5 La validità dell'equazione di Vlasov

5.1 Costruzione delle soluzioni

Ricordo che vogliamo risolvere l'equazione di Vlasov

$$\begin{aligned} &\partial_t f_t + \operatorname{div}_z (f_t \mathcal{K}[f_t]) = 0 \\ &\mathcal{K}[f](\mathbf{z}) := \int \mathbf{G}(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}) f(\tilde{\mathbf{z}}) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

La riscrivo in forma debole per una "traiettoria" di misure μ_t, $t \geq 0$. Sia

$$\mathcal{K}[\mu](t, \mathbf{z}) := \int \mathbf{G}(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}) \mu_t(\mathrm{d}\tilde{\mathbf{z}})$$

e, supposta nota μ_t, sia $\mathbf{Z}_t^\mu(\mathbf{z})$ generato dal campo $\mathcal{K}[\mu]$ (a rigore il flusso è a due parametri, sto sottoindedento che considero solo dati iniziali al tempo 0). L'equazione si riformula per le misure in forma debole come

$$\mu_t = \mathbf{Z}_t^\mu \# \mu_0.$$

Questa espressione non è la soluzione, perché non conosco il flusso se non conosco la soluzione stessa. Osservo che non è necessario supporre regolarità per μ, perché il push forward non lo richiede e per l'esistenza del flusso è sufficiente la regolarità di $\mathbf{G}$, come vedremo.
Queste considerazioni si concretizzeranno in un teorema di costruzione delle soluzioni per dati iniziali misure di probabilità. Come ipotesi supporrò che μ_0 sia a supporto limitato, e che la funzione $\mathbf{G}$ sia localmente limitata e lipschitziana. L'idea è che, data ν_t con $\nu_0 = \mu_0$, costruisco un flusso $\mathbf{Z}_t^\nu$, e con questo flusso costruisco $\mathbf{Z}_t^\nu \# \mu_0$, ottenendo una nuova traiettoria nello spazio delle misure di probabilità. Mostrando che questa mappa è contrattiva otterrò l'esistenza e unicità delle soluzioni.

Lo faremo in parte attraverso due proposizioni; la prima che assicura che data μ_t possiamo costruire un flusso con buone proprietà, la seconda che assicura che dato un flusso possiamo trasportare μ_0 in μ_t in modo da soddisfare le ipotesi che permettono di costruire il flusso. Infine, dovremo mettere insieme questi due aspetti.

Lemma 5.1 (Regolarità del campo e del flusso)**.** *Sia $\mathbf{G}$ una funzione limitata e lipschitziana di costante di Lipschitz L. Sia μ_t una famiglia di misure di probabilità, con $t \in [0, T]$, con i supporti tutti contenuti in un chiuso limitato B, e sia inoltre debolmente continua in t, cioè $D_1(\mu_t, \mu_s) \to 0$ se $s \to t$.*
Allora $\mathcal{K}[\mu](t, \mathbf{z})$ è un campo limitato e lipschitziano di costante di Lipschitz L, inoltre è continuo in $t \in [0, T]$. Dunque il flusso associato Z_t^μ esiste, ed è lipschitizano di costante di Lipschitz e^{Lt}.

Dimostrazione. Il campo è dato da

$$\mathcal{K}[f](t, \mathbf{z}) = \int \mathbf{G}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \mu_t(\mathrm{d}\mathbf{w}).$$

Dunque se $|G| \leq M$ per una qualche costante M,

$$|\mathcal{K}[f](t, \mathbf{z})| \leq M \int \mu_t(\mathrm{d}\mathbf{z}) = M.$$

Inoltre, dati $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$,

$$\begin{aligned}|\mathcal{K}[f](t,\mathbf{z}_1)-\mathcal{K}[f](t,\mathbf{z}_2)| &\leq \int |\mathbf{G}(\mathbf{z}_1,\mathbf{w})-\mathbf{G}(\mathbf{z}_2,\mathbf{w})|\,\mu_t(\mathrm{d}\mathbf{w})\\ &\leq L|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|\int \mu_t(\mathrm{d}\mathbf{w}) = L|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|.\end{aligned}$$

Provo la continuità nel tempo. Si ha

$$|\mathcal{K}[f](t,\mathbf{z})-\mathcal{K}[f](s,\mathbf{z})| \leq \left|\int \mathbf{G}(\mathbf{z},\mathbf{w})(\mu_t(\mathrm{d}\mathbf{w})-\mu_s(\mathrm{d}\mathbf{w}))\right| \leq LD_1(\mu_t,\mu_s)$$

dove, nell'ultimo passaggio, ho usato la definizione di distanza D_1, sfruttando la lipschitzianità di $\mathbf{G}$ nella seconda variabile.
Quanto provato finora garantisce l'esistenza del flusso. La lipschitzianità del flusso è conseguenza della lipschitzianità del campo. Infatti, dati $\mathbf{z}_1$ e $\mathbf{z}_2$,

$$\begin{aligned}|\mathbf{Z}^\mu_t(\mathbf{z}_1)-\mathbf{Z}^\mu_t(\mathbf{z}_2)| &\leq |\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2| + \int_0^t \mathrm{d}s|\mathcal{K}(s,\mathbf{Z}^\mu_s(\mathbf{z}_1))-|\mathcal{K}(s,\mathbf{Z}^\mu_s(\mathbf{z}_2))|\\ &\leq |\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2| + L\int_0^t \mathrm{d}s|\mathbf{Z}^\mu_s(\mathbf{z}_1)-\mathbf{Z}^\mu_s(\mathbf{z}_2)|\end{aligned}$$

(per la prima disuguaglianza ho usato la versione integrale dell'equazione che definisce il flusso, per la seconda ho usato la lipschitzianità del campo). Applicando il lemma di Gronwall si ottiene che $\mathbf{Z}^\mu_t(\mathbf{z})$ ha costante di Lipschitz stimata da e^{Lt}.

□

Il caso fisicamente più interessante è quello dei sistemi conservativi con interazione di coppia, da cui siamo partiti, in tal caso $\mathbf{G}$ è lipschitziana, ma non è limitata (una delle sue componenti è $\mathbf{v}$). Non è difficile superare questa difficoltà, perché come si vedrà serve solo la limitatezza sul supporto di μ_t. Lascio i dettagli al lettore. Ricordo anche che il caso reale è quello di interazione con potenziale gravitazionale o elettrostatico, caso per cui è tutto più difficile e interessante.

Proposizione 5.2 (Dipendenza del flusso dalla distribuzione)**.**
Siano μ_t e ν_t due famiglie di misure di probabilità, con $t \in [0,T]$, con i supporti tutti contenuti in un chiuso limitato B. Siano inoltre debolmente continue in t, cioè $D_1(\mu_t,\mu_s)$, $D_1(\nu_t,\nu_s)$, $\to 0$ se $s \to t$. Vale

$$|\mathbf{Z}^\mu_t(\mathbf{z}_1)-\mathbf{Z}^\nu_t(\mathbf{z}_2)| \leq \mathrm{e}^{Lt}\left(|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2| + L\int_0^t \mathrm{d}sD_1(\mu_s,\nu_s)\right). \tag{18}$$

dove L è la costante di Lipschitz di G.

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, $\mathcal{K}[\mu]$ e $\mathcal{K}[\nu]$ sono funzioni continue in t, limitate e lipschitziane uniformemente in $t \in [0,T]$, pertanto i corrispondenti flussi sono ben definiti. Dimostro la (18). Scrivo i due flussi in forma integrale:

$$\mathbf{Z}^\mu_t(\mathbf{z}_1) = \mathbf{z}_1 + \int_0^t \mathrm{d}s\mathcal{K}[\mu](s,\mathbf{Z}^\mu_s(\mathbf{z}_1))$$

$$\mathbf{Z}_t^\nu(\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_2 + \int_0^t \mathrm{d}s\mathcal{K}[\nu](s, \mathbf{Z}_s^g(\mathbf{z}_2))$$

Sottraggo e stimo:

$$|\mathbf{Z}_t^\mu(\mathbf{z}_1) - \mathbf{Z}_t^\nu(\mathbf{z}_2)| \leq |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2| + \int_0^t \mathrm{d}s|\mathcal{K}[\mu](s, \mathbf{Z}_s^\mu(\mathbf{z}_1)) - \mathcal{K}[\nu](s, \mathbf{Z}^\nu(\mathbf{z}_2))|$$

Per stimare l'ultimo termine, sommo e sottraggo il campo generato da μ ma calcolato nel flusso generato da ν, ottenendo i due termini

$$\begin{aligned}(1) &= |\mathcal{K}[\mu](s, \mathbf{Z}_s^\mu(\mathbf{z}_1)) - \mathcal{K}[\mu](s, \mathbf{Z}_s^\nu(\mathbf{z}_2))| \\ (2) &= |\mathcal{K}[\mu](s, \mathbf{Z}^\nu(\mathbf{z}_2)) - \mathcal{K}[\nu](s, \mathbf{Z}^\nu(\mathbf{z}_2))|\end{aligned}$$

Il primo termine si stima semplicemente usando la lipschitzianità del campo $\mathcal{K}$, con la costante di Lipschitz L che è quella di $\mathbf{G}$:

$$|(1)| \leq L|\mathbf{Z}_s^\mu(\mathbf{z}_1) - \mathbf{Z}_s^\nu(\mathbf{z}_2)|$$

Nel secondo caso si tratta di stimare in $\mathbf{z} = \mathbf{Z}_s^\nu(\mathbf{z}_2)$ la differenza

$$|\mathcal{K}[\mu](s, \mathbf{z}) - \mathcal{K}[\nu](s, \mathbf{z})|.$$

Questa stima è meno immediata, e serve la distanza D_1

$$\mathcal{K}[\mu](s, \mathbf{z}) - \mathcal{K}[\nu](s, \mathbf{z}) = \int \mathbf{G}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_1)(\mu_s(\mathrm{d}\mathbf{z}_1) - \nu_s(\mathrm{d}\mathbf{z}_1) \leq LD_1(\mu_s, \nu_s)$$

Mettendo insieme le due stime si ha

$$|\mathbf{Z}_t^\mu(\mathbf{z}_1) - \mathbf{Z}_t^\nu(\mathbf{z}_2)| \leq |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2| + L\int_0^t \mathrm{d}sD_1(\mu_s, \nu_s) + L\int_0^t \mathrm{d}s|\mathbf{Z}_s^\mu(\mathbf{z}_1) - \mathbf{Z}_s^\nu(\mathbf{z}_2)|$$

Usando il lemma di Gronwall "congelando" la dipendenza temporale del termine in D_1, si ottiene la tesi (dettagli al lettore).

□

Proposizione 5.3 (Dipendenza della distribuzione dal flusso).
Sia μ_0 una distribuzione di probabilità con supporto in un compatto B_0. Siano μ_t^i, $i = 1, 2$ le soluzioni per $t \in [0, T]$ dell'equazione di Liouville di flussi $\mathbf{Z}_t^{\nu_i}$, generati dai campi determinati dalle misure ν_t^i, di dati iniziali μ_0^i. Le misure μ_t^i hanno supporto in un compatto B che dipende solo da T, e sono debolmente continue in t. Inoltre per T sufficientemente piccolo esistono $C > 0$ e $\gamma \in (0, 1)$ tali che

$$\sup_{t\in[0,T]} D_1(\mu_t^1, \mu_t^2) \leq CD_1(\mu_0^1, \mu_0^2) + \gamma \sup_{t\in[0,T]} D_1(\nu_t^1, \nu_t^2). \tag{19}$$

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{G}$ è limitato, chiamando M il suo massimo è immediato concludere che $|\mathbf{Z}_t^{\nu_i}(\mathbf{z}) - \mathbf{z}| \leq Mt$. Questa disuguaglianza implica che μ_t^i per $t \in [0, T]$ hanno supporto in un opportuno compatto B che dipende solo da B_0 e da T.

Sia $\varphi \in \mathrm{Lip}_1$.

$$\begin{aligned}\int \varphi \, \mathrm{d}\mu_t^1 - \varphi \, \mathrm{d}\mu_t^2 &= \int \varphi(Z_t^{\nu_1}) \, \mathrm{d}\mu_0^1 - \int \varphi(Z_t^{\nu_2}) \, \mathrm{d}\mu_0^2 \\ &= \int \varphi(Z_t^{\nu_1}) \, \mathrm{d}\mu_0^1 - \int \varphi(Z_t^{\nu_1}) \, \mathrm{d}\mu_0^2 + \int (\varphi(Z_t^{\nu_1}) - \varphi(Z_t^{\nu_2})) \, \mathrm{d}\mu_0^2\end{aligned}$$

Il primo addendo è stimato da $D_1(\mu_0^1, \mu_0^2)$ per la costante di Lipschitz di $\varphi(Z^{\nu_1})$, che è stimata da e^{Lt} come provato precedentemente. Il secondo addendo è stimato da $\|Z_t^{\nu_1} - Z_t^{\nu_2}\|_\infty$, che abbiamo stimato nella proposizione precedente. Passando all'estremo superiore su φ si ha

$$D_1(\mu_t^1, \mu_t^2) \leq \mathrm{e}^{Lt} D_1(\mu_0^1, \mu_0^2) + L\mathrm{e}^{Lt} \int_0^t \mathrm{d}s D_1(\nu_s^1, \nu_s^2).$$

Scegliendo T tale che $\gamma = LT\mathrm{e}^{LT} < 1$ si ottiene la tesi passando all'estremo superiore in s nell'integrale temporale. □

A questo punto è semplice costruire la soluzione.

Teorema 5.4. *Sia data μ_0 misura di probabilità al tempo 0, con supporto in un compatto B_0. L'equazione di campo medio ammette un'unica soluzione debole $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ di dato iniziale μ_0 per $t \in [0, +\infty)$. La soluzione è debolmente continua nel dato iniziale.*

Dimostrazione. Sia T il tempo determinato nella precedente proposizione, e sia $\{\nu_t\}_{t=0}^T$ una famiglia di misure di probabilità a supporto in B e debolmente continua in t, con $\nu_0 = \mu_0$. Considero la mappa $\mathcal{M}$ che associata alla famiglia di misure di probabilità ν_t la famiglia di misure di probabilità $\mathcal{M}[\nu](t) = Z_t^\nu \# \mu_0$. Per quanto provato nelle proposizioni precendenti, La mappa $\mathcal{M}$ è definita da $C([0, T]; \mathcal{P}(B))$ in sé, ed è una contrazione, infatti

$$\sup_{t \in [0,T]} D_1(\mathcal{M}[\nu^1](t), \mathcal{M}[\nu^2](t)) \leq \gamma \sup_{t \in [0,T]} D_1(\nu_t^1, \nu_t^2),$$

con $\gamma < 1$. Quindi in un intorno di μ_0 esiste $\{\mu_t\}_{t \in [0,T]}$ tale che

$$\mathcal{M}[\mu](t) = \mu_t,$$

che dunque risolve l'equazione di Vlasov. L'estesione di questa soluzione a tempi arbitrari segue dal fatto che il tempo T non dipende né dalla misura iniziale, dunque la costruzione della soluzione può essere iterata in ogni intervallo $[kT, (k+1)T]$, $K \in \mathbb{N}$.
Siamo ora μ_t^1 e μ_t^2 due soluzioni, di dato iniziale μ_0^1 e μ_0^2, rispettivamente. La (19) diventa

$$\sup_{t \in [0,T]} D_1(\mu_t^1, \mu_t^2) \leq C D_1(\mu_0^1, \mu_0^2) + \gamma \sup_{t \in [0,T]} D_1(\mu_t^1, \mu_t^2)$$

da cui si ottiene

$$\sup_{t \in [0,T]} D_1(\mu_t^1, \mu_t^2) \leq \frac{C}{1-\gamma} D_1(\mu_0^1, \mu_0^2).$$

Questa espressione garantisce l'unicità e la continuità nel dato iniziale.

□

5.2 Il limite di campo medio

Teorema 5.5 (Limite di campo medio)**.**
Sia B_0 compatto, e sia μ_t la soluzione debole dell'equazione di Vlasov di dato iniziale $\mu_0 \in \mathcal{P}(B_0)$. Sia $\mathbf{z}_1^N(0) \in B_0$ dato iniziale di $\mathbf{z}_1^N(t)$ soluzione di

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{z}_i(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{G}(\mathbf{z}_i(t), \mathbf{z}_j(t)). \tag{20}$$

con dato iniziale $\mathbf{z}_1^N(0)$. Sia

$$\pi(\mathbf{z}_1^N(t)), \mathrm{d}\mathbf{z}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\mathbf{z}_i(t)}(\mathrm{d}\mathbf{z})$$

la **misura empirica** *associata. Se $\pi(\mathbf{z}_1^N(0)) \rightharpoonup \mu_0$ allora $\pi(\mathbf{z}_1^N(t)) \rightharpoonup \mu_t$.*

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulla continuità nel dato iniziale delle soluzioni deboli dell'equazione di Vlasov, dopo aver notato che la misura empirica $\pi(\mathbf{z}_1^N(t), \mathrm{d}\mathbf{z})$ è una soluzione debole dell'equazione di Vlasov. Il punto chiave è il seguente: considero il campo generato dalla misura empirica π

$$\mathcal{K}[\pi](t, \mathbf{z}) = \int \mathbf{G}(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}})\pi(\mathbf{z}_1^N(t), \mathrm{d}\mathbf{z}) = \frac{1}{N}\sum_{j} \mathbf{G}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_j(t))$$

Sia $\mathbf{Z}_t^\pi$ il flusso generato, cioè

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{Z}_t^\pi(\mathbf{z}) = \mathcal{K}[\pi](t, \mathbf{Z}_t^\pi(\mathbf{z}))$$

Si ha, evidentemente, che per ogni i

$$\mathbf{z}_i(t) = \mathbf{Z}_t^\pi(\mathbf{z}_i(0))$$

infatti queste due traiettorie soddisfano la stessa equazione differenziale con lo stesso dato iniziale. Ne segue che

$$\mathbf{Z}_t^\pi \# \pi(\mathbf{z}_1^N(0), \mathrm{d}\mathbf{z}) = \pi(\mathbf{z}_1^N(t), \mathrm{d}\mathbf{z}).$$

A questo punto, per continuità delle soluzioni deboli rispetto alla convergenza debole dei dati iniziali, si ottiene la tesi.

□

Abbiamo provato un risultato molto forte di validità dell'equazione di campo medio: se prendo dati iniziali che approssimano (debolmente) una distribuzione iniziale di probabilità, questa approssimazione vale anche al tempo t.
Si tratta però di un punto di vista completamente diverso da quello da cui siamo partiti, in cui la domanda era sulla convergenza della marginale a una particiella della soluzione dell'equazione di Liouville N particelle, a una soluzione dell'equazione di campo medio. Più in generale ci si può chiedere se, ipotizzando che $f_0^N = f_0^{\otimes N}$,

$$\lim_{N \to +\infty} f_j^N(t) = f_t^{\otimes N}$$

dove f_t risolve l'equazione di campo medio di dato iniziale f_0.
La risposta a questa domanda è positiva ed è nota da tempo, e si può ottenere come sottoprodotto del teorema precedente, ma non perlerò quest'anno.

Sunto

- L'equazione di Vlasov per una misura di probabilità consiste nel trovare una famiglia debolmente continua nel tempo che sia il push-forward del dato iniziale per un flusso determinato dal campo medio generato dalla misura stessa.
- Le ipotesi sul nucleo G garantiscono che data la famiglia di misure il campo ha la sufficiente regolarità per definire il flusso e il relativo push-forward.
- La prova di esistenza e unicità si ottiene per contrazione, e garantisce anche la continuità nel dato inziale.
- La validità dell'equazione di Vlasov si ottiene elegantemente invocando la continuità nel dato iniziale, dopo aver mostrato che la misura empirica associata al sistema di particelle risolve l'equazione di Vlasvov,