Dipartimento
di Matematica

Sapienza
Università di Roma

Appunti sulla trasformata di Legendre per il corso di IFM 2024-2025

Dario Benedetto - http://brazil.mat.uniroma1.it/dario

Sapienza Università di Roma
Dipartimento di Matematica
Piazzale Aldo Moro n. 5, 00185 Roma
www.mat.uniroma1.it

Appunti sulla trasformata di Legendre 2024/2025

18 marzo 2025

Questi appunti sono sostanzialmente basati sul primo capito di H. Brezis: *Analisi funzionale. Teoria e applicazioni* Liguori 1983

1 La trasformata di Legendre

Anche se non è indispensabile, per mostrare il legame tra formalismo hamiltoniano e formalismo lagrangiano ho introdotto la trasformata di Legendre, perché è uno strumento che ha una notevole rilevanza in vari argomenti della fisica-matematica (in particolare in meccanica statistica, e più in generale nei metodi probabilistici). In questo corso mi servirà ancora per alcuni risultati delle teorie cinetiche, per questo gli dedico un'appendice dettagliata, in cui mostro anche la forte connessione che ha con la teoria delle funzioni convesse.

1.1 Funzioni convesse

Sia f una funzione da $\mathbb{R}^d$ a valori in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup +\infty$; si chiama **propria** se è finita in almeno un punto, e si chiama **dominio** di f l'insieme

$$\mathrm{dom}(f) := \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) < +\infty\}.$$

Ricordo che una funzione è **convessa** se $\forall \lambda \in [0, 1]$ e $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$:

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

È preferibile pensare le funzioni convesse definite sempre su tutto lo spazio a valori in $\overline{\mathbb{R}}$, dichiarandole infinite fuori dal loro dominio di definizione,
È di immediata verifica la validità della seguente proposizione.

Proposizione 1.1. *Se f è convessa, allora* $\mathrm{dom}(f)$ *è un convesso.*

Prova per esercizio.

Teorema 1.1 (Funzioni convesse in $\mathbb{R}^d$). *Sia $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ convessa e sia A un aperto di* $\mathrm{dom}(f)$. *Allora f è localmente lipschitziana in A.*

Per una guida alla prova vedi il foglio di esercizi es02-bis.

Tratterò funzioni convesse e trasformata di Legendre in un contesto più astratto. Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach, ricordo che $\mathcal{B}^*$ (il suo duale topologico) è lo spazio dei funzionali lineari e continui (equivalentemente funzionali limitati) su $\mathcal{B}$. Userò una notazione astratta, introdotta da Dirac per spazi di Hilbert in relazione alla meccanica quantistica, e che in analisi viene chiamagta "pairing". Sia $\varphi \in \mathcal{B}$ e sia $\mu \in \mathcal{B}^*$. L'azione di μ su φ si indica come $\langle \mu, \varphi \rangle$. Questa notazione "bra-ket" serve a tenere distinti con chiarezza gli elementi di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^*$ anche nei casi in cui sono indentificabili, come accade per spazi euclidei o spazi di Hilbert; per esempio in $\mathbb{R}^d$ si può pensare a φ come un vettore colonna, e a $\mu \in (\mathbb{R}^d)^*$ come a un vettore riga. Ricordo anche che l'operazione $\mu \to \langle \mu, \varphi \rangle$ definisce un funzionale lineare continuo su $\mathcal{B}^*$, e dunque $\mathcal{B}$ si indentifica con un sottospazio di $\mathcal{B}^{**}$.

Sia $F : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$, una funzione propria; si chiama **epigrafico** di F il sottoinsieme di $\mathcal{B} \times \mathbb{R}$ dato da

$$\mathrm{epi}(F) = \{(\varphi, a) |\, a \geq F(\varphi)\},$$

(si noti che se $(\varphi, a) \in \mathrm{epi}(F)$ allora $\varphi \in \mathrm{dom}(F)$). Per ispezione diretta si mostra facilmente che vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.2 (Funzioni convesse e epigrafico)**.**
F è convessa se e solo se $\mathrm{epi}(F)$ *è un convesso*

Dimostrazione da inserire, ma fatta a lezione.

1.2 Funzioni semi continue inferiori

In analisi, il "teorema ponte" in $\mathbb{R}^d$ assicura l'equivalenza tra continuità e continuità per successioni. Questa equivalenza non è in generale vera.
Do qualche definizione a questo proposito. Un sottoinsieme C di uno spazio topologico $(\mathcal{X}, \tau)$ ($\mathcal{X}$ è un insieme, τ è la topologia) è **sequenzialmente chiuso** se e solo ogni successione convergente di elementi di C converge a un elemento di C. È facile mostrare che i chiusi sono chiusi per successioni, infatti se C e chiuso, $x_n \in C$, e $x_n \to x$, se $x \notin C$, x_n non può convergere a x perché il complementare C^c di C è un aperto che contiene x e $x_n \notin C^c$ per ogni n.
In generale non è vero il viceversa. Uno spazio topologico è detto **sequenziale** se i suoi chiusi sono esattamente i sottoinsiemi chiusi per successione.
Sia $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$; f è detta **sequenzialmente continua** se e solo se per ogni successione $x_n \in \mathcal{X}$ convergente si ha $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

Proposizione 1.3. *Se $\mathcal{X}$ è sequenziale, f è continua se e solo se è sequenzialmente continua.*

Dimostrazione. È un fatto generale che ogni funzione continua è sequenzialmente continua (prova per esercizio). Mostro il viceversa. Considero la controimmagine $f^{-1}(K)$ di un chiuso K di $\mathcal{Y}$. Sia x_n una sequenza, convergente a un qualche x, di elementi di $f^{-1}(K)$. Allora $f(x_n) \in K$, e per ipotesi $f(x_n) \to f(x)$. Ma K è un chiuso dunque è sequenzialmente chiuso, e quindi $x \in f^{-1}(K)$. Ne segue che $f^{-1}(K)$ è sequenzialmente chiuso, e dunque, per l'ipotesi di sequenzialità di $\mathcal{X}$, è chiuso. Ho così dimostrato che la controimmagine di un chiuso è un chiuso, cioè che f è continua. □

Proposizione 1.4. *Gli spazi metrici sono sequenziali.*

Dimostrazione. Sia C un sottoinsieme sequenzialmente chiuso. Suppongo per assurdo che non sia chiuso, cioè che C^c non sia aperto. Ne segue che esiste $x \in C^c$ tale che ogni aperto che contiene x ha intersezione non vuota con C. Scegliendo come aperti le palle $B_{1/n}(x)$ si trova una successione $x_n \in B_{1/n}(x) \cap C$, che per come è definita converge a $x \notin C$, contro l'ipotesi che C sia sequenzialmente chiuso. Si osservi che quello che realmente è servito è l'esistenza di una base numerabile di intorni; questa dimostrazione si estende infatti agli spazi che soddisfano il primo assioma di numerabilità. □

Ricordo che la topologia della semicontinuità inferiore su $\mathbb{R}$ è quella che ha come aperti le sole semirette $(b, +\infty)$, con $b \in \mathbb{R}$. Una funzione da uno spazio topologico $\mathcal{X}$ a valori in $\mathbb{R}$ è **semicontinua inferiore** (scrittura che abbrevierò in "s.c.i.") se la controimmagine di $(b, +\infty)$ è aperta per ogni $b \in \mathbb{R}$, cioè se è continua rispetto alla topologia della semicontinuità inferiore. Se lo spazio $\mathcal{X}$ è sequenziale, f è s.c.i. se e solo se è sequenzialmente s.c.i.. Provare per esercizio che la s.c.i. sequenziale equivale al fatto che per ogni successione convergente $x_n \to x$ vale $f(x) \leq \underline{\lim}_n f(x_n)$.

Proposizione 1.5 (Funzioni s.c.i. e epigrafico)**.**
$F : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ è s.c.i. se e solo se $\mathrm{epi}(F)$ *è chiuso.*

Dimostrazione. $\mathcal{B}$ è uno spazio metrico, dunque è sufficiente mostrare che F è sequenzialmente s.c.i. se e solo se $\mathrm{epi}(F)$ è sequenzialmente chiuso.
Sia $\mathrm{epi}(F)$ chiuso, e sia $\varphi_n \to \varphi$, con $F(\varphi_n) < +\infty$. Passando a un'opportuna sottosequenza, posso assumere che $F(\varphi_n)$ converga al valore $\underline{\lim}\, \varphi_n$. Poiché $(\varphi_n, F(\varphi_n))$ è nell'epigrafico che è chiuso, $(\varphi, \underline{\lim}\, F(\varphi_n))$ è nell'epigrafico e dunque $F(\varphi) \leq \underline{\lim}\, F(\varphi_n)$.
Viceversa sia $\mathrm{epi}(F) \ni (\varphi_n, a_n) \to (\varphi, a)$. Passando al limite la relazione $F(\varphi_n) \leq a_n$, per semicontinuità inferiore si ottiene $F(\varphi) \leq a$ e dunque $(\varphi, a) \in \mathrm{epi}(F)$. □

Osservo che il vero contenuto di questa proposizione è proprio il fatto che la s.c.i. sequenziale è equivalente alla chiusura sequenziale dell'epigrafico; tornerò su questa osservazione a fine del paragrafo, e questo fatto è vero qualunque sia la topologia che consideriamo su $\mathcal{B}$.

Convessità e s.c.i. si conservano nel passaggio al sup, come è facile dimostrare.

Proposizione 1.6. *Sia I un insieme di indici (di cardinalità qualunque), e siano date delle funzioni $F_i : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$. Sia*

$$F(\varphi) = \sup_{i \in I} F_i(\varphi).$$

Allora

$$\mathrm{epi}(F) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{epi}(F_i).$$

Come conseguenza, se le F_i sono s.c.i. allora F è s.c.i. (perché l'intersezione di chiusi è un chiuso), e se le F_i sono convesse allora F è covessa (perché l'intersezione di convessi è un convesso).

Dimostrazione per esercizio.

1.3 La trasformata di Legendre

Definisco ora la trasformata di Legendre. Data F propria,

$$F^*(\mu) = \sup_{\varphi \in \mathcal{B}} \big(\langle \mu, \varphi \rangle - F(\varphi) \big),$$

che è un funzionale su $\mathcal{B}^*$. Per la proposizione precedente, $F^*(\mu)$ è convesso e s.c.i.. Analogamente, data $F^*(\mu)$ in $\mathcal{B}^*$ propria, si definisce $F^{**} : \mathcal{B}^* \to \overline{\mathbb{R}}$ come

$$F^{**}(\varphi) = \sup_{\mu \in \mathcal{B}^*} \big(\langle \mu, \varphi \rangle - F^*(\mu) \big)$$

(Si noti che questa definzione non è esattamente come quella di prima, perché F^{**} viene definita su $\mathcal{B}$ e non su $\mathcal{B}^{**}$). Dalla definizione seque la sequente importante disuguaglianza.

Teorema 1.2 (Disuguaglianza di Young)**.** *Per ogni $\varphi \in \mathcal{B}$ e $\mu \in \mathcal{B}^*$ si ha*

$$\langle \mu, \varphi \rangle \leq F(\varphi) + F^*(\mu)$$
$$\langle \mu, \varphi \rangle \leq F^{**}(\varphi) + F^*(\mu)$$

Indago ora sulla relazione tra F^{**} e F. Osservo immediatamnte che dalla disuguaglianza di Young si ottiene che $F^{**} \leq F$.
Mi serviranno due lemmi, la cui prova lascio per esercizio.

Lemma 1.1.
Se $F \leq G$ allora $F^* \geq G^*$.
Se $F^* \leq G^*$ allora $F^{**} \geq G^{**}$.

Lemma 1.2.
Sia $\mu_0 \in \mathcal{B}^*$ e $b_0 \in \mathbb{R}$, e sia $L_{\mu_0,b_0}(\varphi) = \langle \mu_0, \varphi \rangle + b_0$. Allora

$$L^*_{\mu_0,b_0}(\mu) = \begin{cases} -b_0 & \text{se } \mu = \mu_0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre

$$L^{**}_{\mu_0,b_0} = L_{\mu_0,b_0}.$$

Ricordo ora la definizione di inviluppo convesso. Sia $F : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ propria. Il suo inviluppo convesso è

$$F^c(\varphi) = \sup_{(\mu,b) \in A_F} \langle \mu, \varphi \rangle + b,$$

dove

$$A_F = \{(\mu, b) \in \mathcal{B}^* \times \mathbb{R} : \forall \psi \, \langle \mu, \psi \rangle + b \leq F(\psi)\}.$$

Proposizione 1.7. $F^c = F^{**}$

Dimostrazione. Suppongo che A_F è non vuoto, se no F^c non è definita (si noti che se A_F è vuoto allora F^* coincide con $+\infty$, dunque neanche F^{**} è definita, oppure F^{**} si può considerare $-\infty$, come anche F^c). Sia $(\mu, b) \in A_F$. Per ogni φ

$$\langle \mu, \psi \rangle + b \leq F(\psi).$$

Passando alla doppia trasformata entrambi i membri, usando i due lemmi, ottengo

$$\langle \mu, \psi \rangle + b \leq F^{**}(\psi),$$

dunque, passando al sup su A_F, ottengo che $F^c \leq F^{**}$.
Per la disuguaglianza di Young, per ogni $\mu \in \mathcal{B}^*$, $(\mu, -F^*(\mu)) \in A_F$, dunque

$$F^c(\varphi) \geq \sup_{\mu \in \mathcal{B}^*} \big(\langle \mu, \varphi \rangle - F^*(\mu) \big) = F^{**}(\varphi).$$

□

Teorema 1.3 (Fenchel-Moreau)**.** *F è convessa e s.c.i. se e solo se $F = F^{**}$*

Dimostrazione. Abbiamo già provato che F^{**} è convessa e s.c.i.. Proviamo il viceversa. Sia F convessa e s.c.i.; il suo epigrafico è dunque un convesso chiuso. Supponiamo che esista ψ tale che $F^{**}(\psi) < F(\psi)$. Per la seconda forma geometrica del teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale lineare continuo su $\mathcal{B} \times \mathbb{R}$ che separa il punto $(\psi, F^{**}(\psi))$ dall'epigrafico, cioè esistono $\mu \in \mathcal{B}^*$, $k, c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ tale che

$$\begin{aligned} &- \langle \mu, \psi \rangle + kF^{**}(\psi) \leq c - \varepsilon \\ &- \langle \mu, \varphi \rangle + ka \geq c + \varepsilon, \ \forall (\varphi, a) \in \mathrm{epi}(F). \end{aligned}$$

Si noti che deve essere $k \geq 0$, se no la seconda relazione porterebbe ad un assurdo, potendo prendere a arbitrariamente grande. Ora si devono distinguere vari casi.
Caso $k > 0$.
Scegliendo $a = F(\varphi)$, con $\varphi \in \mathrm{dom}(F)$, nella seconda relazione, si ha che per ogni $\varphi \in \mathrm{dom}(F)$ vale $-\langle \mu, \varphi \rangle + kF(\varphi) > c + \varepsilon$. Poiché $k > 0$, si ottiene

$$\langle \mu/k, \varphi \rangle + (c + \varepsilon)/k < F(\varphi)$$

Questa relazione è vera anche se φ non è nel dominio, dunque posso passare alla doppia trasformata e ottenere

$$\langle \mu/k, \varphi \rangle + (c + \varepsilon)/k \leq F^{**}(\varphi)$$

per ogni φ. Ne segue

$$-\langle \mu, \varphi \rangle + kF^{**}(\varphi) \geq c + \varepsilon$$

che per $\varphi = \psi$ è falso.

Caso $k = 0$ e $F \geq 0$. Si ha $\langle \mu, \psi \rangle \leq c - \varepsilon$ e $\langle \mu, \phi \rangle \geq c + \varepsilon$ per ogni $\varphi \in \mathrm{dom}(F)$. Purtroppo non è noto se $\psi \in \mathrm{dom}(F)$ dunque per ottenere una contraddizione si deve lavorare un po'. Poichè $F^{**}(\psi)$ è finito, esiste δ sufficientemente piccolo tale che $-\langle \mu, \psi \rangle + \delta F^{**}(\psi) \leq c$. Inoltre, per l'ipotesi di positività di F, per ogni $\varphi \in \mathrm{dom}(F)$ si ha $-\langle \mu, \varphi \rangle + \delta F(\varphi) \geq c + \varepsilon$. Ci siamo così ricondotti al caso $k > 0$ già trattato.

Caso generale. I due casi procedenti concludono il teorema nel caso di F positiva. Sia ora F generale. Per ipotesi F è finita in almeno un punto φ_0, dunque $(\varphi_0, \lambda) \notin \mathrm{epi}(F)$ per $\lambda < F(\varphi_0)$. Sempre per Hahn-Banch, esite $(\bar{\mu}, k) \in \mathcal{B}^* \times \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ tali che

$$\begin{aligned} &- \langle \bar{\mu}, \varphi_0 \rangle + k\lambda \leq c - \varepsilon \\ &- \langle \bar{\mu}, \varphi \rangle + kF(\varphi) \geq c + \varepsilon, \quad \forall \varphi \in \mathrm{dom}(F) \end{aligned}$$

Poichè $\varphi_0 \in \mathrm{dom}(F)$, $kF(\varphi_0) > k\lambda$, dunque $k > 0$, perché $\lambda < F(\varphi_0)$. Abbiamo così trovato $\mu_0 = \bar{\mu}/k$ e $b_0 = (c + \varepsilon)/k$, tale che

$$L_{\mu_0, b_0}(\varphi) \leq F(\varphi).$$

La funzione $F(\varphi) - L_{\mu_0, b_0}(\varphi)$, che è convessa e s.c.i., è positiva e dunque

$$F - L_{\mu_0, b_0} = (F - L_{\mu_0, b_0})^{**} = (F - L_{\mu_0, b_0})^c.$$

Troviamo l'inviluppo convesso:

$$(F - L_{\mu_0, b_0})^c(\varphi) = \sup_{(\mu, b) \in A_{F - L_{\mu_0, b_0}}} \langle \mu, \varphi \rangle + b = -L_{\mu_0, b_0}(\varphi) + \sup_{(\mu, b) \in A_{F - L_{\mu_0, b_0}}} \langle (\mu + \mu_0), \varphi \rangle + b + b_0$$

È immediato verificare che $(\mu, b) \in A_{F-L_{\mu_0,b_0}}$ se e solo se $(\mu+\mu_0, b+b_0) \in A_F$; quindi

$$(F - L_{\mu_0,b_0})^c(\varphi) = -L_{\mu_0,b_0}(\varphi) + F^c = -L_{\mu_0,b_0}(\varphi) + F^{**}.$$

□

Sarà utile conoscere delle proprietà della trasformata di Legendre rispetto alla convergenza debole. Ricordo che su $\mathcal{B}$ si definisce la topologia debole come la minima topologia che rende continua l'azione degli elementi di $\mathcal{B}^*$ su $\mathcal{B}$. Questa topologia contiene come aperti tutte le controimmagini di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ dell'applicazione lineare $\varphi \to \langle \mu, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$, al variare di $\mu \in \mathcal{B}^*$. Dunque per ogni a reale e per ogni μ, i semispazi "aperti" $\{\varphi | \, \langle \mu, \varphi \rangle < a\}$ e $\{\varphi | \, \langle \mu, \varphi \rangle > a\}$ sono aperti della topologia debole. Una base di aperti della topologia debole è data da intersezioni finite di questi semispazi. Si noti che $\{\varphi | \langle \mu, \varphi \rangle \leq a\}$ e $\{\varphi | \langle \mu, \varphi \rangle \geq a\}$ sono invece insiemi chiusi della topologia debole. Una sequenza $\varphi_n \in \mathcal{B}$ converge a $\varphi \in \mathcal{B}$ in questa topologia se e solo se per ogni $\mu \in \mathcal{B}^*$ si ha

$$\langle \mu, \varphi_n \rangle \to \langle \mu, \varphi \rangle.$$

La convergenza debole si indica con il simbolo $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$. Ricordo che la convergenza nella norma di $\mathcal{B}$ implica la convergenza debole, ma non vale il viceversa.

Proposizione 1.8. *Sia C un convesso di un Banach. Allora C è chiuso per la topologia forte se e solo se è sequenzialmente chiuso per la topologia debole.*

Dimostrazione. Se C non è chiuso per la topologia forte, esiste una successione in C che converge fortemente (e dunque debolmente) a un elemento fuori di C, che dunque non è neanche sequenzialmente debolmente chiuso. Questo prova, in generale, che se C è sequenzialmente chiuso nella topologia debole, è chiuso nella topologia forte. Per i convessi vale anche il viceversa. Sia C è un convesso chiuso e supponiamo che non sia sequenzialmente debolemente chiuso. Dunque esiste $C \ni \psi_n \rightharpoonup \psi \notin C$. Per Hahn-Bamach, esiste un $\mu \in \mathcal{B}^*$ e un $c \in \mathbb{R}$ tale che $\langle \mu, \psi \rangle < c$, mentre per tutti gli elementi $\varphi \in C$ si ha che $\langle \mu, \varphi \rangle > c$. In particolare, $\langle \mu, \psi_n \rangle > c$. Ma allora è impossibile che $\langle \mu, \psi_n \rangle$ converga a $\langle \mu, \psi \rangle$, in contrasto con l'ipotesi di convergenza debole sequenziale. □

Come conseguenza immediata si ottiene il seguente risultato.

Teorema 1.4. *F è convessa e sequenzialmente debolmente s.c.i. se e solo se $F = F^{**}$*

Dimostrazione. F è convessa e sequenzialmente debolmente s.c.i. se e solo se epi(F) è convesso e sequenzialmente debolmente chiuso, come abbiamo provato precedentemente. Per la proposizione precedente, questo fatto è vero se e solo se epi(F) è convesso e chiuso per la topologia indotta dalla metrica, e quindi se e solo se F è convessa e s.c.i. Ma quest'ultima asserzione è vera se e solo se $F = F^{**}$.

□

Osservazione finale: per provare questo teorema serve quello precedente per lo spazio $\mathcal{B} \times \mathbb{R}$. Va verificato che $(\varphi_n, a_n) \rightharpoonup (\varphi, a)$ se e solo se $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ e $a_n \to a$. Lascio ai lettori i restanti dettagli.