempo Δt , una coppia di particelle negli stati (i, j) salta negli stati (i', j') con probabilità $B(i, j, i', j')\Delta t$, dove

$$B(i, j, i', j') = \lambda(i, j)P(i', j'|i, j).$$

Nel tempo Δt , il numero n_i di particelle nello stato i ha una variazione pari a

$$\Delta n_i = \Delta t \left(\sum_{i', j', j} B(i', j', i, j) n_{i'} n_{j'} - \sum_{i', j', j} B(i, j, i', j') n_i n_j \right)$$

Osservo che il termine di sinistra è di ordine N , infatti è circa $N \partial_t p_i(t) \Delta t$, mentre quello di destra è di ordine N^2 perché compare il numero di coppie di particelle. In queste condizioni non può esistere un'equazione limite per p_i . Per ottenerla è necessario che la probabilità di interazione tra due particelle sia di ordine $1/N$. In pratica si divide λ (e dunque B) per N . Si ottiene formalmente, dividendo per $N\Delta t$ e passando al limite,

$$\partial_t p_i(t) = \sum_{i', j', j} B(i', j', i, j) p_{i'} p_{j'} - \sum_{i', j', j} B(i, j, i', j') p_i p_j.$$

Questa è un'equazione di Boltzmann discreta, ed è quadratica in p . L'abbiamo formalmente ottenuta assumendo che ogni particella interagisce con un'altra con probabilità che tende a 0 come a $1/N$. Però poiché le particelle sono N , ogni particella interagisce con qualche altra particella con probabilità non nulla. Abbiamo descritto il sistema nel limite di **interazioni rare**. Si noti la differenza con i modelli di tipo Vlasov: in quel caso l'interazione non è per niente rara, ma l'effetto dell'interazione che va a 0 come $1/N$. Nel caso appena descritto l'effetto dell'interazione è di ordine 1, ma la frequenza dell'interazione va a 0 come $1/N$. Si osservi infine che per derivare questa equazione è indispensabile mandare N a infinito, e che si tratta di una equazione quadratica.

6.2 L'equazione di Boltzmann per le sfere dure

In questa sezione comincio a descrivere come si ricava euristicamente l'equazione di Boltzmann per i gas rarefatti, nel caso più classico, quello con l'interazione di coppia data dalla dinamica di sfere dure, cioè il caso di particelle sferiche che interagiscono solo tramite urti elastici. L'equazione di Boltzmann si può anche ottenere a partire da particelle puntiformi che interagiscono con potenziali centrali repulsivi a corto range (cioè a supporto compatto); l'equazione differirà da quella che introduco solo per l'espressione del cosiddetto nucleo di collisione B .

Considero particelle di diametro $r > 0$, e che a un certo istante di tempo vengano in contatto urtandosi. All'istante dell'urto le loro posizioni \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 devono soddisfare la seguente relazione $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + r\mathbf{n}$ dove \mathbf{n} è il versore di $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Indico con \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 le velocità "entranti", cioè prima dell'urto. Affinché l'urto possa accadere, le particelle si devono avvicinare. Vediamo come questa condizione si traduca in una espressione simbolica. Supponiamo che l'istante di urto sia $t = 0$. Prima dell'urto, cioè per $t < 0$ e le posizioni delle particelle sono $\mathbf{x}_i + t\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2$, e dunque

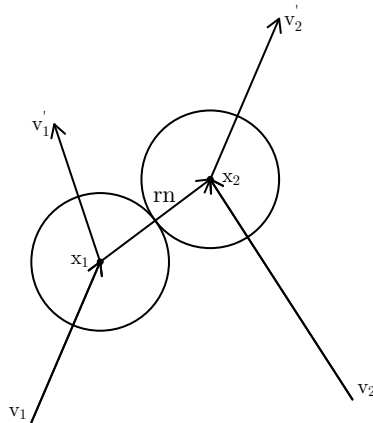
$$|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)|^2 = r^2 + 2tr\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + t^2|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2.$$

Questa funzione di t deve essere decrescente fino a $t < 0$; la sua derivata in t è $r\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + 2t|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2$ che è negativa per $t < 0$ se e solo se

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) < 0.$$

(la stessa conclusione si poteva trarre da considerazioni geometriche).

Subito dopo l'urto, la posizione delle particelle è invariata, ma cambiano le velocità. Indico con $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ le velocità "uscenti" e ne determino l'espressione in termini delle velocità entranti.



Anche se l'urto è una descrizione semplificata di un'interazione, devono valere i principi della fisica. In particolare, deve conservarsi la quantità di moto (perché non ci sono forze esterne), e deve conservarsi l'energia. Per imporre queste due condizioni è utile scrivere le velocità in termini della velocità del baricentro e della semi-differenza:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2}, \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{2},$$

così che

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{w} & \mathbf{v}'_1 &= \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{w}' \\ \mathbf{v}_2 &= \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{w} & \mathbf{v}'_2 &= \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{w}'. \end{aligned} \quad \text{e}$$

Nell'ultima espressione ho usato che la velocità del baricentro si conserva, cioè $\frac{\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2}{2} = \bar{\mathbf{v}}$ e ho indicato con \mathbf{w}' la semi-differenza delle velocità uscenti. In questo modo mi sono assicurato la conservazione della quantità di moto nell'urto, e ho ridotto il problema di trovare le velocità uscenti a quello di determinare \mathbf{w}' . Impongo l'uguaglianza dell'energia cinetica E prima e dopo l'urto:

$$E := \frac{1}{2}(|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2) = |\bar{\mathbf{v}}|^2 + |\mathbf{w}|^2 = E' := \frac{1}{2}(|\mathbf{v}'_1|^2 + |\mathbf{v}'_2|^2) = |\bar{\mathbf{v}}|^2 + |\mathbf{w}'|^2.$$

La conservazione dell'energia si riduce alla condizione

$$|\mathbf{w}'|^2 = |\mathbf{w}|^2.$$

Questa uguaglianza dà diverse possibilità a seconda della dimensione: in \mathbb{R} ci sono solo due possibilità: $w' = w$ o $w' = -w$. Nel primo caso le velocità non cambiano nell'urto, nel secondo le particelle si scambiano le velocità (che è quello che accade colpendo in linea una biglia ferma con un'altra). Nel limite $r \rightarrow 0$ queste due possibilità danno lo stesso sistema: infatti nel secondo caso stiamo semplicemente scambiando il nome delle particelle dopo l'urto, senza nessuna variazione rispetto al moto libero. In pratica la dinamica di urti rigidi in una dimensione è in un certo senso indistinguibile dal flusso libero, e per questo non esiste l'equazione di Boltzmann unidimensionale.

In dimensione maggiore, la condizione di conservazione dell'energia non è evidentemente sufficiente a determinare il valore di \mathbf{w}' . Per andare avanti è indispensabile chiederci di quale sistema quello delle sfere dure sia un modello semplificato. È facile convincersi che stiamo considerando (al limite) un sistema meccanico con interazione di coppia data da un potenziale repulsivo a simmetria radiale che impedisca alle particelle di avvicinarsi più di r , e che non abbia effetto per distanze maggiori. Formalizzo: sia $U_\varepsilon(x)$ un potenziale su \mathbb{R} positivo, regolare, simmetrico rispetto a 0, decrescente tra 0 e $+\infty$, a supporto compatto e tale che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } |x| < r \\ 0 & \text{se } |x| > r \end{cases}$$

Mi aspetto che la legge dell'urto elastico si ottenga passando al limite il sistema meccanico di energia potenziale $U_\varepsilon(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$. L'informazione in più che mi da questa supposizione, è che, poiché la forza è parallela alla congiungente $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, la variazione di impulso avviene lungo la congiungente, e quindi nell'urto può solo cambiare la componente dell'impulso lungo \mathbf{n} . Vediamo le conseguenze di questo fatto.

Indico con $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ la matrice di componenti $a_i b_j$ che dunque agisce sui vettori in questo modo

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \mathbf{v} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})$$

(la chiamerò un po' impropriamente "prodotto tensore"). Con questa definizione, $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ è l'operatore di proiezione lungo \mathbf{n} , mentre $\mathbb{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ è il proiettore sul sottospazio ortogonale. Riscrivo la condizione di conservazione dell'energia imponendo che le componenti di \mathbf{w} ortogonali a \mathbf{n} non cambino, cioè che

$$(\mathbb{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{w}' = (\mathbb{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{w}.$$

Poiché $\mathbb{I} = (\mathbb{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ ottengo

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}')^2 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})^2$$

che mi da due scelte, una che porta a $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$ (situazione non fisica in cui le particelle proseguono indisturbate), e l'altra che corrisponde a

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{w};$$

in questo caso la componente della velocità relativa lungo \mathbf{n} viene invertita dall'urto. Ora posso scrivere le velocità uscenti in funzione delle entranti:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \bar{\mathbf{v}} + (\mathbb{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{w}' + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \mathbf{w}' \\ &= \bar{\mathbf{v}} + (\mathbb{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{w} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \mathbf{w} \\ &= \bar{\mathbf{v}} + (\mathbb{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{w} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \mathbf{w} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \mathbf{w} \\ &= \mathbf{v}_1 - ((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{aligned}$$

L'espressione della velocità \mathbf{v}'_2 si ottiene facilmente scambiando gli indici, ma viene usualmente scritta in modo leggermente differente:

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - ((\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 + ((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

Osservazioni.

1. La condizione di conservazione dell'energia e di trasmissione normale dell'impulso sono invarianti per lo scambio tra $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$, dunque è facile convincersi che la mappa $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \rightarrow (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)$ coincide con la sua inversa, cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}'_1 - ((\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}'_2 + ((\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{aligned}$$

Nell'espressione della legge di urto le velocità entranti e quelle uscenti sono indistinguibili. La differenza si nota solo ricordando che \mathbf{n} è il versore di $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$: le velocità entranti soddisfano la condizione **pre-collisionale**

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) < 0$$

mentre le velocità uscenti soddisfano la condizione **post-collisionale**

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1) > 0.$$

2. In quanto limite di un sistema di particelle conservativo, il modello di sfere dure è reversibile, il flusso associato conserva l'energia, che è solo cinetica, e conserva la misura nello spazio delle fasi.

3. La regola d'urto conserva la misura anche nel solo spazio delle velocità, infatti

$$d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = 2^d d\bar{\mathbf{v}} d\mathbf{w} = 2^d d\bar{\mathbf{v}} d\mathbf{w}' = d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2$$

Sunto

- La dinamica di sfere dure è un modello di interazioni di coppia ispirato a quelli con potenziali repulsivi a simmetria radiale e a corto range (cioè con supporto compatto).
- La regola d'urto discende dunque dalla conservazione dell'impulso, dalla conservazione dell'energia e dal fatto che la variazione di impulso è lungo al congiungete, come accade per tutti i sistemi con potenziali
- Detto \mathbf{n} il versore di $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, la condizione di velocità pre-collisionali è

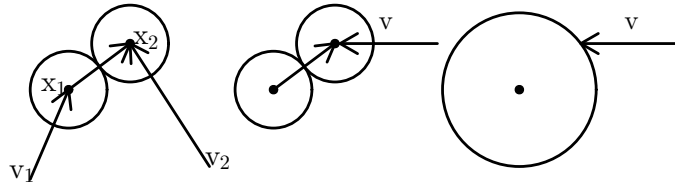
$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) < 0$$

La condizione di velocità post-collisionali ha il segno opposto.

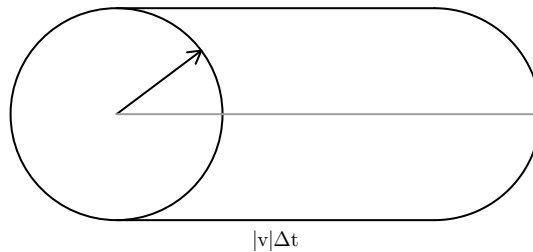
6.2.1 La sezione d'urto delle sfere dure

Per ricavare euristicamente l'equazione di Boltzmann serve ora quantificare la frequenza con cui in un tempo Δt una coppia di particelle di velocità $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ urta e cambia velocità in $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$. Mettiamoci nel sistema di riferimento inerziale della particella 1, in cui una particella di velocità \mathbf{v}_2 appare avere velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$.

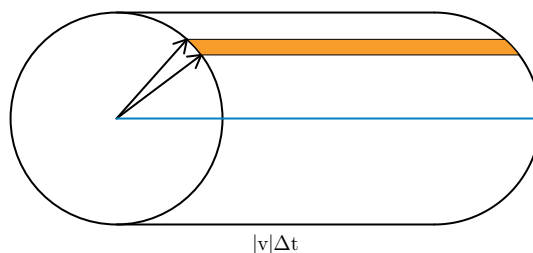
Se le due particelle urtano, il centro della particella 2 si trova sulla circonferenza di centro \mathbf{x}_1 e raggio r .



Le particelle che hanno centro nella regione cilindrica che ha come basi le due semisfere come in figura, sono tutte e sole quelle di velocità \mathbf{v} che nell'intervallo Δt urtano con la particella 1.



Il volume nello spazio delle fasi di questa regione è $\pi r^2 |\mathbf{v}| \Delta t$. Poiché le velocità di uscita sono perfettamente individuate da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e dal parametro \mathbf{n} , è necessario determinare il numero di particelle che urtano con direzione \mathbf{n} . Questo conto va fatto considerando una regione di versori di ampiezza $d\mathbf{n}$, in modo da avere un volume di misura positiva. Va determinato il volume della regione arancione, che ha come base una calotta sferica di area $r^2 d\mathbf{n}$, che va proiettata sul piano ortogonale a \mathbf{v} .



Il volume cercato è

$$r^2 |\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}| d\mathbf{n} |\mathbf{v}| \Delta t = r^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| d\mathbf{n} \Delta t$$

Assumendo che ci sia **caos molecolare**, supponendo cioè che tutte le particelle abbiano la stessa distribuzione $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, nel tempo Δt il numero di particelle in \mathbf{x} che si trovano ad avere velocità \mathbf{v}'_1 e \mathbf{v}'_2 come conseguenza dell'urto è

$$\Delta t N^2 r^2 |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) f(t, \mathbf{x}_1 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_2)$$

(si noti che per Δt piccolo la seconda particella è in $\mathbf{x}_1 + r\mathbf{n}$ a meno di un ordine Δt). Valuto come cambia il numero di particelle con velocità \mathbf{v}_1 nel tempo a causa delle collisioni. Per ogni osservabile $\varphi(\mathbf{v})$ calcolo

$$\Delta_{\text{coll}} N \int d\mathbf{v}_1 \varphi(\mathbf{v}_1) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1).$$

cioè il contributo alla variazione dovuto alle sole collisioni (l'altro termine è quello di flusso libero). La collisione trasforma \mathbf{v}_1 in \mathbf{v}'_1 , dunque

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{coll}} N \int d\mathbf{v}_1 \varphi(\mathbf{v}_1) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) \\ = \Delta t N^2 r^2 \int d\mathbf{v}_2 \int_{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) < 0} d\mathbf{n} |(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}| f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) f(t, \mathbf{x}_1 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_2) (\varphi(\mathbf{v}'_1) - \varphi(\mathbf{v}_1)) \end{aligned}$$

Si comprende come sia necessario che $Nr^2 = \lambda$ sia di ordine 1. Dividendo per Δt e passando al limite $r \rightarrow 0$, $N \rightarrow +\infty$, $\Delta t \rightarrow 0$ si ottiene che la parte di derivata temporale di $\int f \varphi$ dovuta alle collisioni è

$$\begin{aligned} \lambda \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int_{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) < 0} d\mathbf{n} |(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}| f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_2) (\varphi(\mathbf{v}'_1) - \varphi(\mathbf{v}_1)) \\ = \frac{1}{2} \lambda \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\mathbf{n} |(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}| f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_2) (\varphi(\mathbf{v}'_1) - \varphi(\mathbf{v}_1)) \\ = \frac{1}{2} \lambda \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\mathbf{n} |(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}| (f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}'_1) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}'_2) - f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_2)) \varphi(\mathbf{v}_1) \end{aligned}$$

Nel primo passaggio ho sostituito l'integrale sulla semisfera all'integrale sulla sfera, con la metà dell'integrale sulla sfera. Nel secondo passaggio il termine in $\varphi(\mathbf{v}'_1)$ è stato riscritto scambiando il nome delle variabili $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ con il nome delle variabili $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$. Posso farlo perché le relazioni tra le variabili entranti e uscenti sono le stesse. Poi ho usato che $d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2$, e che $|(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \cdot \mathbf{n}| = |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}|$. In dettaglio:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\mathbf{n} |(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}| f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_2) \varphi(\mathbf{v}'_1) \\ = \int d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2 \int d\mathbf{n} |(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1) \cdot \mathbf{n}| f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}'_1) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}'_2) \varphi(\mathbf{v}_1) \\ = \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int d\mathbf{n} |(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}| f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}'_1) f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}'_2) \varphi(\mathbf{v}_1) \end{aligned}$$

A questo punto, per l'arbitrarietà di φ , e prendendo anche in considerazione la parte di flusso libero, si ottiene l'equazione di Boltzmann

$$\begin{aligned} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \partial_x f = \lambda Q(f, f) \\ Q(f, f) := \int_S d\mathbf{n} \int d\mathbf{v}_* |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}| (f' f'_* - f f_*). \end{aligned} \quad (22)$$

dove ho inglobato in λ il fattore $1/2$, e indicato con $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*)$ le velocità entranti, e con $(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*)$ le velocità uscenti, e ho usato la notazione compatta

$$f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad f_* = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_*), \quad f' = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'), \quad f'_* = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_*)$$

Il regime in cui $N \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow 0$, con Nr^2 costante prende il nome di **limite di bassa densità** o **limite di Boltzmann-Grad**

Sunto

- Euristicamente, l'equazione di Boltzmann descrive l'evoluzione di un sistema di N particelle, in caso di urti rari.
- È necessario assumere che sia vero il caos molecolare.
- La rarità degli urti è garantita dall'assunzione Nr^2 costante, nel limite $N \rightarrow +\infty$, perché la sezione d'urto totale per le particelle di velocità $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è proporzionale a $r^2|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$, che è di ordine $1/N$.