2 Il teorema del ritorno di Poincaré

Tra le principali conseguenze della conservazione della misura per il flusso di fase c'è il teorema del ritorno di Poincaré, che afferma che per un flusso a un parametro che conserva la misura, definito su una regione limitata, "quasi ogni" traiettoria ritorna arbitrariamente vicina al suo dato iniziale.

Teorema 2.1. *Teorema del ritorno I*
Sia Ω un insieme di misura limitata, e sia Φ una biezione su Ω, misurabile con inversa misurabile.
Sia A un sottoinsieme misurabile di Ω, allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq k$ tale che

$$|A \cap \Phi^n(A)| > 0$$

e dunque l'intersezione è non vuota. In particolare, esiste $\mathbf{x} \in A$ tale che $\Phi^n(\mathbf{x}) \in A$.

Dimostrazione. Definisco $\Psi = \Phi^k$. Anche Ψ è biettiva e conserva la misura (verificare). Considero la sequenza di sottoinsiemi $\{\Psi^h(A)\}_{h \geq 0}$. Se le loro intersezioni avessero misura nulla si avrebbe

$$|\Omega| \geq |\bigcup_h \Psi^h(A)| = \sum_h |\Psi^h(A)| = \sum_h |A| = +\infty$$

che è assurdo poiché Ω è limitato. Dunque esiste $h \geq 0$ ed esiste $m \geq 1$ tali che

$$\Psi^h(A) \cap \Psi^{h+m}(A) \neq \emptyset$$

e ha misura non nulla. Poiché Ψ è biettiva, ne segue che

$$A \cap \Psi^m(A) \neq \emptyset$$

In termini di Φ, questa relazione si legge

$$A \cap \Phi^{mk} \neq \emptyset$$

Scegliendo $n = mk \geq k$ si ottiene la tesi. □

Un corollario di questo teorema è il seguente. Sia $\varepsilon > 0$; dirò che $\mathbf{x}$ è un punto che $\varepsilon-$**ritorna** se per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste $n > k$ tale che $|\Phi^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \varepsilon$.

Teorema 2.2. *Teorema del ritorno II*
L'insieme dei punti che non $\varepsilon-$ritornano ha misura nulla.

Dimostrazione. Sia N_ε l'insieme dei punti che non $\varepsilon-$ritornano, cioè

$$N_\varepsilon = \{\mathbf{x} | \, |\Phi^k(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| \geq \varepsilon \text{ definitivamente in } k\} = \bigcup_{k \geq 1} N_\varepsilon^k$$

dove

$$N_\varepsilon^k = \{\mathbf{x} | \, \forall n \geq k \, |\Phi^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| \geq \varepsilon\} = \bigcap_{n \geq k} \tilde{N}_\varepsilon^n$$

con

$$\tilde{N}_\varepsilon^n = \{\mathbf{x} | \, |\Phi^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| \geq \varepsilon\}$$

$\tilde{N}^n_\varepsilon$ è misurabile perché la funzione $|\Phi^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}|$ è misurabile, e dunque sono misurabili anche N^k_ε e N_ε.
Dimostro che N^k_ε ha misura nulla. Posso ricoprire Ω con una quantità al più numerabile di palle $B_1, B_2, \dots$ di raggio $\varepsilon/2$. Sia $A = B_i \cap N^k_\varepsilon$, che è misurabile. Se per assurdo avesse misura positiva, per il teorema di Poincaré esisterebbe $n > k$ tale che $\Phi^n(A) \cap A$ avrebbe misura positiva. Ma allora esisterebbe $\mathbf{y} \in A \cap \Phi^m(A)$ che torna nello stesso insieme, in particolare $\mathbf{x} = \Psi^n(\mathbf{y}) \in A$. Ne segue

$$|\mathbf{y} - \Psi^n(\mathbf{y})| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon$$

perché $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A \subset B_i$. Questo fatto contraddice la definizione di A, che deve dunque avere misura nulla. Ma allora $B_i \cap N^k_\varepsilon$ ha misura nulla per ogni i. Usando la $\sigma-$subadditività della misura di Lebesgue

$$N^k_\varepsilon = \bigcup_i B_i \cap N^k_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |N^k_\varepsilon| \leq \sum_i |B_i \cap N^k_\varepsilon| = 0$$

Di nuovo usando la $\sigma-$subadditività

$$N_\varepsilon = \bigcup_k N^k_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |N_\varepsilon| \leq \sum_k | \cap N^k_\varepsilon| = 0$$

□

Infine, si può provare la seguente affermazione più forte. Dirò che $x \in \Omega$ **ritorna** se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \geq k \ \text{ tale che } \ |\Phi^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \varepsilon$$

Detto in parole, $\mathbf{x}$ ritorna se $\varepsilon-$ritorna per ogni ε, ovvero se la traiettoria che parte da $\mathbf{x}$ torna infinite volte arbitrariamente vicino a $\mathbf{x}$.

Teorema 2.3. *Teorema del ritorno III*
L'insieme dei punti che non ritornano ha misura nulla.

Dimostrazione. Se il punto $\mathbf{x}$ ritorna, allora $1/n$-ritorna per ogni $n \in N$ positivo. Dunque l'insieme dei punti che ritornano è l'intersezione per $n \geq 1$ degli insiemi dei punti che $1/n$-ritornano. Il complementare è l'insieme dei punti che non ritornano, ed è dunque l'unione per $n \geq 1$ dell'insieme dei punti che non $1/n$-ritornano. Poiché questi insiemi hanno misura nulla, la loro unione numerabile ha misura nulla. □

Per commenti sui paradossi del teorema del ritorno vedi le dispense di Buttà–Negrini. È da notare, comunque, che lo studio delle proprietà a tempi lunghi dei sistemi conservativi (hamiltoniani) sono l'inizio dello studio che porta alla descrizione dei sistemi mediante la Meccanica statistica (parola chiave **ipotesi ergodica**), ma non dirò nulla in merito.