

DIPARTIMENTO  
DI MATEMATICA



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# Appunti su spazi di Hilbert, operatori, potenziali IFM anno 2023-2024

© 2024 di Dario Benedetto con licenza attribuzione - non commerciale  
- condividi allo stesso modo 4.0 internazionale CC BY-NC-SA 4.0



Dario Benedetto - <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario>

Sapienza Università di Roma  
Dipartimento di Matematica  
Piazzale Aldo Moro n. 5, 00185 Roma  
[www.mat.uniroma1.it](http://www.mat.uniroma1.it)

# IFM: appunti su spazi di Hilbert, operatori, potenziali 2023/2024

20 febbraio 2024

## Indice

<b>Fonti</b>	<b>5</b>
<b>1 Problemi di Sturm-Liouville</b>	<b>6</b>
1.1 Lagrangiane . . . . .	6
1.2 Condizioni al contorno . . . . .	7
1.3 La separazione delle variabili e il problema agli autovalori . . . . .	8
<b>2 Spazi di Hilbert</b>	<b>11</b>
2.1 Prodotto hermitiano . . . . .	11
2.2 Sottospazi ortogonali e proiezioni ortogonali . . . . .	12
2.3 Sistemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel, basi ortonormali . . . . .	16
2.4 La serie di Fourier . . . . .	18
2.5 Basi in $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . . . . .	21
<b>3 Polinomi di Legendre</b>	<b>23</b>
3.1 Basi di polinomi . . . . .	23
3.2 I polinomi di Legendre $G_n$ . . . . .	23
3.3 L'equazione di Sturm-Liouville per $G_n$ . . . . .	25
3.4 Zeri di $G_n$ . . . . .	26
<b>4 Altre basi di polinomi</b>	<b>27</b>
4.1 Spazi pesati $L_w^2$ . . . . .	27
4.2 Polinomi di Tchebyshev . . . . .	28
4.3 Polinomi di Hermite . . . . .	29
4.4 L'equazione di Sturm-Liouville per i polinomi di Hermite . . . . .	30
4.5 Polinomi di Laguerre . . . . .	31
4.6 L'equazione di Sturm-Liouville per i polinomi di Laguerre . . . . .	32
4.7 Funzioni generalizzate di Legendre . . . . .	33
4.8 Funzioni generalizzate di Laguerre . . . . .	34

<b>5</b>	<b>Armoniche sferiche</b>	<b>35</b>
5.1	Il laplaciano in coordinate generalizzate . . . . .	35
5.2	$\Delta$ in coordinate sferiche e $\Delta_{S^2}$ . . . . .	36
5.3	Le armoniche sferiche . . . . .	37
5.4	Funzione generatrice per i polinomi di Legendre . . . . .	39
5.5	Espansione in multipoli del potenziale . . . . .	40
5.6	Espansione in armoniche sferiche . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Operatori limitati</b>	<b>44</b>
6.1	Operatori illimitati . . . . .	46
6.2	$\ell_2(\mathbb{R})$ e $\ell_2(\mathbb{C})$ . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Trasformata di Fourier</b>	<b>50</b>
7.1	La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	50
7.2	La trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	51
7.3	Completezza dei polinomi di Hermite e di Laguerre . . . . .	52
<b>8</b>	<b>Operatori da <math>H</math> in sé</b>	<b>54</b>
8.1	Teorema di rappresentazione di Riesz . . . . .	54
8.2	Operatore aggiunto . . . . .	55
<b>9</b>	<b>I teoremi dell'alternativa per operatori di rango finito</b>	<b>58</b>
9.1	Lo shift su $\ell_2(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ . . . . .	58
9.2	Operatori di rango finito . . . . .	61
9.3	$I - T$ con $T$ di rango finito . . . . .	62
9.4	Equazioni integrali di Fredholm per nuclei separabili . . . . .	63
9.5	Piccole perturbazioni . . . . .	66
9.6	Operatori piccoli e serie di Neumann . . . . .	66
9.7	Equazioni integrali di Volterra . . . . .	67
9.8	Convergenza debole . . . . .	70
9.9	Successioni di operatori . . . . .	74
<b>10</b>	<b>Operatori compatti</b>	<b>76</b>
10.1	Operatori compatti . . . . .	76
10.2	Risolvente e spettro . . . . .	81
10.3	Spettro degli operatori autoaggiunti . . . . .	84
10.4	Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti . . . . .	87
<b>11</b>	<b>Lo spettro della trasformata di Fourier</b>	<b>91</b>
<b>12</b>	<b>Introduzione agli operatori illimitati</b>	<b>95</b>
12.1	Dominio, estensioni, aggiunto . . . . .	95
12.2	Operatori chiusi . . . . .	96
<b>13</b>	<b>Il problema di Poisson</b>	<b>100</b>
13.1	Il problema di Poisson-Neumann in $[a, b]$ . . . . .	101
13.2	Il problema di Poisson-Dirichlet in $[a, b]$ . . . . .	103
13.3	Il Problema di Poisson in $\Omega$ . . . . .	106
13.4	Il problema di Poisson-Neumann in $\Omega$ . . . . .	108

13.5	Le costanti ottimali per le disuguaglianze di Poincaré . . . . .	110
<b>14</b>	<b>Il problema di Laplace</b>	<b>112</b>
14.1	La funzione di Green e il potenziale di volume . . . . .	112
14.2	Dipoli . . . . .	119
14.3	I potenziali di singolo e doppio strato . . . . .	121
14.4	Discontinuità dei potenziali singolari . . . . .	124
14.5	L'operatore $K$ . . . . .	129
14.6	Il problema di Laplace - Dirichlet interno . . . . .	137
14.7	Il problema di Laplace-Neumann . . . . .	140
14.8	Conduttori . . . . .	142

# Fonti

Testi e dispense varie

- CH Courant, Hilbert: Methods of Mathematical Physics
- RS Reed, Simon: Methods of modern mathematical physics, vol I, Functional Analysis
- KF Kolmogorov, Fomin: Elementi di teoria delle funzioni e analisi funzionale
- LL Lieb, Loss: Analysis (AMS-GSM vol 14)
- 
- S Salsa: Equazioni alle derivate parziali
- 
- G Garroni: note del corso di Istituzioni di Analisi Superiore 2016  
<http://www1.mat.uniroma1.it/people/garroni/Note-IAS-16-17.pdf>
- P Pulvirenti: note del corso di Istituzioni di Fisica Matematica 2015-16  
[http://www1.mat.uniroma1.it/people/pulvirenti/didattica/IFMat\\_2016.pdf](http://www1.mat.uniroma1.it/people/pulvirenti/didattica/IFMat_2016.pdf)
- T Teta; Brief Review on Hamiltonian Mechanics and Electromagnetism.pdf  
che trovate su  
<https://sites.google.com/site/sandroprova/didattica-1/appunti-ed-esercizi>
- B Buttà: note del corso di Fisica-Matematica  
[http://www1.mat.uniroma1.it/~butta/didattica/note\\_FM.pdf](http://www1.mat.uniroma1.it/~butta/didattica/note_FM.pdf)
- FM Benedetto: note aggiuntive per Fisica-Matematica 2015-2016  
<http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/FM2015//NoteAggiuntive/note15.pdf>
- IFM Benedetto: appunti di IFM 2019-2020 (queste note)  
<http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/FM2019/ifm19.pdf>

# 1 Problemi di Sturm-Liouville

Vedi [S] pag. 357, [CH] pp 291-292, fino formula (19), e *vedi anche* gli esercizi del primo paragrafo in [FM].

## 1.1 Lagrangiane

Consideriamo una corda che può vibrare nella direzione verticale, che indichiamo con  $u(x, t)$ , e di estremi 0 e  $L$ . Sia  $\rho(x) > 0$  la sua densità di massa, Ipotizziamo inoltre che la corda sia soggetta ad una forza  $f(x)$  costante nello spostamento, ma dipendente da  $x$  (nel caso della gravità  $f(x) = -g$ ), e da un richiamo elastico verso  $u = 0$  di coefficiente di elasticità  $k(x)$ . Il sistema così descritto ha energia cinetica

$$\frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) (\partial_t u(x, t))^2 dx$$

L'energia potenziale della forza esterna  $f$  è

$$- \int_0^L f(x) u(x, t) dx$$

quella del richiamo elastico è

$$\frac{1}{2} \int_0^L k(x) u^2(x, t) dx$$

Nella modellizzazione delle corde vibranti, l'energia potenziale dovuta all'elasticità viene ottenuta ipotizzando la sua dipendenza lineare dalla lunghezza complessiva della corda; assegnata la tensione  $\tau$  agli estremi, tale energia potenziale è

$$\tau \int_0^L \sqrt{1 + (\partial_x u(x, t))^2}$$

Una eventuale disomogeneità della corda implicherà differenti contributi all'energia di differenti tratti, dunque generalizziamo questa espressione in

$$\int_0^L \tau(x) \sqrt{1 + (\partial_x u(x, t))^2}$$

Nella descrizione dei moti di una corda vibrante si assume la piccolezza degli spostamenti intorno all'equilibrio  $u = 0$ , che consente di approssimare le equazioni al primo ordine. Ricordo che approssimare le equazioni al primo ordine equivale a considerare l'approssimazione quadratica della lagrangiana (come esempio potete rifarvi alla teoria delle piccole oscillazioni intorno a un equilibrio, in cui sviluppate al secondo ordine energia cinetica ed energia potenziale, e ottenete delle equazioni di oscillatori accoppiati).

Dunque considereremo l'approssimazione quadratica del termine di energia elastica, ottenendo

$$\frac{1}{2} \int_0^L \tau(x) \partial_x u(x, t)^2$$

Avere individuato tutti i termini dell'energia permette di scrivere la lagrangiana del sistema che è

$$L = L[u, \dot{u}, u'] = \int_0^L dx \left( \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 - \frac{\tau}{2} u'^2 - \frac{k}{2} u^2 + fu \right) \quad (1.1)$$

Calcoliamo la variazione prima dell'azione, cioè

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} A[u + \varepsilon\delta u] = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_0^T dt \int_0^L dx L[u + \varepsilon\delta u, u' + \varepsilon\delta u']$$

Derivando sotto segno di integrale e integrando per parti nel tempo, ipotizzando come sempre variazioni nulle per  $t = 0$  e  $t = T$ , si ottiene

$$\delta A = \int_0^T dt \int_0^L dx [-\rho\ddot{u}\delta u - \tau u'\delta u' - ku\delta u + f\delta u]$$

L'ultimo passaggio importante da compiere è l'integrazione per parti per spostare la derivata spaziale da  $\delta u'$ :

$$\delta A = \int_0^T dt \left[ -\tau u'\delta u \Big|_{x=0}^{x=L} + \int_0^L dx \delta u (-\rho\ddot{u} + (\tau u')' - ku + f) \right]$$

Fissando  $u$  agli estremi  $u(0, t) = u_-$  e  $u(L, t) = u_+$  (condizioni di Dirichlet), il termine di bordo nello spazio si annulla, infatti deve essere  $\delta u(x, t) = 0$  se  $x = 0, L$ .

Dunque, imponendo la stazionarietà dell'azione, cioè che  $\delta A$  sia nulla per ogni scelta di  $\delta u$ , si ottengono le equazioni del moto

$$\rho \partial_t^2 u = \partial_x(\tau \partial_x u) - ku + f \quad (1.2)$$

## 1.2 Condizioni al contorno

Si noti che imporre condizioni non omogenee o anche dipendenti dal tempo, cioè  $u(0, t) = \bar{u}_-(t)$  e  $u(L, t) = \bar{u}_+(t)$  non modifica l'equazione del moto. Infatti il calcolo della variazione prima non cambia, vale sempre  $\delta u(0, t) = 0$  e  $\delta u(L, t) = 0$ .

Si hanno condizioni al contorno differenti se si assume l'esistenza di forze che agiscono al bordo (invece le condizioni di Dirichlet implicano solo l'esistenza di reazioni vincolari al bordo). Consideriamo dei termini di energia potenziale al bordo, dati da  $U_-(u(0, t)) + U_+(u(L, t))$ , che sono le energie potenziali di due forze che agiscono su  $u$  nei punti  $x = 0$  e  $x = L$ .

In questo caso i termini al bordo della variazione dell'azione diventano

$$-\tau(L)u'(L, t)\delta u(L, t) + \tau(0)u'(0, t)\delta u(0, t) - U'_-(u(L, t))\delta u(L, t) - U'_+(u(0, t))\delta u(0, t)$$

(lascio i dettagli al lettore), mentre il termine integrale è lo stesso. Imponendo  $\delta A = 0$  per ogni  $\delta u(x, t)$  nulla in  $x = 0$  e  $x = L$ , si ottengono le equazioni del moto. Però vanno annullati anche i termini di bordo. Se non si fissa  $u$  al bordo, le funzioni  $\delta u(0, t)$  e  $\delta u(L, t)$  sono arbitrarie, dunque l'azione è nulla se

$$-U'_-(u(0, t)) = \tau(0) \partial_x u(0, t), \quad -U'_+(u(L, t)) = -\tau(L) \partial_x u(L, t)$$

Nota che questa espressione indica che  $\tau(x)u'(x, t)$  con  $x = 0, L$  è la forza agli estremi esercitata dalla corda, che deve uguagliare quella esterna<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Più correttamente,  $\tau(x)u'(x, t)$  è una "tensione", analogo unidimensionale della pressione. In un fluido, su una superficie  $\Sigma$  di normale  $\mathbf{n}$  il fluido esercita, attraverso la pressione  $p$ , la forza  $-p\Sigma\mathbf{n}$ . Dato il verso  $\mathbf{n}$  parallelo alla corda in  $x$ , la corda esercita una forza  $-\tau u'\mathbf{n}$ , che cambia segno con  $\mathbf{n}$ . Per questo motivo, all'estremo sinistro la forza che esercita la corda è  $\tau u'$ , mentre all'estremo destro è  $-\tau u'$ .

L'ipotesi che abbiamo fatto sulle forze al bordo ci ha dato condizioni generali, anche non lineari, dunque fuori dalla teoria delle piccole oscillazioni. Però, in assenza delle energie potenziali  $U_-$  e  $U_+$ , si hanno le condizioni di Neumann omogenee  $u' = 0$ , che indicano appunto l'assenza di forze al bordo.

Ipotizzando che le forze al bordo siano costanti, cioè che le energie potenziali siano lineari,  $U_-(u) = g_-u$  e  $U_+(u) = g_+u$  si ottengono le usuali condizioni di Neumann non omogenee. Se invece consideriamo forze lineari, cioè energie potenziali quadratiche,  $U_-(u) = k_-u^2/2$  e  $U_+(u) = k_+u^2/2$ , con  $k_-, k_+ > 0$ , si ottengono condizioni lineari omogenee dette condizioni di Robin

$$\tau(0) \partial_x u(0, t) = -k_- u(0, t), \quad \tau(L) \partial_x u(L, t) = +k_+ u(L, t)$$

### 1.3 La separazione delle variabili e il problema agli autovalori

Considera l'equazione che hai ottenuto nel punto precedente in assenza della forza esterna  $f$ :

$$\rho \partial_t^2 u = \partial_x(\tau \partial_x u) - ku$$

Cerchiamo una soluzione per separazione di variabili  $u(x, t) = A(t)B(x)$ . Ottieni

$$\rho \ddot{A}B = A(\partial_x(\tau \partial_x B) - kB)$$

che può avere soluzioni solo se

$$\ddot{A}/A = \lambda$$

è una costante, e in tal caso

$$\partial_x(\tau(x) \partial_x B(x)) - k(x)B(x) = \lambda \rho(x)B(x) \quad (1.3)$$

L'equazione per  $A$  ha soluzioni  $e^{i\omega t}$ , con pulsazione  $\omega = \sqrt{-\lambda}$  se  $\lambda$  è negativo. La corrispondente soluzione in  $B$  è la forma spaziale dell'oscillazione che produce l'andamento armonico temporale di pulsazione  $\omega$  (in pratica un suono di frequenza  $\omega/(2\pi)$ ).

Nel caso di  $\rho$ ,  $\tau$  e  $k$  indipendenti da  $x$ ,  $B(x)$  risulta essere una oscillazione armonico, e imponendo le condizioni al contorno si trova una sequenza numerabile di possibili valori di  $\lambda$ . Queste soluzioni  $B(x)$  sono le "armoniche" del sistema.

Nel caso generale si tratta di risolvere il problema agli autovalori, dato dall'equazione (1.3), detto **problema di Sturm-Liouville**, in cui  $B(x)$  e  $\lambda$  sono le incognite. Anche in questo ci aspettiamo, assegnate le condizioni al bordo, un'infinità numerabile di autovalori. Dimostrare questo fatto richiede un po' di analisi funzionale (spazi di Hilbert, basi, operatori, diagonalizzazione degli operatori compatti).

#### *Esercizio 1. Il minimo dell'energia - I*

Considera la sola energia potenziale

$$U = \int_0^L \left( \frac{1}{2} \tau (u')^2 + \frac{1}{2} k u^2 - f u \right)$$

nel caso di condizioni di Dirichlet o Neumann omogenee. Nota che è un funzionale limitato dal basso, dunque ha senso chiedersi qual è il suo minimo.

Qual è l'equazione che deve soddisfare  $u$  che realizza il minimo?



### *Esercizio 2. Il minimo dell'energia - II*

Supponi ora  $f$  nulla. Moltiplica per  $u(x)$  l'equazione e integrando, dimostra che il minimo è raggiunto solo per  $u = 0$ .

Osserva che se  $k \equiv 0$ , nel caso di condizioni di Neumann omogenee esistono soluzioni non banali.

Scrivi l'energia nel caso di condizioni di Robin e mostra che anche in questo caso esistono soluzioni non banali solo se  $k = 0 = k_{\pm}$ .

### *Esercizio 3. Energia e autovalori*

Uno dei tipici problemi della meccanica quantistica, è la ricerca dello **stato fondamentale** di un sistema, cioè quello di energia minima (che corrisponde, in meccanica classica, a uno stato di equilibrio stabile). Però in meccanica quantistica lo stato fisico di un sistema è descritto dalla **funzione d'onda**, che è una funzione di  $L^2$  con norma pari ad 1. Dunque il minimo dell'energia va cercato non tra le funzioni qualunque ma tra quelle con norma  $L^2$  unitaria. Anticipo inoltre che un termine del tipo  $\frac{1}{2}(u')^2$  è l'energia cinetica del sistema (mentre per una corda è l'energia potenziale elastica), mentre un termine del tipo  $\int V(x)|u|^2$  è l'energia potenziale della particella sottoposta a un potenziale  $V(x)$  (mentre nel caso della corda  $\int k/2|u|^2$  è l'energia potenziale elastica).

Ipotizziamo dunque che  $U$  sia l'energia di un sistema quantistico di funzione d'onda  $u$ .

Cercare il minimo con il vincolo  $\int u^2 = 1$  equivale a cercare i punti stazionari di

$$U + \lambda \frac{1}{2} \left( \int u^2 - 1 \right)$$

dove  $\lambda$  è il moltiplicatore di Lagrange.

Scrivi le equazioni di Eulero-Lagrange per il minimo e nota che hai ottenuto esattamente il problema agli autovalori di Sturm-Liouville.

Moltiplicano per  $u$  e integrando, mostra che gli autovalori sono negativi o nulli, e che la corrispondente energia è  $-\lambda/2$ . Dunque l'energia minima si ottiene per l'autofunzione che ha l'autovalore di minimo modulo.

Per  $k = 0$ , mostra che 0 non è autovalore nel caso di condizioni di Dirichlet omogenee o Robin, mentre lo è nel caso di condizioni di Neumann omogenee.

Ho descritto un modello fisico che porta al problema di Sturm-Liouville, però questo tipo di problemi si incontra anche cercando le autofunzioni del laplaciano in particolari geometrie, dopo aver ridotto il problema ad un caso unidimensionale (vedremo dopo degli esempi). In questi casi  $\tau$  ha un'espressione matematica semplice, ma spesso è nulla al bordo. Ci chiediamo dunque cosa cambia in questi casi.

Supponiamo che  $\tau(x)$  si annulli nell'estremo  $x = L$ . Calcolando la variazione dell'azione assumendo  $u$  libera al bordo, il termini di bordo dovrebbe essere

$$\tau(L)u'(L)\delta u(L)$$

Imporre  $\delta u(L) = 0$  (cioè condizioni di Dirichlet) è indistinguibile dal porre  $\delta u(L)$  arbitrario, se  $u'(x)\tau(x)$  limitato.

Dunque il principio variazionale sembra indicare che la condizione al contorno da imporre, nel caso di  $\tau$  nullo a un estremo, sia  $u$  limitato in quell'estremo. Vedremo in che senso questa è effettivamente la condizione giusta.

### *Esercizio 4. Autovalori e condizioni al contorno*

Considera in  $[-1, 1]$  l'equazione di Sturm-Liouville

$$((1-x^2)u')' = -\lambda u$$

Mostra che per  $\lambda = 0$  esistono almeno due soluzioni linearmente indipendenti non nulle, di cui una, che indicherò con  $\phi_0$ , limitata, e l'altra,  $\phi_1$  non limitata agli estremi ma con  $(1-x^2)\phi_1'$  limitato. Mostra che per  $\phi_0$  l'energia elastica è limitata, per  $\phi_1$  no.

### *Esercizio 5. Il moto di un'asta sottile \**

Il moto vibratorio di un'asta rigida è governato da un'equazione che non è quella delle onde, che si ottiene assumendo che l'energia potenziale sia proporzionale all'integrale del quadrato della curvatura. In tal modo, mentre per una corda elastica i punti con  $u' \neq 0$  danno contributo all'energia, questo non accade per un'asta metallica, dove è necessario che  $u'' \neq 0$ .

Assumi che la densità di massa sia costante, e che l'energia potenziale sia l'integrale del quadrato della curvatura.

- Scrivi la lagrangiana
- Approssima la lagrangiana al II ordine
- Mostra che l'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\ddot{u} = -u^{iv}$$

- Quali e quante condizioni al contorno puoi assegnare? Qual è il loro significato fisico?
- Trova le armoniche del problema, considerando  $u$  e  $u'$  nulle al bordo.
- Le pulsazioni di una corda vibrante sono  $\omega_k = \nu k$ , con  $k$  intero positivo: Come sono le pulsazioni dell'asta?

Nelle oscillazioni armoniche  $\omega_k = \nu k$ , il valore  $\omega_1 = \nu$  è la **fondamentale**, i suoi multipli sono le armoniche. In particolare la prima armonica è ha frequenza doppia, e l'orecchio o il cervello umano considerano un suono di frequenza doppia uguale all'altro. Le ulteriori armoniche sono le altre note, e un questo modo le armoniche degli strumenti a corda (uguali a quelle degli strumenti a fiato), hanno dato origine alla scala naturale, successivamente "temperata" dividendo in 23 parti uguali il logaritmo della frequenza tra due ottave.

Le aste metalliche, hanno solo un sottoinsieme delle frequenze delle corde, e per questo hanno un "timbro" completamente diverso (il timbro è dato, in prima approssimazione, da come si distribuisce l'energia nelle armoniche disponibili).

Gli strumenti a percussione piana, invece, non hanno pulsazioni della forma  $\nu n$  con  $n$  intero, dunque danno suoni "non armonici", che è il motivo per cui è difficile assegnare una "nota" ad un tamburo (ci si riesce con il timpano, per un'affascinante fenomeno psicoacustico).

## 2 Spazi di Hilbert

In queste note non riporto definizioni e dimostrazioni elementari sugli spazi di Hilbert, che ho riassunto a lezione. Si veda su qualunque testo la definizione di prodotto scalare nel caso reale e nel caso complesso, la definizione di spazio di Hilbert, la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz ([S] parr 6.3-6.4, oppure [G] parr. 5.1-5.2, ma mancano i sistemi ortonormali, Bessel e l'identità di Parseval, che trovi su [KF] III.4; per il caso complesso vedi [RS] cap 2 parr 1-4; per richiami su Fourier va bene un qualunque testo, in particolare [KF]).

Sempre su [S] o su [G], si trova anche il **Teorema della proiezione**, che dimostro comunque anche qui.

Non considererò mai spazi di Hilbert non separabili, e solo spazi di dimensione infinita, se non esplicitamente indicato.

Do per noto che se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  è un **dominio** (cioè un aperto connesso), lo spazio delle funzioni  $L^2$  a valori reali è completo nella norma data dal prodotto scalare.

### 2.1 Prodotto hermitiano

Dato uno spazio vettoriale  $H$  sul campo  $\mathbb{C}$ , un prodotto hermitiano è un prodotto a valori in  $\mathbb{C}$

$$H \times H \rightarrow \mathbb{C}$$

che a  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$  associa il numero complesso  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  che verifica i seguenti assiomi:

- è lineare nel secondo argomento: per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in H$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)$$

$$(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

- lineare coniugato nel primo argomento:

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$$

$$(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{\lambda} (\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

- è "hermitiano":  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$

- è definito positivo:  $(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  è reale e definisce la norma  $\|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$

Anche il prodotto hermitiano verifica la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

**Teorema 2.1.** *Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz* Per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$  vale

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

La dimostrazione si fa nello stesso modo del caso reale, usando che  $\|\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}\|^2$  è un polinomio di secondo grado in  $\alpha$ , positivo. Per esercizio prova a sistemare i dettagli, se hai problemi guarda prima la dimostrazione del teorema della proiezione nel paragrafo successivo.

La definizione di ortogonalità è la stessa del caso reale. Do per noto (o per esercizio), la continuità del prodotto hermitiano e della norma rispetto alla metrica indotta dalla norma.

Se  $H$  è completo rispetto alla norma, è uno **spazio di Hilbert**. Chiamerò spazio di Hilbert reale uno spazio euclideo, cioè uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare, completo rispetto alla norma indotta.

$\mathbb{C}^n$  è uno spazio di Hilbert di dimensione finita con il prodotto scalare

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_1^n \bar{u}_i v_i$$

Lo spazio delle funzioni a valori complessi quadro sommabili  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$  ha come prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{\Omega} \bar{f} g$$

che definisce la norma

$$\|f\|^2 = \int_{\Omega} \bar{f} f = \int_{\Omega} |f|^2$$

Do per noto che  $L^2(\Omega, \mathbb{R})$  è uno spazio completo. Noto che  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ , come spazio metrico, è in biezionne isometrica con  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , assegnando a  $f$  a valori in  $\mathbb{C}$  la coppia costituita dalla sua parte reale e dalla sua parte immaginaria. Da questo è immediato ottenere che  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$  è uno spazio completo e che le funzioni continue sono dense.

D'ora in poi  $H$  sarà sempre uno spazio di Hilbert complesso, a meno che non sia specificato altrimenti.

## 2.2 Sottospazi ortogonali e proiezioni ortogonali

Ci sono alcune differenze su quello che è vero in dimensione infinita rispetto al caso finito. In particolare, i sottospazi di uno spazio di dimensione infinita non sono necessariamente chiusi. Si pensi al sottospazio dei polinomi di  $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ : si tratta di un sottospazio che è denso (e non chiuso, visto che non tutte le funzioni di  $L^2$  sono polinomi...).

In dimensione infinita è ancora possibile costruire la proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio, ma (non troppo sorprendentemente...) è necessario che il sottospazio sia chiuso.

### **Teorema 2.2. Teorema della proiezione.**

*Sia  $V$  un sottospazio chiuso di  $H$ , sia  $\mathbf{u} \in H$ , sia*

$$dist(\mathbf{u}, V) = \inf\{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \mid \mathbf{v} \in V\}$$

*la distanza tra  $\mathbf{u}$  e  $V$ . Esiste il punto di minima distanza  $\mathbf{w}$  tale che*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = dist(\mathbf{u}, V)$$

*Inoltre  $\mathbf{w}$  è l'unico vettore che verifica*

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

*In termini geometrici elementari, quest'ultima affermazione dice che  $\mathbf{w}$  è il "piede" della perpendicolare da  $\mathbf{u}$  a  $V$ .*

Ricordo che questo teorema si estende, con qualche modifica nel secondo punto, al caso di sottoinsiemi convessi chiusi.

*Dimostrazione.* Ricordo che per la norma indotta da un prodotto scalare vale l'**identità del parallelogramma**:

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$$

(dimostrare, svolgendo i quadrati, che vale anche nel caso del prodotto hermitiano).

Sia  $\mathbf{v}_n \in V$  una successione minimizzante, cioè tale che per  $n \rightarrow +\infty$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_n\| \rightarrow \text{dist}(\mathbf{u}, V).$$

Scegliendo  $\mathbf{a} = \mathbf{u} - \mathbf{v}_n$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{u} - \mathbf{v}_m$  nella disuguaglianza del parallelogramma scritta sopra, si ha

$$2\|\mathbf{u} - (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_n\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_m\|^2$$

Da cui segue che

$$\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m\|^2 = 2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_n\|^2 + 2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_m\|^2 - 4\|\mathbf{u} - (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2\|^2 \quad (2.1)$$

Ora

$$\text{dist}(\mathbf{u}, V) \leq \|\mathbf{u} - (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2\|$$

perché  $(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2 \in V$  e

$$\|\mathbf{u} - (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_n\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_m\|$$

che tende a zero nel limite  $n, m \rightarrow +\infty$ . Dunque il secondo membro della (2.1) tende a 0 per  $n, m \rightarrow +\infty$ , e quindi  $\mathbf{v}_n$  è di Cauchy. Per completezza di  $H$  esiste

$$\mathbf{w} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_n$$

che è in  $V$ , perché  $V$  è chiuso, e raggiunge il minimo perchè  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_n\| \rightarrow \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$ .

Abbiamo trovato un vettore  $\mathbf{w}$  che realizza il minimo, per mostrare che è unico dimostriamo prima la seconda parte.

Per definizione,  $\mathbf{w}$  soddisfa, per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w} + \lambda\mathbf{v}\|^2 \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2,$$

infatti  $\mathbf{w} - \lambda\mathbf{v} \in V$ . Sviluppando il primo membro si ha

$$\lambda(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \bar{\lambda}(\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w}) + |\lambda|^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$$

Riconoscendo nel secondo termine il complesso coniugato del primo, si ha

$$2\Re(\lambda(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v})) + |\lambda|^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$$

che, scegliendo  $\lambda = \overline{\mu(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v})}$ , con  $\mu \in \mathbb{R}$  arbitrario, diventa

$$|(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v})|^2(2\mu + \mu^2\|\mathbf{v}\|^2) \geq 0$$

Il polinomio  $2\mu + \mu^2\|\mathbf{v}\|^2$  non ha segno definito (è negativo per  $\mu$  negativo e di piccolo modulo), dunque la disuguaglianza è soddisfatta solo se  $|(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v})|^2$  cioè

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$$

Mostreremo ora che esiste al più un vettore  $\mathbf{w}$  che verifica questa uguaglianza per ogni  $\mathbf{v} \in V$ , concludendo la prova.

Siano  $\mathbf{w}_i$  con  $i = 1, 2$  due vettori di  $V$  tali che, per ogni  $\mathbf{v} \in V$ , sia ha  $(\mathbf{u} - \mathbf{w}_i, \mathbf{v}) = 0$ . Allora, sommando e sottraendo  $\mathbf{u}$ ,

$$(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{w}_1 - \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_2, \mathbf{v}) = 0$$

Poichè  $\mathbf{w}_i \in V$ , si può scegliere  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ , e dunque si ottiene  $\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|^2 = 0$ .  $\square$

Come corollario, segue la seguente generalizzazione al caso infinito dimensionale della decomposizione in uno spazio euclideo. Sia  $V$  un sottospazio vettoriale di  $H$  (anche non chiuso) e sia

$$V^\perp = \{v \in H \mid \forall z \in V (z, v) = 0\}$$

il sottospazio dei vettori ortogonali a  $V$ .

**Teorema 2.3. Decomposizione in somma diretta di sottospazi ortogonali chiusi.**

*Se  $V$  è un sottospazio vettoriale chiuso,*

$$H = V^\perp \oplus V$$

*Dimostrazione.* Infatti, per il teorema della proiezione, dato  $\mathbf{u}$  in  $H$ , esiste  $\mathbf{w} \in V$  tale che  $(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ . Ma allora  $(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \in V^\perp$ , dunque

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}$$

è la decomposizione di  $\mathbf{u}$  in  $V^\perp + V$ ; l'unicità della decomposizione segue dalla relazione di ortogonalità.  $\square$

Analizzo ora le proprietà dei sottospazi legate all'ortogonalità. Sia  $M$  un sottospazio, e sia  $\overline{M}$  la sua chiusura topologica.

**a.**  $M^\perp$  è un chiuso.

È una conseguenza della continuità del prodotto scalare. Sia  $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$  una successione in  $M^\perp$ . Per definizione, per ogni  $\mathbf{v} \in M$  si ha  $(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = 0$ . Dalla continuità del prodotto scalare segue che  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in M$ , cioè  $\mathbf{u} \in M^\perp$ .

**b.**  $\overline{M}^\perp = M^\perp$ .

Infatti da  $M \subset \overline{M}$  si ottiene  $\overline{M}^\perp \subset M^\perp$ .

Dimostro che vale anche l'inclusione opposta. Sia ora  $\mathbf{v} \in M^\perp$ , e sia  $\mathbf{u} \in \overline{M}$ ; esiste  $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$  con  $\mathbf{u}_n \in M$ . Ma allora  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = 0$  perché  $\mathbf{v}$  è ortogonale a  $M$ . Per genericità di  $\mathbf{u}$  segue che  $\mathbf{v} \in \overline{M}^\perp$ .

c.  $M^{\perp\perp} = \overline{M}$ .

Infatti, per il teorema della proiezione e per il punto precedente

$$H = \overline{M}^{\perp} \oplus \overline{M} = M^{\perp} \oplus \overline{M}$$

e vale anche, essendo  $M^{\perp}$  chiuso,

$$H = M^{\perp\perp} \oplus M^{\perp}$$

e quindi  $\overline{M} = M^{\perp\perp}$ .

Quanto detto sopra, garantisce che dato  $V$  sottospazio chiuso di  $H$ , è ben definito l'**operatore di proiezione** su  $V$ , detto anche **proiettore** su  $V$ , che associa a  $\mathbf{u} \in H$  la sua proiezione  $\mathbf{w} \in V$ , determinata attraverso il teorema della proiezione. Il proiettore  $P$  su  $V$  ha diverse proprietà:

- $P : H \rightarrow V$  è un operatore lineare  
(dimostrazione per esercizio)
- Se  $\mathbf{v} \in V$ , allora  $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$   
Infatti  $\mathbf{v}$  realizza distanza 0 da  $V$ .
- $P^2 = PP = P$   
Infatti  $P\mathbf{u} \in V$ , dunque, per il punto precedente,  $P(P\mathbf{u}) = P\mathbf{u}$
- $(\mathbf{u}, P\mathbf{z}) = (P\mathbf{u}, P\mathbf{z}) = (P\mathbf{u}, \mathbf{z})$   
Infatti  $\mathbf{u} = P\mathbf{u} + (\mathbf{u} - P\mathbf{u})$ . La prima identità segue dal fatto che  $(\mathbf{u} - P\mathbf{u}) \in V^{\perp}$  e  $P\mathbf{z} \in V$ ; la seconda si ottiene dalla prima usando  $\mathbf{z} = P\mathbf{z} + (\mathbf{z} - P\mathbf{z})$ .
- $(\mathbf{u}, P\mathbf{u}) = \|P\mathbf{u}\|^2$   
come segue immediatamente dal punto precedente

Anche in spazi di Hilbert vale il teorema di Pitagora.

#### **Teorema 2.4. Teorema di Pitagora**

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u} - P\mathbf{u}\|^2 + \|P\mathbf{u}\|^2$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è immediata, infatti

$$(\mathbf{u} - P\mathbf{u}, \mathbf{u} - P\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 - (P\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{u}, P\mathbf{u}) + \|P\mathbf{u}\|^2$$

e i due prodotti sono entrambi pari a  $(P\mathbf{u}, P\mathbf{u}) = \|P\mathbf{u}\|^2$ . Dunque

$$\|\mathbf{u} - P\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|P\mathbf{u}\|^2.$$

□

### 2.3 Sistemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel, basi ortonormali

D'ora in poi darò per noto che le funzioni  $\mathbf{C}(\Omega; \mathbb{C})$ ,  $C^k(\Omega; \mathbb{C})$ ,  $C^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ , e quelle a supporto compatto in  $\Omega$  sono dense nella norma  $L^2$  nello spazio  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ .

Definisco **sistema ortonormale** una successione  $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , tale che

$$(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_h) = \delta_{kh}$$

Chiamerò invece **sistema ortogonale** una successione  $\{\mathbf{v}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , tale che  $\{\mathbf{v}_k/\|\mathbf{v}_k\|\}_{k \in \mathbb{N}}$  è un sistema ortonormale.

Dato un sistema ortonormale  $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , noto che il sottospazio  $V_n = \text{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^n$  è finito-dimensionale, dunque è chiuso, e  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^n$  è una sua base. Dunque l'operatore  $P_n : H \rightarrow V_n$  definito come

$$P_n \mathbf{u} = \sum_{k=0}^n \hat{u}_k \mathbf{e}_k \quad \text{dove } \hat{u}_k = (\mathbf{e}_k, \mathbf{u})$$

è il proiettore su  $V_n$ , infatti per ogni  $k \leq n$

$$(\mathbf{u} - P_n \mathbf{u}, \mathbf{e}_k) = \hat{u}_k - \sum_{h=0}^n \hat{u}_h (\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_k) = \hat{u}_k - \hat{u}_k = 0$$

Per linearità si ottiene  $(\mathbf{u} - P_n \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in V_n$ .

Vale inoltre che

$$\|P_n \mathbf{u}\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^n \hat{u}_k \mathbf{e}_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n |\hat{u}_k|^2$$

#### **Teorema 2.5. Disuguaglianza di Bessel**

Se  $\mathbf{u} \in H$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\hat{u}_k|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2.$$

*Dimostrazione.* Questa disuguaglianza è un'immediata conseguenza del teorema di Pitagora dimostrato sopra.

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u} - P_n \mathbf{u}\|^2 + \|P_n \mathbf{u}\|^2$$

Per ortonormalità,  $\|P_n \mathbf{u}\|^2 = \sum_{k=0}^n |\hat{u}_k|^2$ . Minorando con 0 il termine  $\|\mathbf{u} - P_n \mathbf{u}\|^2$  e passando al limite si ottiene la tesi.  $\square$

I coefficienti  $\hat{u}_k = (\mathbf{e}_k, \mathbf{u})$  sono le componenti di  $\mathbf{u}$  rispetto ai vettori del sistema ortonormale, e sono anche detti **coefficienti di Fourier**.

Si chiama **base ortonormale** un sistema ortonormale **completo** cioè tale che, per ogni  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{u}_k \mathbf{e}_k, \quad \text{con } \hat{u}_k = (\mathbf{e}_k, \mathbf{u})$$

dove la serie converge nella norma di  $H$ . In tal caso  $\mathbf{u}$  si sviluppa nella **serie di Fourier** dei suoi coefficienti.

Questa definizione generalizza la definizione di base in uno spazio finito-dimensionale. Si noti che in uno spazio di dimensione  $n$ , ogni sistema ortonormale di  $n$  elementi è una base, mentre



in uno spazio di dimensione infinita non è ovviamente detto che in sistema ortonormale infinito sia una base (basta levare un vettore a una base per ottenere un controesempio). Anzi, il problema interessante è costruire effettivamente delle basi.

**Proposizione 2.1. Proprietà delle basi ortonormali.**

*Sono equivalenti:*

a.  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^{+\infty}$  è una base.

b.  $\forall k \in \mathbb{N} (\mathbf{v}, \mathbf{e}_k) = 0$  implica  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

*Si noti che questa asserzione è equivalente ad affermare che l'ortogonale al sottospazio delle combinazioni lineari finite di  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^{+\infty}$  è banale.*

c. vale l'uguaglianza di Parseval:

$$\text{per ogni } \mathbf{u} \in H: \sum_{k=0}^{+\infty} |\hat{u}_k|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$$

*Dimostrazione.* Cominciamo con l'osservare che, dato un qualunque sistema ortonormale  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^{+\infty}$ , per ogni  $\mathbf{u}$  la serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{u}_k \mathbf{e}_k$  è convergente. Infatti, per ortogonalità degli elementi della base

$$\left\| \sum_{n+1}^m \hat{u}_k \mathbf{e}_k \right\|^2 = \sum_{n+1}^m |\hat{u}_k|^2 \leq \sum_{n+1}^{+\infty} |\hat{u}_k|^2$$

e il membro di destra, per la disuguaglianza di Bessel, è il resto di una serie convergente. Dunque la successione associata alla serie è di Cauchy, e quindi la serie converge. Sia  $\mathbf{w}$  il limite:

$$\mathbf{w} = \lim_{k \rightarrow +\infty} P_k \mathbf{u} = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{u}_k \mathbf{e}_k.$$

Per continuità della norma e del prodotto scalare si ottiene facilmente che

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|P_k \mathbf{u}\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\hat{u}_k|^2 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}\|^2$$

Dunque, passando al limite nell'espressione

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u} - P_k \mathbf{u}\|^2 + \|P_k \mathbf{u}\|^2$$

si ottiene

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 + \sum_{k \in \mathbb{N}} |\hat{u}_k|^2$$

Se ne conclude che il sistema ortonormale assegnato è una base (cioè  $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ ) se e solo se vale l'uguaglianza di Parseval.

Mostriamo l'equivalenza tra (a) e (b). Per definizione di  $\mathbf{w}$ ,  $(\mathbf{u} - \mathbf{w})$  è ortogonale a tutti i vettori  $\mathbf{e}_k$ . Ne consegue che se vale (b) allora  $\mathbf{u} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$ , cioè  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ . Si può dunque concludere che vale (a), perché  $\mathbf{u}$  coincide con la sua serie di Fourier  $\mathbf{w}$ .

Viceversa, supponiamo che valga (a). Sia dato  $\mathbf{v}$  qualunque; per l'ipotesi di (b) si ha che  $v_k = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_k) = 0$  per ogni  $k$ . Ma allora, usando (a),  $\mathbf{v} = \sum v_k \mathbf{e}_k = \sum 0 \mathbf{e}_k = \mathbf{0}$ . Quindi (b) è provata.  $\square$

## Teorema 2.6. Esistenza di una base in spazi separabili

In uno spazio di Hilbert separabile esiste sempre una base ortonormale.

*Dimostrazione.* Sia  $\{\mathbf{g}_k\}_{k=0}^{+\infty}$  un sottoinsieme denso numerabile di  $H$ , che esiste per l'ipotesi di separabilità. Posso estrarre una successione  $\mathbf{v}_k$  tale che  $\mathbf{v}_{n+1}$  non appartiene a  $V_n = \text{span}\{\mathbf{v}_k\}_{k=0}^n$ . Questa successione ha la proprietà che le sue combinazioni lineari finite ricostruiscono la successione  $\mathbf{w}_k$ , dunque sono dense in  $H$ . Sia  $P_n$  il proiettore su  $V_n$ . Costruiamo iterativamente la base cercata mediante **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**:

- $\mathbf{e}_0 = \mathbf{v}_0 / \|\mathbf{v}_0\|$ ;  
osservo che  $V_0 = \text{span}\{\mathbf{v}_0\} = \text{span}\{\mathbf{e}_0\}$
- $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 - P_0\mathbf{v}_1$   
 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{w}_1 / \|\mathbf{w}_1\|$   
Il vettore  $\mathbf{e}_1$  esiste perché se  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$  allora  $\mathbf{v}_1 \in V_0$ .  
Per definizione di  $\mathbf{e}_1$ ,  $V_1 = \text{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^1$
- Induttivamente,  $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1} - P_n\mathbf{v}_{n+1}$   
 $\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{w}_{n+1} / \|\mathbf{w}_{n+1}\|$   
Il vettore  $\mathbf{e}_{n+1}$  esiste perché se  $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{0}$  allora  $\mathbf{v}_{n+1} \in V_n$ , contro l'ipotesi.

La successione  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^{+\infty}$  è un sistema ortonormale per costruzione. Resta da verificare che sia una base. Sia  $V = \bigcup_{n=0}^{+\infty} V_n$  il sottospazio delle combinazioni lineari finite dei vettori  $\mathbf{e}_k$ . Per ipotesi  $V$  è denso in  $H$ , e poiché

$$H = \overline{V} \oplus V^\perp$$

ne segue che  $V^\perp$  è banale. Quindi se  $\mathbf{v}$  è ortogonale a ogni  $\mathbf{e}_k$ , allora  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Ma questa è la condizione (b) che garantisce che la successione degli  $\mathbf{e}_k$  forma una base.  $\square$

### Esercizio 6. Attenti all'intuito

La condizione (b) non può essere "rilassata" considerando un sottospazio denso invece di tutto  $H$ . Sia  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^{+\infty}$  un sistema ortonormale, e sia  $W$  un sottospazio denso. Si potrebbe pensare che il sistema è una base se, per ogni  $\mathbf{w} \in W$  se  $(\mathbf{e}_k, \mathbf{w}) = 0$  per ogni  $k$ , allora  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , o, equivalentemente, il sistema è una base se non esiste  $\mathbf{w} \in W$  non nullo tale che  $(\mathbf{e}_k, \mathbf{w}) = 0$  per ogni  $k$ .

Nella sezione successiva mostro che  $\cos(kx)$  con  $k \in \mathbb{N}$  è un sistema ortogonale completo per  $L^2(0, \pi)$ , così come lo è  $\sin(kx)$  con  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Quindi  $\cos(kx)$  per  $k \geq 1$  non è una base, perché la funzione costante è non nulla e ortogonale a tutte le funzioni  $\cos(kx)$  per  $k \geq 1$ . D'altra parte non esiste nessuna combinazione lineare finita delle funzioni  $\sin(kx)$  che sia ortogonale a tutte le funzioni  $\cos(kx)$  per  $k \geq 1$ . (se esistesse dovrebbe valere 1, ma uno ha uno sviluppo infinito nei soli seni).

## 2.4 La serie di Fourier

Per tentare di fare una trattazione autocontenuta, mi appoggio al **teorema di Stone-Weierstrass**, che non dimostro ma che dovrebbe essere noto al lettore, e che generalizza il ben noto teorema di Weierstrass.

### Teorema 2.7. Teorema di Stone-Weierstrass

Sia  $X$  un compatto di  $\mathbb{R}^n$ , e sia  $\mathcal{A}$  una sottoalgebra delle funzioni continue da  $X$  in  $\mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ) che contiene la costanti e separa i punti in senso forte, cioè se  $x, y \in \Omega$  e  $a, b \in \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ), e  $x \neq y$  e  $a \neq b$ , allora esiste  $f \in \mathcal{A}$  tale che  $f(x) = a$  e  $f(y) = b$ .

Allora le combinazioni lineari di elementi  $\mathcal{A}$  sono dense in  $\mathbf{C}(X)$  nella norma delle funzioni continue.

Nel caso di funzioni a valori complessi, alle ipotesi va aggiunto che  $\mathcal{A}$  sia anche chiusa per coniugazione.

Consideriamo le funzioni

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

definite e periodiche in  $[-\pi, \pi]$ . Queste funzioni possono essere anche pensate da  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ , dove  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Ovviamente  $\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^k$ , dove  $z = e^{ix}$ . In  $\mathbf{C}(\mathbb{S}^1; \mathbb{C})$  l'insieme delle combinazioni lineari di  $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  costituisce una sotto algebra (cioè un sottospazio lineare su  $\mathbb{C}$  chiuso per il prodotto), ed è anche chiuso per coniugazione, perché  $\overline{z^k} = z^{-k}$ .

È facile vedere che queste combinazioni lineari separano i punti, usando le costanti e  $e^{ikx}$ . Infatti, dati  $x \neq y \in [-\pi, \pi]$  e  $a \neq b$ , esistono  $\alpha$  e  $\beta$  tali che

$$\begin{aligned} \alpha + \beta e^{ix} &= a \\ \alpha + \beta e^{iy} &= b \end{aligned}$$

e questo sistema ha soluzione perché  $e^{ix} \neq e^{iy}$ .

Dunque è denso in  $\mathbf{C}(\mathbb{S}^1; \mathbb{C})$  nella norma dell'estremo superiore.

Ne segue, in particolare, ogni funzione periodica continua a valori in  $\mathbb{C}$  è limite uniforme di combinazioni lineari delle funzioni  $e^{ikx}$ , e ogni funzione periodica reale continua è limite uniforme di combinazioni lineari di  $\sin(kx)$  e  $\cos(kx)$ .

Infine, poichè se  $\Omega$  è limitato la norma  $L^2(\Omega)$  è stimata dalla norma  $L^\infty(\Omega)$ . Dalla densità delle funzioni continue in  $L^2$  segue che i polinomi trigonometrici (cioè le combinazioni lineari finite di  $e^{ikx}$ ) sono densi in  $L^2$ . In questo modo, abbiamo verificato la condizione (b) che garantisce che abbiamo effettivamente una base.

Quando si lavora con la base di Fourier, i coefficienti vengono indicati come

$$\hat{f}_k = (\varphi_k, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx$$

e il fatto che  $\varphi_k$  sia una base vuol dire che per ogni  $f \in L^2$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikx} \text{ in } L^2.$$

È relativamente facile mostrare che una maggiore regolarità migliora la convergenza. Se  $f$  è di classe  $C^1$ , è immediato verificare che

$$\hat{f}'_k = ik \hat{f}_k$$

Per Bessel-Parseval, la serie dei quadrati dei coefficienti di Fourier di  $f'$  è convergente, cioè

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^2 |\hat{f}_k|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2$$

Ma allora

$$\left| \sum_{|k| \geq n} e^{ikx} \hat{f}_k \right| \leq \sum_{|k| \geq n} \frac{|k| |\hat{f}_k|}{|k|} \leq \frac{1}{2} \sum_{|k| \geq n} \left( |k|^2 |\hat{f}_k|^2 + \frac{1}{|k|^2} \right)$$

e la serie a destra è il resto della somma di due serie convergenti. Dunque la convergenza della serie di Fourier è uniforme.

Sulle dispense di Buttà [B] trovate una prova abbastanza semplice della convergenza puntuale della serie di Fourier nei punti in cui  $f$  è derivabile. Su [KF] trovate i teoremi ottimali sulla condizione di convergenza puntuale della serie di Fourier (ipotesi del Dini). Infine, il teorema di Stone-Weierstrass assicura per ogni funzione continua l'esistenza di una successione uniformemente convergente di polinomi trigonometrici. Questa successione in generale NON è la serie di Fourier. Però si può dimostrare il teorema di Fejér (vedi [KF]), che asserisce la convergenza uniforme a  $f$  continua delle somme di Cesaro della corrispondente serie di Fourier.

A partire da questa base, è facile costruirne una di sole funzioni reali, che sono quindi una base sia per  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  che per  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ . Per la coppia  $k, -k$  con  $k \neq 0$ , si considerano le combinazioni

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_k + \varphi_{-k}), \quad \frac{1}{i\sqrt{2}}(\varphi_k - \varphi_{-k})$$

che hanno norma 1, e sono ortogonali (verificare per esercizio). Queste due funzioni coincidono con

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx)$$

se  $k \geq 1$ , e dalla prima espressione si ottiene  $\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  per  $k = 0$  (l'altra dà 0).

### **Esercizio 7. Funzioni pari e dispari**

Considera  $L^2((-a, a), \mathbb{R})$ . Mostra che

$$M^p = \{f \in L^2((-a, a), \mathbb{R}) : f(x) = f(-x) \text{ q.o. } \}$$

$$M^d = \{f \in L^2((-a, a), \mathbb{R}) : f(x) = -f(-x) \text{ q.o. } \}$$

sono due sottospazi chiusi ortogonali tra loro, e che

$$L^2((-a, a), \mathbb{R}) = M^p \oplus M^d$$

### **Esercizio 8. Basi per $L^2((0, \pi))$**

Usando l'esercizio precedente, dimostra che  $\{\sin(kx)\}_{k \geq 1}$  è un sistema ortogonale completo per  $L^2((0, \pi))$  (prolunga per disparità...).

Analogamente, prova che  $\{\cos(kx)\}_{k \geq 0}$  è un sistema ortogonale completo per  $L^2((0, \pi))$  (prolunga per parità...).

### **Esercizio 9. Autofunzioni di $\partial_x^2$ in $[0, \pi]$**

Nota che  $\{\sin(kx)\}_{k \geq 1}$  è un sistema ortogonale di autofunzioni di  $\partial_x^2$ , con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo. Gli autovalori sono  $-k^2$  e sono tutti semplici (cioè l'autospazio corrispondente ha dimensione 1). Osserva che  $\sin(kx)$  ha  $k - 1$  zeri interni all'intervallo.

Analogamente,  $\{\cos(kx)\}_{k>0}$  è un sistema ortogonale di autofunzioni di  $\partial_x^2$ , con condizioni di Neumann omogenee al bordo. Gli autovalori sono  $-k^2$  e sono tutti semplici (cioè l'autospazio corrispondente ha dimensione 1). Osserva che  $\cos kx$  ha  $k$  zeri interni all'intervallo. In generale, la  $k$ -esima funzione della base ha  $k$  zeri nell'intervallo ( $\sin kx$  è la  $k-1$ -esima funzione).

**Esercizio 10. Autofunzioni di  $\partial_x^4$  in  $[0, \pi]$**

Trova le soluzioni di

$$\partial_x^4 u = \lambda u$$

con  $u$  nulla al bordo e derivate nulle al bordo (stai cercando le autofunzioni per una sbarra metallica murata orizzontalmente agli estremi).

Risolvi lo stesso problema con  $u$  nulla al bordo e  $u''$  nulla al bordo. In questo caso la sbarra è incernierata agli estremi, cioè è libera di oscillare intorno agli estremi, dove non agiscono forze che la piegano.

**2.5 Basi in  $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$**

Sia  $\{\phi_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$  una base ortonormale per  $L^2(\Omega_1)$  e sia  $\{\psi_j(y)\}_{j \in \mathbb{N}}$  in  $L^2(\Omega_2)$ . Allora

$$\{\phi_i(x)\psi_j(y)\}_{i,j \in \mathbb{N}^2} \text{ è una base ortonormale per } L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

L'ortonormalità è di verifica immediata. Sia ora  $f(x, y) \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . Allora esiste finito

$$\int_{\Omega_1} dx |\phi_i(x)| \int_{\Omega_2} dy |\psi_j(y)| |f(x, y)| \tag{2.2}$$

Infatti, poiché  $\|\psi_j\| = 1$ , usando Cauchy-Schwartz, l'integrale a destra è stimato da

$$\left( \int_{\Omega_2} |f(x, y)|^2 \right)^{1/2}$$

che è una funzione in  $L^2(\Omega_1)$ , perché  $f \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . Dunque il suo prodotto con  $|\phi_i(x)|$  è in  $L^1$ , cioè l'integrale (2.2) esiste finito e vale il teorema di Fubini:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \phi_i(x) \psi_j(y) f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} dx \phi_i(x) \int_{\Omega_2} dy \psi_j(y) f(x, y).$$

Sia ora  $f$  ortogonale a  $\phi_i(x)\psi_j(y)$  per ogni coppia di indici  $i, j \in \mathbb{N}^2$ . Ne segue, per l'identità scritta sopra,

$$0 = \int_{\Omega_1} dx \phi_i(x) \int_{\Omega_2} dy \psi_j(y) f(x, y)$$

Poiché  $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  è un sistema ortonormale,

$$0 = \int_{\Omega_2} dy \psi_j(y) f(x, y)$$

sul complementare di un insieme  $Z_j \subset \Omega_1$  di misura nulla. Sia  $Z = \bigcup Z_j$ ;  $Z$  è di misura nulla, e sul suo complementare

$$0 = \int_{\Omega_2} dy \psi_j(y) f(x, y) \text{ per ogni } j$$

Poiché  $\{\psi_j(y)\}_{j \in \mathbb{N}}$  è una base ortonormale,  $f(x, y) = 0$  q.o. in  $y$ , se  $x \in Z^c$ . Sia  $U \subset \Omega_1 \times \Omega_2$  su cui  $f$  non è nulla. Poiché  $f$  è misurabile, la funzione  $\mathcal{X}\{(x, y) \in U\}$  è sommabile, e

$$\int dx dy \mathcal{X}\{(x, y) \in U\} = \int_Z dx \int dy \mathcal{X}\{(x, y) \in U\} + \int_{Z^c} dx \int dy \mathcal{X}\{(x, y) \in U\} = 0$$

da cui si deduce che  $U$  ha misura nulla, e quindi  $f(x, y) = 0$  q.o. in  $\Omega_1 \times \Omega_2$ .

In conclusione, non esistono funzioni ortogonali a tutte le funzioni del sistema ortonormale  $\phi_i(x)\psi_j(y)$ . Ne segue che questo sistema è in effetti una base ortonormale.

Si può generalizzare questo esempio, si veda su [RS] il paragrafo sul prodotto tensore di due spazi di Hilbert.

## 3 Polinomi di Legendre

### 3.1 Basi di polinomi

Consideriamo  $L^2((-1, 1))$ , e sia  $\phi_k(x)$  il sistema ortonormale che si ottiene ortogonalizzando con Gram-Schmidt la successione di funzioni  $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Poiché i polinomi sono densi nella norma uniforme nelle funzioni continue sui compatti, e le funzioni continue sono dense in  $L^2$ , il sistema  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è un sistema completo.

#### *Esercizio 11. Polinomi di Legendre*

Si determinino  $\phi_0, \phi_1, \phi_2$ .

Si provi per induzione che  $\phi_k$  è un polinomio di grado  $k$ , che è dispari per  $k$  dispari, e pari per  $k$  pari.

Per costruzione,

$$\text{span}\{\phi_k\}_{k=0}^n = \text{span}\{x^k\}_{k=0}^n$$

dunque se  $k < n$

$$\int_{-1}^1 x^k \phi_n(x) dx = 0$$

Ne segue che a meno di coefficienti moltiplicativi,  $\phi_n$  è l'unico polinomio di grado  $n$  ortogonale al sottospazio generato da  $1, x, \dots, x^{n-1}$ .

Questa costruzione algebrica è semplice, ma poco sintetica. Esiste un modo per dare un'espressione compatta per questi polinomi che nasce dalla seguente osservazione. Sia  $n > 0$ , e sia  $\phi_n^{(1)}$  una primitiva di  $\phi_n$ . Deve valere

$$0 = (1, \phi_n) = \int_{-1}^1 \phi_n(x) dx = \phi_n^{(1)}(1) - \phi_n^{(1)}(-1) = 0.$$

Dunque  $\phi_n^{(1)}(1) = \phi_n^{(1)}(-1)$ . Sottraendo alla primitiva questo valore ottengo un'altra primitiva, che continuo a chiamare  $\Phi^{(1)}$ , e che è nulla agli estremi:  $\phi_n^{(1)}(\pm 1) = 0$ . Poiché è un polinomio (di grado  $n+1$ ) che si annulla in  $\pm 1$ , nella sua fattorizzazione c'è  $x^2 - 1$ .

Inoltre, se  $n > 1$ , integrando per parti si ha

$$0 = (x, \phi_n) = x \phi_n^{(1)} \Big|_{-1}^{+1} - (1, \phi_n^{(1)}) = -(1, \phi_n^{(1)})$$

Dunque  $\phi_n^{(1)}$  è ortogonale a 1. Ripetendo il ragionamento precedente, provo che esiste una primitiva di  $\phi_n^{(1)}$  che è un polinomio che si annulla ai bordi e la cui derivata si annulla ai bordi. Quindi nella sua fattorizzazione c'è  $(x^2 - 1)^2$ . Proseguendo, esiste un polinomio di grado  $2n$  che è una primitiva di  $\phi_n$  e che ha il fattore  $(x^2 - 1)^n$ . A partire da questa osservazione, si comprende che  $\phi_n$  deve essere proporzionale alla derivata  $n$ -esima di  $(x^2 - 1)^n$ . Vediamo i dettagli.

### 3.2 I polinomi di Legendre $G_n$

Indico con  $D$  la derivata  $\frac{d}{dx}$ . Ricordo la formula di Leibniz

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f D^{n-k} g$$

e che, per  $k \leq n$

$$D^k x^n = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

**a.**  $D^n(x^2 - 1)^n$  è un polinomio di grado  $n$ , infatti è la derivata  $n$ -esima di un polinomio di grado  $2n$ .

**b.** Se  $m < n$ , usando la formula di Leibniz,

$$D^m(x^2 - 1)^n = D^m((x-1)^n(x+1)^n) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} D^k(x-1)^n D^{m-k}(x+1)^n$$

dunque in  $x = \pm 1$  vale 0.

**c.** Invece la derivata  $n$ -esima non è nulla agli estremi:

$$D^n(x^2 - 1)^n \Big|_{x=\pm 1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k(x-1)^n D^{n-k}(x+1)^n \Big|_{x=\pm 1} = (\pm 1)^n 2^n n!$$

**d.** Sia  $\phi$  una funzione regolare; integrando iterativamente per parti, si ha che

$$(\phi, D^n(x^2 - 1)^n) = (-1)^n (D^n \phi, (x^2 - 1)^n)$$

**e.** Scegliendo  $\phi = x^m$  con  $m < n$ , si ottiene che  $D^n(x^2 - 1)^n$  è un polinomio di grado  $n$  ortogonale a  $x^m$ , per tutti gli  $m < n$ , e dunque a tutti i polinomi di grado inferiore a  $n$ . Ne segue che a meno di costanti moltiplicative,  $D^n(x^2 - 1)^n$  coincide con il polinomio  $\phi_n$  ottenuto per ortogonalizzazione delle potenze di  $x$ .

Sia ora

$$G_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n(x^2 - 1)^n \tag{3.1}$$

**a.** Poiché il termine di ordine massimo è quello che si ottiene derivando  $n$  volte  $x^{2n}$ , risulta lo sviluppo

$$G_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!^2} x^n + \dots$$

**b.** Per quanto visto sopra,  $G_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$

**c.** Poiché  $G_n$  è ortogonale a tutti i polinomi di grado inferiore,

$$(G_n, G_n) = \frac{(2n)!}{2^n n!^2} (x^n, G_n)$$

Ora

$$(x^n, G_n) = \frac{1}{2^n n!} (x^n, D^n(x^2 - 1)^n)$$

e, usando la proprietà ricavata sopra

$$(x^n, D^n(x^2 - 1)^n) = (-1)^n n! \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$$



Integrando successivamente per parti,

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx &= \int_{-1}^1 (x - 1)^n (x + 1)^n dx = \\
 &= -\frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (x - 1)^{n-1} (x + 1)^{n+1} dx = \\
 &= \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)} \int_{-1}^1 (x - 1)^{n-2} (x + 1)^{n+2} dx = \\
 &= (-1)^n \frac{n!^2}{(2n)!} \int_{-1}^1 (x + 1)^{2n} dx
 \end{aligned}$$

d. Infine, osservando che  $\int_{-1}^1 (x + 1)^{2n} dx = 2^{2n+1}/(2n + 1)$  si ottiene

$$(G_n, G_m) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (3.2)$$

I polinomi  $G_n$  sono detti polinomi di Legendre, e sono un sistema ortogonale, con la normalizzazione data sopra. La formula (3.1) è detta “formula di Rodrigues” per i polinomi di Legendre. Formule analoghe esistono per altre famiglie di polinomi ortogonali.

### 3.3 L’equazione di Sturm-Liouville per $G_n$

Qui indico le derivate con l’apice:  $Df = f' = \frac{d}{dx}f$ . Considero il polinomio

$$((1 - x^2)G'_n)'$$

Ricordando qual è il primo termine dello sviluppo in potenze di  $G_n$ , è facilmente mostrare che si tratta di un polinomio di grado  $n$ , e che nel suo sviluppo, il coefficiente di  $x^n$  è  $-n(n+1)\frac{1}{2^n n!}$ .

Integrando per parti,

$$(((1 - x^2)G'_n)', G_m) = - \int_{-1}^1 (1 - x^2)G'_n G'_m = (((1 - x^2)G'_m)', G_n)$$

Ricordando che  $G_n$  è ortogonale ai polinomi di grado inferiore e che  $G_m$  è ortogonale ai polinomi di gradi inferiore, dalla simmetria di questa espressione si ottiene che se  $n \neq m$ ,

$$(((1 - x^2)G'_n)', G_m) = 0.$$

Usando che  $((1 - x^2)G'_n)' = -n(n+1)\frac{1}{2^n n!}x^n + \dots$ , si ottiene

$$(((1 - x^2)G'_n)', G_n) = -n(n+1)(G_n, G_n)$$

Quindi, per ogni  $m$ ,

$$(((1 - x^2)G'_n)' + n(n+1)G_n, G_m) = 0$$

Questa uguaglianza vale anche per le combinazioni lineari delle  $G_m$ , e dunque per qualunque elemento di  $L^2$ . Se segue che  $G_n$  risolve l’equazione di Sturm-Liouville

$$((1 - x^2)G'_n)' = -n(n+1)G_n$$

o, equivalentemente

$$(1 - x^2)G_n'' - 2xG_n' = -n(n + 1)G_n.$$

Viceversa, mostriamo che non esistono altre soluzioni al problema di Sturm Liouville

$$((1 - x^2)f')' = \lambda f$$

Il motivo è che il sistema di soluzioni trovate è una base di  $L^2$ . Sia  $f$  una funzione regolare e in  $L^2$  che risolve questa equazione per un certo  $\lambda$ . Sia  $f_k = (G_k, f)$ . Moltiplicando scalarmente per  $G_k$  l'equazione, e notando che l'operatore

$$Sf \mapsto ((1 - x^2)f')'$$

è simmetrico, si ottiene

$$\lambda f_k = \lambda(G_k, f) = (G_k, Sf) = (SG_k, f) = -k(k + 1)f_k$$

Dunque se  $\lambda$  non è uguale a  $-n(n + 1)$  per un qualche  $n$ , allora  $f_k$  è zero per ogni  $k$ , e dunque  $f$  è nulla, perché i  $G_k$  sono un sistema completo. Dunque  $f$  può essere una autofunzione solo se è proporzionale a un qualche  $G_n$ .

### 3.4 Zeri di $G_n$

$G_n$  soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine in  $(-1, 1)$ , ed è una funzione non nulla, dunque non può avere zeri non semplici in  $(-1, 1)$ , altrimenti il teorema di esistenza e unicità porterebbe a concludere che è una funzione nulla. Inoltre  $G_n$  non ha zeri agli estremi, come abbiamo calcolato.

Sia  $m \leq n$  il numero di zeri, necessariamente semplici, che  $G_n$  ha nell'intervallo  $(-1, 1)$ .  $G_n$  cambia segno negli zeri, dunque

$$\int_{-1}^1 G_n(x) \prod_{i=1}^m (x - x_i) dx$$

ha segno definito. Però  $G_n$  è ortogonale ai polinomi di grado inferiore a  $n$ , quindi deve essere  $m = n$ . Se ne conclude che  $G_n$  ha tutti i suoi  $n$  zeri semplici e interni a  $(-1, 1)$ .

## 4 Altre basi di polinomi

Introducendo gli spazi pesati, si possono costruire altri sistemi completi di funzioni ortogonali, legati ai polinomi.

### 4.1 Spazi pesati $L_w^2$

Sia  $w(x) \geq 0$  su  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ , con  $w$  misurabile. Si definisce lo spazio pesato  $L_w^2$  attraverso il prodotto scalare

$$(f, g)_w = \int_{\Omega} w(x) f(x) g(x) dx$$

Supporrò sempre che  $w(x) = 0$  al più su un sottoinsieme di misura nulla di  $\Omega$  (per esempio agli estremi, se  $\Omega$  è in intervallo di  $\mathbb{R}$ ). Inoltre saranno interessanti i casi in cui  $w$  diverge in qualche punto.

L'operatore

$$U : L_w^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

definito da

$$Uf = \sqrt{w}f$$

è una biezione che conserva il prodotto scalare e dunque la norma (cioè è una biezione isometrica):

$$(f, g)_w = (Uf, Ug).$$

Non è difficile provare che se  $w$  è continua le funzioni continue a supporto compatto sono dense in  $L_w^2(\Omega)$ , sapendo che sono dense in  $L^2(\Omega)$ .

(Più in generale, si posso invocare i teoremi sulla densità delle funzioni continue in spazi di misura).

**Lemma 4.1.** *Densità delle funzioni continue a supporto compatto*

*Sia  $\Omega$  un aperto e sia  $w$  continua in  $\Omega$ . Le funzioni a supporto compatto in  $\Omega$  sono dense in  $L_w^2(\Omega)$ .*

*Dimostrazione.* Dato  $R > 0$ , sia  $\Omega_R = \Omega \cap B_R$ , con  $B_R = \{\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\| < R\}$ . Data  $f \in L_w^2(\Omega)$  e dato  $\varepsilon > 0$ , per sommabilità dell'integrando esiste  $R > 0$  tale che

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_R} w f^2 < \varepsilon.$$

Sia ora  $\Omega_{M,R} = \{\mathbf{x} \in \Omega_R \mid 1/M < w(\mathbf{x}) < M\}$ , con  $M > 1$ . Per continuità di  $w$ , questo insieme è aperto. Per la continuità di  $w$  e per il fatto che i suoi zeri formano un insieme di misura nulla, la funzione  $\chi_{\{\mathbf{x} \notin \Omega_{R,M}\}}$  tende a 0 q.o. in  $\Omega_R$ , per  $M \rightarrow +\infty$ . Dunque

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_R \setminus \Omega_{R,M}} w f^2 = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_R} \chi_{\{\mathbf{x} \in \Omega_{R,M}\}} w(\mathbf{x}) f^2(\mathbf{x}) = 0$$

per convergenza dominata. Perciò per un  $M$  abbastanza grande

$$\int_{\Omega_R \setminus \Omega_{R,M}} w f^2 < \varepsilon$$

La funzione  $f^2$  è sommabile in  $\Omega_{R,M}$ , infatti

$$\int_{\Omega_{R,M}} f^2 \leq M \int_{\Omega_{R,M}} w^2 f^2$$

dunque, a  $M$  fissato, esiste  $f_\varepsilon$  a supporto compatto nell'aperto  $\Omega_{R,M}$  tale che

$$\int_{\Omega_{R,M}} |f - f_\varepsilon|^2 \leq \varepsilon/M$$

Prolungando  $f_\varepsilon$  a 0 su tutto il resto di  $\Omega$  si ottiene

$$\int_{\Omega} w|f - f_\varepsilon|^2 = \int_{\Omega \setminus \Omega_R} w|f - f_\varepsilon|^2 + \int_{\Omega_R \setminus \Omega_{R,M}} w|f - f_\varepsilon|^2 + \int_{\Omega_{R,M}} w|f - f_\varepsilon|^2 < \varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon/M = 3\varepsilon.$$

Considero ora un caso particolare, più utile.

**Proposizione 4.1.** *Densità dei polinomi*

Se  $I$  un intervallo limitato di  $\mathbb{R}$ , e  $w \geq 0$  sia continua e sommabile su  $I$ . Allora i polinomi sono densi in  $L_w^2(I, \mathbb{R})$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f$  una funzione continua, e sia  $p_n$  una sequenza di polinomi che tende a  $f$  uniformemente. L'ipotesi di sommabilità di  $w$  permette di affermare che questa convergenza è anche in  $L_w^2$ , infatti

$$\|f - p_n\|_w^2 \leq \|f - p_n\|_\infty \int_I w$$

Poiché le funzioni continue sono dense in  $L_w^2(I)$ , ne segue che  $\text{span}\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è denso in  $L_w^2(I)$ .

## 4.2 Polinomi di Tchebyshev

Considero lo spazio pesato  $L_w^2((-1, -1))$  con  $w = 1/\sqrt{1-x^2}$ , dotato del prodotto scalare

$$(f, g)_w = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)$$

Con il cambiamento di variabile  $\cos x = \vartheta$  si ha

$$\sqrt{1-x^2} dx = d\vartheta$$

dunque

$$(f, g)_w = \int_0^\pi f(\cos \vartheta)g(\cos \vartheta) d\vartheta$$

Noto che

$$\mathcal{A} : L_w^2((-1, 1)) \rightarrow L^2((0, \pi))$$

definito da

$$(\mathcal{A}f)(\theta) = f(\cos \theta)$$

è una biezione isometrica.

Poiché  $\{\cos(n\vartheta)\}_{n \geq 0}$  è un sistema ortogonale completo in  $L^2((0, \pi))$ , ottengo che

$$T_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N}$$

è un sistema ortogonale completo in  $L_w^2((-1, 1))$ . Ne segue che

$$(1 - x^2)^{-1/4} T_n(x)$$

è una sistema ortogonale completo di  $L^2((-1, 1))$ .

Poiché

$$\begin{aligned} \cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta) &= e^{in\vartheta} = (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^{n-k} (\cos \vartheta)^k (\sin \vartheta)^{n-k}, \end{aligned}$$

passando alle parti reali, ottengo che

$$\cos(n\vartheta) = \cos^n \vartheta - \binom{n}{2} (\cos \vartheta)^{n-2} \sin^2 \vartheta + \binom{n}{4} (\cos \vartheta)^{n-4} \sin^4 \vartheta - \dots$$

Da questa espressione e dal fatto che  $\sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta$  si ha che

$$T_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$$

detto  $n$ -esimo polinomio di Tchebyshev, è un polinomio di grado  $n$ . Per  $n = 0$  si definisce  $T_0 = 1$ .

La normalizzazione è tale che  $T_n(x) = x^n + \dots$ . Per dimostrarlo, si usa lo sviluppo del binomio

$$\cos^n \vartheta = \left( \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \right)^n$$

Lascio i dettagli al lettore.

Usando che  $D_\vartheta^2 \cos(n\vartheta) = -n^2 \cos(n\vartheta)$ , e che

$$\partial_\vartheta = -\sqrt{1-x^2} \partial_x$$

si mostra facilmente che  $T_n$  risolve

$$\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}T_n')' = -n^2 T_n$$

che corrisponde al problema di Sturm-Liouville

$$(\sqrt{1-x^2}T_n')' = -n^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n$$

Esplicitando le derivate di  $T_n$ :

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' = -n^2 T_n$$

### 4.3 Polinomi di Hermite

Considero  $L_w^2(\mathbb{R})$ , con  $w = e^{-x^2}$ . Definisco polinomi di Hermite tramite la formula di Rodrigues

$$H_n = (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}$$

È semplice mostrare che

- a.  $H_n(x)$  è un polinomio di grado  $n$
- b.  $H_n(x) = 2^n x^n + \dots$
- c. Sia  $\phi$  regolare e a crescita al più polinomiale. Integrando per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \phi(x) H_n(x) dx = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \phi(x) D^n e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} D^n \phi(x) e^{-x^2} dx$$

Si può notare che questa affermazione vale anche se  $|\phi(x)| \leq ce^{\alpha x^2}$ , con  $\alpha \in (0, 1)$ .

- d. Scegliendo  $\phi = x^k$  e notando che se  $k < n$  allora  $D^n x^k = 0$ , si ha che  $(x^k, H_n)_w = 0$  per  $k < n$ .
- e. Calcolare la normalizzazione. Osservo intanto che

$$(x^n, H_n)_w = \int_{\mathbb{R}} D^n x^n e^{-x^2} dx = n! \sqrt{\pi}$$

Ne segue, usando il punto **b**, che

$$(H_n, H_n)_w = 2^n (x^n, H_n) = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Se ne conclude che  $H_n$  è una famiglia di polinomi di grado  $n$ , che costituisce un sistema ortogonale in  $L_w^2(\mathbb{R})$ , e dunque

$$\frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

è un sistema ortonormale di  $L^2(\mathbb{R})$ . Successivamente, proveremo che è un sistema ortonormale completo, cioè che, equivalentemente,

$$\text{span}\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

è denso in  $L_w^2$ , cioè

$$\text{span}\{e^{-x^2/2} x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

è denso in  $L^2(\mathbb{R})$ . Si noti che non possiamo utilizzare Stone-Weierstrass, perché  $\mathbb{R}$  non è compatto.

#### 4.4 L'equazione di Sturm-Liouville per i polinomi di Hermite

Calcoliamo preliminarmente  $H'_n$ . Poiché  $H_n$  ha grado  $n$ ,  $H'_n$  ha grado  $n - 1$ , e, per il punto b. del paragrafo precedente,  $H'_n = n2^n x^{n-1} + \dots = 2nH_{n-1} + \dots$ . Ne segue che

$$H'_n = 2nH_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} c_k H_k$$

Troviamo i coefficienti  $c_k$ . Sia  $k \leq n - 2$ :

$$(H'_n, H_k)_w = c_k (H_k, H_k)_w$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}(H'_n, H_k) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H'_n(x) H_k(x) dx = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} H'_n(x) D^k e^{-x^2} dx = \\ &= (-1)^{k+1} \int_{\mathbb{R}} H_n(x) D^{k+1} e^{-x^2} dx = (H_n, H_{k+1})\end{aligned}$$

Dunque

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}$$

Consideriamo ora l'operatore

$$A : f \rightarrow (e^{-x^2} f')'$$

definito sulle funzioni regolari. È facile verificare (esercizio) che  $A$  è simmetrico, cioè

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

per ogni  $f$  e  $g$  regolari e che non divergono più rapidamente di  $e^{\alpha x^2}$  con  $\alpha < 1/2$ . Valutiamo come agisce  $A$  su  $H_n$ :

$$\begin{aligned}(AH_n, H_m) &= - \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H'_n H'_m = -4nm \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_{n-1} H_{m-1} = -4nm \delta_{nm} 2^{n-1} (n-1)! \\ &= -4n^2 \delta_{nm} \frac{1}{2n} 2^n (n)! = -2n \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n H_m\end{aligned}$$

Dunque

$$(AH_n + 2nH_n e^{-x^2}, H_m) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Poiché  $e^{x^2} H_n + 2nH_n$  è un polinomio di grado  $n$  e gli  $H_m$  sono indipendenti e generano i sottospazi dei polinomi, posso concludere che

$$AH_n = -2nH_n$$

cioè

$$e^{x^2} (e^{-x^2} H'_n)' = -2nH_n$$

Equivalentemente,  $H_n$  risolve il problema di Sturm-Liouville

$$(e^{-x^2} H'_n)' = -2ne^{-x^2} H_n$$

e anche

$$H''_n - 2xH'_n = -2nH_n$$

## 4.5 Polinomi di Laguerre

Considera  $L^2_w(\mathbb{R}^+)$ , con  $w = e^{-x}$  e considera i polinomi di Laguerre

$$L_n = e^x D^n (x^n e^{-x})$$

Mostra che

**a.**  $L_n(x)$  è un polinomio di grado  $n$

**b.**  $L_n(x) = (-1)^n x^n + \dots + n!$

**c.**  $|D^n(x^n e^{-x})| \leq c_{n,\varepsilon} e^{-(1-\varepsilon)x}$ , per  $\varepsilon \in (0, 1)$  (questa stima serve per poter fare gli integrali per parti nel punto successivo).

**d.** Per ogni  $\phi$  regolare che non diverga più di  $e^{\alpha x}$  con  $\alpha \in (0, 1)$ ,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \phi(x) L_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \phi(x) D^n x^n e^{-x} dx = (-1)^n \int_0^{+\infty} D^n \phi(x) x^n e^{-x} dx$$

**e.**  $(x^k, L_n)_w = 0$  per  $k < n$

**f.**  $(x^n, L_n)_w = (-1)^n \int_0^{+\infty} D^n x^n x^n e^{-x} dx = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = (-1)^n n!^2$

**g.**  $(L_n, L_m)_w = n!^2 \delta_{n,m}$

Se ne conclude che  $L_n$  è una famiglia di polinomi di grado  $n$ , che costituisce un sistema ortogonale in  $L_w^2(\mathbb{R}^+)$ , e dunque

$$\frac{1}{n!} e^{-x/2} L_n(x)$$

è un sistema ortonormale di  $L^2(\mathbb{R}^+)$ . Successivamente, proveremo che è un sistema ortonormale completo. Per esercizio potete provare a mostrare che

$$\text{span}\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

è denso in  $L_w^2(\mathbb{R}^+)$  (affermazione equivalente alla completezza dei polinomi di Laguerre) ma è improbabile che ci riusciate usando argomenti elementari.

## 4.6 L'equazione di Sturm-Liouville per i polinomi di Laguerre

Calcoliamo per parti

$$\int_0^{+\infty} (x e^{-x} L'_n)' L_m = - \int_0^{+\infty} e^{-x} L'_n L'_m = \int_0^{+\infty} (x e^{-x} L'_m)' L_n$$

Poiché

$$(x e^{-x} L'_n)' = e^{-x} (x L''_n + (1-x) L'_n)$$

e  $x L''_n$  ha grado  $n-1$  mentre  $(1-x)$  ha grado  $n$ , ne segue che per  $m \geq n$  il primo integrale l'integrale può essere diverso da zero solo se  $m = n$ . Analogamente, per  $m \leq n$  l'ultimo integrale può essere diverso da zero solo se  $m = n$ . Quindi l'integrale è nullo se  $m \neq n$ .

Calcoliamone il valore per  $m = n$ :

$$x L''_n + (1-x) L'_n = -n(-1)^n x^n + \dots = -n L_n + \dots$$

Dunque per ogni  $m$ :

$$\int_0^{+\infty} (x e^{-x} L'_n)' L_m = -n(L_n, L_m)$$

Per ortogonalità dei polinomi di Laguerre concludo che

$$(x e^{-x} L'_n)' = -n L_n$$



(qui non serve la completezza, perché non si esce dallo spazio dei polinomi). Equivalentemente

$$xL_n'' + (1-x)L_n' = -nL_n$$

**Esercizio 12. \* Ottimalità di  $G_n$**

Sia  $G_n$  l' $n$ -esimo polinomio di Legendre, e sia  $C_n = (2n)!/(2^n n!)$  il coefficiente di  $x^n$  in  $G_n$ . Il polinomio  $G_n/C_n$  è dunque monico. Dimostra che tra tutti i polinomi monici di grado  $n$ ,  $G_n/C_n$  è quello con la minima norma quadratica.

Suggerimento: vedi CH pag 86.

**Esercizio 13. \* Ottimalità di  $T_n$**

Sia  $T_n$  l' $n$ -esimo polinomio di Tchebyshev. Mostra che tra tutti i polinomi monici di grado  $n$ , è quello che minimizza la norma  $L^\infty$ .

Suggerimento: vedi CH pag 89.

**Esercizio 14. \* Zeri dei polinomi ortogonali**

Sia  $\{\phi_n(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  la famiglia di polinomi che si ottiene per ortonormalizzazione di  $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  nello spazio pesato  $L_w^2((a, b))$ , con  $w \geq 0$ , nullo al più agli estremi  $a$  e  $b$ . Usando lo stesso ragionamento del punto 3.4 mostra che  $\phi_n$  ha esattamente  $n$  zeri semplici in  $(a, b)$ . Mostra anche che non è necessario conoscere a priori la semplicità degli zeri.

## 4.7 Funzioni generalizzate di Legendre

Derivando e manipolando le basi di polinomi si ottengono altre basi di polinomi.

Definisco le funzioni generalizzate di Legendre di ordine  $k \geq 0$  come

$$G_{n,k} = (1-x^2)^{k/2} D^k G_n$$

che sono funzioni non nulle per  $n \geq k$  (e in particolare sono polinomi se  $k$  è pari). Mostro che a  $k$  fissato si tratta di un sistema ortogonale:

$$(G_{n,k}, G_{m,k}) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^k D^k G_n D^k G_m = (-1)^k \int_{-1}^1 G_n D^k ((1-x^2)^k D^k G_m)$$

infatti, ogni derivata di ordine  $h < k$  di  $(1-x^2)^k D^k G_m$  si annulla al bordo. Il grado del polinomio che moltiplica  $G_n$  è  $-k + 2k - k + m = m$ , dunque l'integrale è nullo se  $m < n$ . Integrando per parti rispetto a  $G_m$ , si ottiene la stessa conclusione per  $m > n$ .

A questo punto è semplice concludere che, a meno di costanti di normalizzazione, le funzioni  $G_{n,k}$  sono il risultato dell'ortogonalizzazione di  $(1-x^2)^{k/2} x^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . In modo equivalente, si può affermare che i polinomi  $D^k G_n$  sono il risultato, a meno della normalizzazione, dell'ortonormalizzazione di  $x^n$  in  $L_w^2((-1, 1))$  con  $w = (1-x^2)^k$ .

Anche le funzioni generalizzate di Legendre soddisfano un'equazione di Sturm-Liouville:

$$((1-x^2)G_{n,k}')' - \frac{k^2}{1-x^2} G_{n,k} = -n(n+1)G_{n,k}$$

È abbastanza semplice mostrarlo nel caso  $k = 1$ . Secondo [CH], il caso generale segue da un calcolo esplicito, che però non sembra essere facilissimo.

## 4.8 Funzioni generalizzate di Laguerre

Si possono generalizzare i polinomi di Laguerre. Si considerino i polinomi

$$L_n^{(k)}(x) = (-1)^k D^k L_{n+k}$$

con  $n \geq 0, k \geq 0$ .

Sia  $w = e^{-x}$  e  $w_k = x^k e^{-x}$ . È facile mostrare che

**a.**  $L_n^{(k)}$  è un polinomio di grado  $n$

**b.** Sia  $m < n$ . Integrando per parti

$$(x^m, L_n^{(k)})_{w_k} = (-1)^k (x^{m+k}, D^k L_{n+k})_w = \frac{(m+k)!}{k!} (x^m, L_n)_w = 0$$

dove ho usato che per ogni  $p < q$  si ha che  $(x^p, L_q)_w = 0$ ,

**c.**

$$(x^n, L_n^{(k)})_{w_k} = \frac{(n+k)!}{k!} (x^n, L_n)_w = (-1)^2 n!^2 \frac{(n+k)!}{k!}$$

Da queste proprietà, procedendo come abbiamo già fatto per i polinomi di Laguerre, si ottiene che  $\{L_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  è il sistema ortonormale in  $L_{w_k}^2$  che si ottiene ortogonalizzando  $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Si può mostrare, ma qui non lo farò, che  $L_n^{(k)}$  risolvono il problema di Sturm-Liouville

$$xD^2 L_n^{(k)} + (k+1-x)L_n^{(k)} = -nL_n^{(k)}$$

Più in generale, dato  $\alpha \geq 0$ , le funzioni

$$L_n^{(\alpha)} = x^{-\alpha} e^x D^n (x^{n+\alpha} e^{-x})$$

risolvono

$$xD^2 L_n^{(\alpha)} + (\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)} = -nL_n^{(\alpha)}$$

## 5 Armoniche sferiche

In questa sezione scriveremo il laplaciano sulla superficie sferica, e ne determineremo le autofunzioni.

### 5.1 Il laplaciano in coordinate generalizzate

Il laplaciano è l'operatore

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$$

Il linea di principio, nulla osta a ottenere la sua espressione nella variabile  $\mathbf{y}$ , se  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$ , determinando  $\partial_{x_i}^2$  in funzione delle derivate nelle variabili  $\mathbf{y}$ . Chiunque ci abbia mai provato sa che però non è semplice e non è la strada giusta, perchè si perde di vista la struttura di divergenza dell'operatore. Procediamo invece cambiando variabile nell'uguaglianza

$$\int \nabla \alpha \cdot \nabla \beta = - \int \Delta \alpha \beta$$

valida per tutte le funzioni  $C_0^\infty$ . Ovviamente  $d\mathbf{x} = J(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ , dove

$$J(\mathbf{y}) = \left| \det \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{y}} \right|$$

Inoltre

$$\partial_{x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \partial_{y_j}$$

e quindi

$$\nabla_x = (\partial \Phi^{-1})^t \nabla_y.$$

Scaricando la matrice sul primo termine, l'uguaglianza integrale scritta sopra diventa

$$\int J \partial \Phi^{-1} (\partial \Phi^{-1})^t \nabla_y \alpha \cdot \nabla_y \beta d\mathbf{y} = - \int J \Delta_y \alpha \beta d\mathbf{y}.$$

Integrando per parti nel primo membro, ed uguagliando gli integrandi, si ottiene l'espressione del laplaciano nella variabile  $\mathbf{y}$ :

$$\Delta_y \alpha = \frac{1}{J} \nabla_y \cdot \left( J \partial \Phi^{-1} (\partial \Phi^{-1})^t \nabla_y \alpha \right)$$

Questa espressione diventa più elegante in termini della **metrica** indotta dal cambiamento di variabili. Senza usare il linguaggio della geometria differenziale (che invece sarebbe opportuno), data

$$\Phi : U \rightarrow V$$

consideriamo al primo ordine in  $\mathbf{h}$  il vettore differenza

$$\Phi(\mathbf{y} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{y}) \approx \partial \Phi(\mathbf{y}) \mathbf{h}$$

La sua lunghezza al quadrato, come elemento di  $V$ , è dato dalla forma quadratica

$$(\partial \Phi \mathbf{h}, \partial \Phi \mathbf{h}) = (\partial \Phi^t \partial \Phi \mathbf{h}, \mathbf{h})$$

La matrice

$$g = \partial\Phi^t \partial\Phi$$

è la metrica, cioè è la matrice che permette di ridefinire il prodotto scalare nello spazio delle  $\mathbf{y}$ , in modo che dia la lunghezza euclidea nello spazio delle  $\mathbf{x}$ . Si noti che  $g$  dipende da  $\mathbf{y}$ , ed è una matrice simmetrica definita positiva.

Notando che

$$g^{-1} = \partial\Phi^{-1} (\partial\Phi^{-1})^t$$

e che

$$\det g = \det \partial\Phi^2 = J^2$$

è semplice scrivere l'espressione del laplaciano utilizzando  $g$ :

$$\Delta_y \alpha = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \nabla_y \left( \sqrt{\det g} g^{-1} \nabla_y \alpha \right)$$

Oltre ad essere più compatta, questa espressione ha il vantaggio di avere significato anche se  $\Phi$  non è un diffeomorfismo, ma è una rappresentazione parametrica di una varietà, o, ancora più astrattamente, se  $g$  è una metrica assegnata su una varietà riemanniana. In questi casi, l'operatore che abbiamo definito è l'operatore di **Laplace-Beltrami**.

## 5.2 $\Delta$ in coordinate sferiche e $\Delta_{S^2}$

In coordinate sferiche  $\mathbf{x} = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

dove  $r > 0$ ,  $\vartheta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Sia

$$\partial_r \mathbf{x} = \mathbf{x}/r \quad \partial_\vartheta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ -r \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \partial_\varphi \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si nota che sono tre vettori ortogonali, dunque

$$dx^2 = r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + dr^2$$

(rispetto alla precedente, in questa espressione,  $h_1 = d\vartheta$ ,  $h_2 = d\varphi$ ,  $h_3 = dr$ ).

Consideriamo la parte della metrica che dipende solo dalle variabili angolari, e per  $r = 1$ , cioè consideriamo la metrica per la superficie della sfera unitaria  $S^2$ :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad \det g = \sin^2 \vartheta.$$

Dunque l'operatore di Laplace-Beltrami è

$$\Delta_{S^2} \alpha = \frac{1}{\sin \vartheta} \begin{pmatrix} \partial_\vartheta \\ \partial_\varphi \end{pmatrix} \cdot \left( \sin \vartheta \begin{pmatrix} \partial_\vartheta \alpha \\ \partial_\varphi \alpha / \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \alpha) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \alpha. \quad (5.1)$$

Se invece consideriamo tutto il cambiamento di variabili, otteniamo l'espressione del laplaciano in coordinate sferiche

$$\Delta = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \alpha) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \alpha + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \alpha) \quad (5.2)$$

### 5.3 Le armoniche sferiche

In questa sezione troveremo le autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami sulla superficie sferica, cioè le soluzioni del problema agli autovalori

$$\Delta_{S^2}\alpha = \lambda\alpha.$$

Procediamo per separazione di variabili:  $\alpha = A(\vartheta)B(\varphi)$ . Si ottiene

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \partial_{\vartheta}(\sin \vartheta \partial_{\vartheta} A) + \frac{A}{\sin^2 \vartheta} \frac{1}{B} \partial_{\varphi}^2 B = \lambda A$$

che è risolubile solo se  $B''/B$  è costante. Poiché  $\varphi$  è una variabile angolare, a meno di combinazioni lineari con  $|k|$  fissato,

$$B = B_k(\varphi) = e^{ik\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'equazione per  $A$  diventa il problema di Sturm-Liouville

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \partial_{\vartheta}(\sin \vartheta \partial_{\vartheta} A) - \frac{k^2 A}{\sin^2 \vartheta} = \lambda A$$

Cambiando variabile  $u = \cos \vartheta$ , con  $\partial_{\vartheta} = -\sin \vartheta \partial_u$ , si ottiene

$$\partial_u \left( (1 - u^2) \partial_u A \right) - \frac{k^2 A}{1 - u^2} = \lambda A$$

di cui conosciamo già un sistema completo di soluzioni in  $L^2$ , dato dalle funzioni generalizzate di Legendre:

$$\lambda = -n(n+1) \quad A(u) = G_{n,|k|}(u)$$

Le armoniche sferiche sono il sistema ortonormale

$$Y_{n,k} = c_{n,k} e^{ik\varphi} G_{n,|k|}(\cos(\vartheta))$$

con  $n \geq |k|$ , e dove  $c_{n,k}$  è un coefficiente di normalizzazione esplicitamente computabile. Poiché

$$Y_{n,h} Y_{n,k} = \overline{c_{n,h}} c_{n,k} e^{i(k-h)\varphi} G_{n,|h|}(\cos \vartheta) G_{n,|k|}(\cos \vartheta)$$

si vede che l'ortogonalità è dovuta all'integrazione nella variabile  $\varphi$ , che dà 0 se  $k \neq h$ . Notando che  $\int_{-1}^1 f(u) du = \int_0^\pi f(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$ , si ottiene la normalizzazione dall'uguaglianza

$$\frac{1}{|c_{n,k}|^2} = 2\pi \int_0^1 G_{n,|k|}^2(u) dy.$$

Anche se l'ultimo integrale è esplicitamente calcolabile, non ne riporto qui il valore.

**Teorema 5.1.** *Armoniche sferiche*

Le armoniche sferiche  $\{Y_{n,|k|}\}_{k \in \mathbb{Z}, n \geq |k|}$  sono una base per  $L^2(S^2; \mathbb{C})$

In generale,  $Y_{n,k}$  e  $Y_{m,h}$  sono ortogonali se  $k \neq h$ , e se  $k = h$  sono ortogonali se  $n \neq m$  perché le corrispondenti funzioni generalizzate di Legendre sono ortogonali. Complessivamente, le armoniche sferiche sono un sistema ortonormale di funzioni definite su  $S^2$ . La completezza segue dalla completezza del sistema  $e^{ik\varphi}$  per le funzioni periodiche in  $\varphi$ , e dalla completezza

delle funzioni generalizzate di Legendre  $G_{n,|k|}(u)$ , per  $n \geq |k|$ , per le funzioni nella variabile  $u = \vartheta$  pesando lo spazio con  $\sin \vartheta$ .

A  $n$  fissato le armoniche sferiche sono  $2n + 1$ . Indico con  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  le componenti del versore  $\hat{\mathbf{x}}$ , cioè

$$\begin{cases} \tilde{x} = \sin \vartheta \cos \varphi \\ \tilde{y} = \sin \vartheta \sin \varphi \\ \tilde{z} = \cos \vartheta \end{cases}$$

e quindi

$$r(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y, z)$$

Ricordo che  $G_{n,|k|}(\cos \vartheta) = (1 - \cos^2 \vartheta)^{|k|/2} (D^{|k|} G_n)(\cos \vartheta) = (\sin \vartheta)^{|k|} (D^{|k|} G_n)(\cos \vartheta)$ . Noto che

$$e^{ik\varphi} (\sin \vartheta)^{|k|} = (\cos \varphi \sin \vartheta \pm i \sin \varphi \sin \vartheta)^{|k|} = (\tilde{x} \pm i\tilde{y})^{|k|}$$

con  $\pm$  a seconda del segno di  $k$ . Dunque le armoniche sferiche, espresse nelle variabili  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ , sono

$$Y_{n,k} = c_{n,k} (\tilde{x} \pm i\tilde{y})^{|k|} D^{|k|} G_n(\tilde{z})$$

Consideriamo ora

$$P_n(x, y, z) = r^n Y_{n,k} = c_{n,k} r^{|k|} (\tilde{x} \pm i\tilde{y})^{|k|} r^{n-|k|} D^{|k|} G_n(\tilde{z})$$

Osservo che

$$r^{|k|} (\tilde{x} \pm i\tilde{y})^{|k|} = (x \pm iy)^{|k|}$$

è un polinomio omogeneo in  $x, y$  di grado  $|k|$ . Il polinomio  $D^{|k|} G_n(\tilde{z})$  contiene solo i termini in  $\tilde{z}^{n-|k|}, \tilde{z}^{n-|k|-2}, \tilde{z}^{n-|k|-4}$  etc., che moltiplicati per  $r^{n-|k|}$  danno:  $z^{n-|k|}, z^{n-|k|-2} r^2 = z^{n-|k|-2} (x^2 + y^2 + z^2), z^{n-|k|-4} (x^2 + y^2 + z^2)^2$ , etc. Tutti i termini sono polinomi omogenei di grado  $n - |k|$ . In definitiva  $P_n$  è un polinomio omogeneo di grado  $n$  nelle variabili  $x, y, z$ .

Consideriamo ora il laplaciano di  $P_n(x, y, z) = r^n Y_{n,k}(\vartheta, \varphi)$ :

$$\Delta P_n = r^n \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} Y_{n,k} + Y_{n,k} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 r^n) = r^{n-1} (\Delta_{S^2} Y_{n,k} + n(n+1) Y_{n,k}) = 0$$

Dunque  $P_n$  è un **polinomio armonico** di grado  $n$ . La relazione con le armoniche sferiche ci fa notare che ci sono  $2n + 1$  polinomi armonici indipendenti di grado  $n$  (questa informazione si può ovviamente ottenere anche imponendo l'armonicità a un generico polinomio omogeneo di grado  $n$  (vedi [CH])).

Concludo con una osservazione geometrica. Il sottospazio  $V_n$  delle funzioni  $L^2(S^2, \mathbb{R})$  delle autofunzioni di  $\Delta_{S^2}$  di autovalore  $n(n+1)$  ha dimensione  $2n+1$  ed ha come base le armoniche sferiche (dopo aver separato parte reale e parte immaginaria), per  $k = -n, \dots, n$ .  $V_n$  è in biiezione con i polinomi omogenei armonici di grado  $n$ .

Cambiando il sistema di coordinate sferiche (cioè cambiando la terna di riferimento  $x, y, z$ ),  $V_n$  rimane invariante, ma abbiamo a disposizione un altro sistema di armoniche sferiche. Dunque, data  $M \in SO(3)$  matrice di rotazione nello spazio,  $M$  mappa una combinazione di armoniche sferiche in un'altra combinazione di armoniche sferiche. Equivalentemente, mappa polinomi armonici omogenei di grado  $n$  in polinomi armonici omogenei di grado  $n$ . Dunque,  $M$  agisce come una matrice  $(2n+1) \times (2n+1)$ . Il sottogruppo del gruppo delle matrici  $(2n+1) \times (2n+1)$  che si ottiene variando  $M$  è una **rappresentazione** del gruppo  $SO(3)$ .

## 5.4 Funzione generatrice per i polinomi di Legendre

Ricordo che la funzione  $1/|\mathbf{x}|$  è armonica per  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , infatti  $\Delta 1/|\mathbf{x}| = -4\pi\delta(\mathbf{x})$ . Sia  $\mathbf{x}$  diretto come l'asse  $\mathbf{e}_3$ , con  $|\mathbf{x}| = R$ , e sia  $\mathbf{y}$  di modulo  $r < R$ . Sia  $\vartheta$  l'angolo tra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Dunque

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \vartheta}} = \frac{1}{R\sqrt{1 + r^2/R^2 - 2r/R \cos \vartheta}}$$

Sviluppando in serie (che converge per  $r < R$ ) si ottiene

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n}{R^{n+1}} Q_n(\cos \vartheta)$$

dove la funzione non nulla  $Q_n(u)$  è un polinomio di grado  $n$  nella variabile  $u = \cos \vartheta$ . Ometto la dimostrazione di questo fatto, perché mostreremo un'affermazione più precisa.

La funzione è armonica in  $\mathbf{y}$ , dunque

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \left( Q_n(\cos \vartheta) \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r r^n) + r^n \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta (Q_n(\cos \vartheta))) \right)$$

Passando alla variabile  $u = \cos \vartheta$  si ottiene

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{n-2}}{R^{n+1}} (n(n+1)Q_n(u) + ((1-u^2)Q'_n(u))')$$

ma allora  $Q_n(u)$  è una funzione non nulla che soddisfa

$$n(n+1)Q_n(u) + ((1-u^2)Q'_n(u))' = 0$$

quindi è proporzionale a  $G_n(u)$ . Ponendo  $\cos \vartheta = 1$  nell'espressione iniziale, si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n}{R^{n+1}} Q_n(1) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR}} = \frac{1}{R-r} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n}{R^{n+1}}$$

Quindi,  $Q_n(1) = 1$ . Ne segue che  $Q_n(u) = G_n(u)$ .

I polinomi  $G_n$  sono dunque "generati" dall'espansione in serie di  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ , cioè

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \vartheta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n G_n(\cos \vartheta)$$

Esistono espressioni analge anche per le altre famiglie di polinomi. Per esempio, per i polinomi di Hermite:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x).$$

## 5.5 Espansione in multipoli del potenziale

Sia  $f(\mathbf{x})$  una densità di carica a supporto compatto. Il potenziale generato è

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

L'espansione della funzione di Green  $1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$  ci permette di determinare a ogni ordine in  $R = |\mathbf{x}|$  l'andamento asintotico del potenziale. Infatti, per  $\mathbf{x}$  lontano dal supporto di  $f$ ,

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n+1}} \int |\mathbf{y}|^n G_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

Il  $2^n$ -esimo momento di multipolo nella direzione  $\hat{\mathbf{x}}$  è definito come

$$M_n(\hat{\mathbf{x}}) = \int |\mathbf{y}|^n G_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

Vediamo cosa si intende con questa definizione. Il termine di ordine più grande per  $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$  si ottiene per  $n = 0$ , e il corrispondente momento di 1-polo, cioè di monopolo, è

$$M_0(\hat{\mathbf{x}}) = M_0 = \int f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

che è la carica totale (il polinomio  $G_0$  coincide con uno). Dunque il termine di ordine più grande dell'energia potenziale è

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} M_0$$

che è esattamente l'energia potenziale di una carica puntiforme di carica pari alla carica totale della distribuzione  $f$ .

Il polinomio  $G_1(\mathbf{x})$  è  $\mathbf{x}$ , infatti è ortogonale a 1 e vale 1 in 1. Dunque il termine di dipolo è

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|^2} \hat{\mathbf{x}} \cdot \int \mathbf{y} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

Si chiama momento di dipolo il vettore

$$\mathbf{m}_1 = \int \mathbf{y} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

L'energia potenziale dovuta a questo termine è la stessa data da due cariche opposte lungo  $\mathbf{m}_1$ , molto vicine... In termini matematici si tratta dell'energia potenziale generata dalla distribuzione

$$\mathbf{m}_1 \cdot \nabla \delta(\mathbf{x}).$$

Il termine di dipolo dà la prima correzione al potenziale di monopolo, che è di un ordine di grandezza più piccola. Nel caso di una distribuzione di carica totale nulla, il primo termine significativo è quello di dipolo, cioè una carica complessiva nulla, vista da lontano, appare come un dipolo.

Nel caso in cui il baricentro della carica positiva coincida con il baricentro della carica negativa, anche il momento di dipolo è nullo, e il primo termine significativo è il termine di quadrupolo. Per capire come è fatto, bisogna prima ricordare che  $|\mathbf{y}|^n G_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}})$  è un



polinomio (armonico) omogeneo di grado  $n$  nella variabile  $\mathbf{y}$ . Dunque il suo integrale potrà essere scritto come

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} m_{i_1 \dots i_n}^n \hat{\mathbf{x}}_{i_1} \cdots \hat{\mathbf{x}}_{i_n}$$

dove ogni indice varia da 1 a 3, e il tensore  $m_{i_1 \dots i_n}^n$  è invariante per permutazione degli indici, per la commutatività del prodotto.

Nel caso del quadrupolo, il tensore è dato dalla matrice simmetrica

$$A = \int \left( \frac{3}{2} |\mathbf{y}\rangle \langle \mathbf{y}| - \frac{1}{2} |\mathbf{y}|^2 \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

(la matrice  $|\mathbf{a}\rangle \langle \mathbf{b}|$  ha  $a_i b_j$  come elemento  $ij$ ). Il termine di potenziale di quadrupolo è dunque

$$\frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|^3} \hat{\mathbf{x}} \cdot A \hat{\mathbf{x}}.$$

Il termine di quadrupolo corrisponde al potenziale generato da due dipoli opposti e vicini (quindi dalle derivate seconde della distribuzione puntiforme).

Il termine successivo, quello di ottupolo, è governato da un tensore a tre indici che non scrivo. Mostrerò, attraverso l'espansione in armoniche sferiche, che in generale il momento del  $2^n$ -polo rispetto a  $\hat{\mathbf{x}}$  dipende solo da  $2n + 1$  coefficienti.

## 5.6 Espansione in armoniche sferiche

In questa sezione userò spesso la notazione

$$Y_{n,|k|}(\hat{\mathbf{x}}) = Y_{n,|k|}(\vartheta, \varphi)$$

L' $n$ -esimo polinomio di Legendre nella variabile  $\cos \vartheta$  è una delle armoniche sferiche, l'unica invariante per traslazioni in  $\varphi$  (cioè per rotazioni intorno all'asse  $\mathbf{e}_3$ ). Per la precisione

$$G_n(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} Y_{n,0}(\vartheta)$$

come segue dal fatto che le armoniche sferiche sono normalizzate a 1, mentre per  $G_n$  vale la (3.2) a pagina 25.

Consideriamo ora  $f = G_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}})$ . Se scelgo come asse per le coordinate sferiche quello di  $\hat{\mathbf{y}}$  ritrovo  $G_n(\cos \vartheta)$ , D'altra parte, per invarianza per rotazioni, deve comunque valere

$$\Delta_{S^2} G_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) = -n(n+1) G_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}})$$

Quindi  $G_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}})$  deve essere una combinazione lineare delle armoniche sferiche  $Y_{n,k}(\hat{\mathbf{x}})$ , con coefficienti che dipendono da  $\hat{\mathbf{y}}$ . D'altra parte, la funzione che stiamo considerando è una autofunzione dell'operatore di Laplace-Beltrami anche nella variabile  $\mathbf{y}$ , e sempre di autovalore  $-n(n+1)$ . Dunque i coefficienti sono combinazioni di armoniche sferiche in  $\mathbf{y}$ . In sintesi

$$G_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) = \sum_{k=-n}^n \sum_{h=-n}^n a_{k,h} Y_{n,k}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{n,h}(\hat{\mathbf{y}})$$

e questa scrittura è unica, per ortonormalità della base prodotto. Poiché il prodotto scalare è invariante per rotazioni, operando una rotazione di  $\alpha$  intorno all'asse  $\mathbf{e}_3$ , cioè una traslazione nell'angolo  $\varphi$ , il primo membro rimane invariato, mentre il secondo diventa

$$\sum_{k=-n}^n \sum_{h=-n}^n a_{k,h} e^{i(k+h)\alpha} Y_{n,k}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{n,h}(\hat{\mathbf{y}})$$

Dunque deve valere  $h = -k$ , cioè  $a_{k,h} = b_k \delta_{k,-h}$ . Ricordando che  $Y_{n,-h} = \overline{Y_{n,h}}$ , siamo arrivati alla decomposizione

$$G_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) = \sum_{k=-n}^n b_k Y_{n,k}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n,k}}(\hat{\mathbf{y}})$$

Mostro ora che i coefficienti  $b_k$  sono costanti. Ci sono vari complicati modi per farlo, che forse fanno anche intuire perché sia così. Qui punto direttamente a provare il risultato. Se scelgo  $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}}$  ottengo

$$1 = G_n(1) = \sum_{k=-n}^n b_k Y_{n,k}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n,k}}(\hat{\mathbf{x}})$$

Integrando su tutta la superficie sferica e usando l'ortonormalità delle armoniche, si ha

$$4\pi = \sum_{k=-n}^n b_k.$$

D'altra parte, per l'identità di Parseval

$$\int_{S \times S} |G_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}})|^2 d\hat{\mathbf{x}} d\hat{\mathbf{y}} = \sum_{k=-n}^n |b_k|^2$$

Calcolo l'integrale al primo membro. Fissando  $\hat{\mathbf{x}}$  e scegliendo il sistema di coordinate sferiche con  $\mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{x}}$ , l'integrale in  $\hat{\mathbf{y}}$  dà

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |G_n(\cos \vartheta)|^2 \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi \frac{2}{2n+1}$$

dove ho usato che la norma  $L^2$  dell' $n$ -esimo polinomio di Legendre è  $2/(2n+1)$ , come segue dalla (3.2). Integrando nell'altra variabile si ha infine

$$(4\pi)^2 \frac{1}{2n+1} = \sum_{k=-n}^n |b_k|^2$$

Sia  $b_k = 4\pi r_k / (2n+1)$ . Le due identità trovate diventano

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n r_k &= 2n+1 \\ \sum_{k=-n}^n |r_k|^2 &= 2n+1 \end{aligned}$$

Non è difficile provare che queste due identità sono equivalenti a  $r_k = 1$  per ogni  $k$ . Sia  $\mathbf{r}$  il vettore di componenti  $r_k$ , e sia  $\mathbf{u}$  il vettore di componenti  $u_k = 1$ .

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = (2n+1) + (2n+1) - 2(2n+1) = 0$$

Quindi  $\mathbf{r} = \mathbf{u}$ . Abbiamo così provato la seguente proposizione.

**Proposizione 5.1.**

$$G_n(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=-n}^n Y_{n,k}(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n,k}(\hat{\mathbf{y}})}$$

che ci permette di decomporre il potenziale generato da una distribuzione di carica in armoniche sferiche.

**Teorema 5.2.** *Espansione del potenziale in armoniche sferiche*

*Sia  $f$  una distribuzione di carica a supporto compatto. Il potenziale  $V$  da essa generato si sviluppa in armoniche sferiche:*

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n+1}} Y_{n,k}(\hat{\mathbf{x}}) \int_{S^2} d\hat{\mathbf{y}} \overline{Y_{n,k}(\hat{\mathbf{y}})} \int_0^{+\infty} f(\rho\hat{\mathbf{y}}) \rho^n d\rho$$

Come conseguenza si ottiene che il momento di multipolo di ordine  $2^n$  dipende solo da  $2n+1$  coefficienti indipendenti.

Per un ulteriore approfondimento sui momenti di multipolo e la loro relazione con le armoniche sferiche si veda [CH].

## 6 Operatori limitati

Se  $B_1$  e  $B_2$  sono due spazi di Banach, indico con  $\mathcal{L}(B_1, B_2)$  lo spazio (di Banach) degli operatori limitati da  $B_1$  a  $B_2$ , cioè gli operatori lineari  $A$  tali che esiste  $c > 0$  per cui

$$\|A\mathbf{v}\|_{B_2} \leq c\|\mathbf{v}\|_{B_1}.$$

È semplice verificare che la limitatezza è una proprietà che si conserva per combinazioni lineari. Indicherò con  $\mathcal{L}(B)$  lo spazio degli operatori limitati da  $B$  in  $B$ .

Se  $T \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ , indico con  $\text{Ker } T$  il kernel (nucleo) di  $T$ :

$$\text{Ker } T = \{\mathbf{v} \in B_1 \mid T\mathbf{v} = 0\} \subset B_1$$

e con  $\text{Range } T$  l'immagine di  $T$ :

$$\text{Range } T = \{T\mathbf{v} \in B_2 \mid \mathbf{v} \in B_1\} \subset B_2$$

### Teorema 6.1. Limitatezza e continuità

$T : B_1 \rightarrow B_2$  è limitato se e solo se è continuo.

*Dimostrazione.* Se  $T$  è limitato

$$\|T\mathbf{v} - T\mathbf{u}\|_{B_2} = \|T(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{B_2} \leq c\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_{B_2}$$

dunque è lipschitziano e quindi continuo. Se  $T$  è continuo, è continuo in 0, dunque dato  $\varepsilon = 1$ , esiste  $\delta > 0$  tale che se  $\|\mathbf{v}\|_{B_1} \leq \delta$  allora  $\|T\mathbf{v}\|_{B_2} \leq 1$ . Poiché

$$T\mathbf{v} = \frac{\|\mathbf{v}\|_{B_1}}{\delta} T\left(\frac{\delta\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{B_1}}\right)$$

e l'argomento di  $T$  ha norma  $\delta$ , vale

$$\|T\mathbf{v}\|_{B_2} \leq \frac{\|\mathbf{v}\|_{B_1}}{\delta}$$

quindi  $T$  è limitato e  $\|T\| \leq 1/\delta$ . □

Si definisce **norma** di un operatore limitato  $T$  il numero

$$\|T\| = \inf\{c \geq 0 \mid \forall \mathbf{v} \|\mathbf{v}\|_{B_1} \leq c\|T\mathbf{v}\|_{B_2}\} = \sup_{\mathbf{v} \neq 0} \frac{\|T\mathbf{v}\|_{B_2}}{\|\mathbf{v}\|_{B_1}}$$

È facile osservare che

$$\|T\| = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{B_1}=1} \|T\mathbf{v}\|_{B_2} = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{B_1} \leq 1} \|T\mathbf{v}\|_{B_2} = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{B_1} < 1} \|T\mathbf{v}\|_{B_2}$$

Come conseguenza della definizione di norma,

$$\|T\mathbf{v}\|_{B_2} \leq \|T\| \|\mathbf{v}\|_{B_1}$$

da cui si ottiene che dati  $T \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$  e  $S \in \mathcal{L}(B_2, B_3)$ , allora

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$$

**Teorema 6.2.**  $\mathcal{L}(B_1, B_2)$  è uno spazio di Banach.

*Dimostrazione.* Mostriamo che è uno spazio completo rispetto alla norma. Sia  $T_n$  una successione di operatori limitati, di Cauchy rispetto alla norma. Per ogni  $\mathbf{v} \in B_1$ :

$$\|T_n \mathbf{v} - T_m \mathbf{v}\|_{B_1} \leq \|T_n - T_m\| \|\mathbf{v}\|_{B_2}$$

dunque  $T_n \mathbf{v}$  è di Cauchy in  $B_2$ . Poiché  $B_2$  è completo,  $T_n \mathbf{v}$  converge a un elemento di  $B_2$  che indico con  $T\mathbf{v}$ .

È facile mostrare che  $T\mathbf{v}$  è lineare. Resta da mostrare che è limitato e che è il limite in norma operatore di  $T_n$ . Poiché  $T_m \mathbf{v} \rightarrow T\mathbf{v}$  in  $B_1$ , Infine

$$\|(T - T_n)\mathbf{v}\| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|T_m \mathbf{v} - T_n \mathbf{v}\| \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|T_m - T_n\| \|\mathbf{v}\|$$

Ma fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $N$  tale che se  $m, n \geq M$   $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ , dunque per  $n \geq N$

$$\|(T - T_m)\mathbf{v}\| \leq \varepsilon \|\mathbf{v}\|$$

Questa disuguaglianza implica che  $T$  è limitato e che

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|T - T_n\| = 0$$

□

Facciamo qualche esempio.

**Esempio 6.1. Proiettori**

Sia  $M$  un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert  $H$ . Sia  $P_M$  il proiettore su  $M$ . La sua norma è 1, infatti  $\|P_M \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|$ , e se  $\mathbf{v} \in M$  allora  $P_M \mathbf{v} = \mathbf{v}$ .

**Esempio 6.2. Isometrie**

Se  $T \in \mathcal{L}(B)$  è biiettivo, lineare, e conserva la norma,  $T$  è una **biezione isometrica** (che tra un po' chiameremo **operatore unitario**). Nel caso di spazi di Hilbert, la proprietà di conservare la norma coincide con la proprietà di conservare il prodotto hermitiano. Infatti vale la seguente **identità di polarizzazione** (da verificare per esercizio)

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - i\|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2 + i\|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2) \quad (6.1)$$

**Esempio 6.3. Operatori di moltiplicazione**

Sia  $\varphi$  una funzione limitata, allora

$$M_\varphi f \rightarrow \varphi f$$

è un operatore limitato ed è evidente che

$$\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Mostrerò successivamente che vale l'uguaglianza, e che l'operatore di moltiplicazione è limitato se e solo se la funzione  $\varphi$  è limitata.

### Esempio 6.4. Operatori integrali

Sia  $g(x, y)$  una funzione di due variabili in  $\Omega \times \Omega$ , e sia

$$Kf(x) = \int_{\Omega} g(x, y) f(y) dy$$

$K$  è detto “operatore integrale” e la funzione  $g$  è detta “nucleo integrale”. Questo operatore è ben definito se  $g(x, y)$  è  $L^2$  in  $y$ , infatti in tal caso l’integrale esiste e verifica

$$|Kf(x)|^2 \leq \|f\|^2 \int_{\Omega} |g(x, y)|^2 dy$$

Da questa espressione si nota che l’operatore è anche limitato, infatti

$$\int |Kf(x)|^2 dx \leq \|g\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}^2 \|f\|^2$$

e dunque

$$\|K\| \leq \|g\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}$$

Come vedremo, un operatore integrale può essere ben definito e limitato anche se  $g$  non è in  $L^2$  nelle due variabili.

## 6.1 Operatori illimitati

Molti operatori importanti non sono limitati, e quindi non sono continui,

Consideriamo per esempio l’operatore di derivazione  $\partial_x$  per le funzioni di  $L^2((0, 1))$ . Tralasciamo per ora il problema di come si possa veramente definire su funzioni  $L^2$  che non sono derivabili, e limitiamoci a osservare come lavora su una base, per esempio quella di soli seni,  $\psi_k = \sqrt{2/\pi} \sin(kx)$ .

$$\partial_x \sin(kx) = k \cos(kx)$$

dunque

$$\|\partial_x \psi_k\| = |k|$$

Quindi l’operatore non è limitato. Lo si può definire su tutto  $L^2$  assegnando valore 0 alle funzioni non derivabili.

Nel caso di operatori non limitati, è essenziale descrivere con chiarezza il dominio di definizione, che, nel caso di operatori interessanti, è sempre un sottospazio denso. Quindi, formalmente, un operatore non limitato sarà la coppia  $(A, \mathcal{D}(A))$ , dove  $\mathcal{D}(A)$  è un sottospazio denso, e  $A$  è lineare su  $\mathcal{D}(A)$ .

### Esempio 6.5. Operatore di derivazione

In  $L^2(\mathbb{R})$ , l’operatore  $\partial_x$  è definito a valori in  $L^2$  su  $C_0^\infty$ , ma anche su  $C_0^1$ , o sulle funzioni  $C^1$  con derivata quadro-sommabile. Questi tre sottospazi sono tutti possibili domini di definizione di  $\partial_x$ .

È una facile conseguenza del teorema di prolungamento delle funzioni uniformemente continue il seguente

### Teorema 6.3. Teorema di prolungamento

*Sia  $(A, \mathcal{D}(A))$  un operatore,  $\mathcal{D}(A)$  denso e  $A$  limitato su  $\mathcal{D}(A)$ . Allora esiste, unico, un prolungamento continuo di  $A$  a tutto lo spazio.*

*Dimostrazione.* Per esercizio. □

Gli operatori illimitati non sono invece prolungabili con continuità.

### Esempio 6.6. $\mathcal{F}$ come operatore

La trasformata di Fourier è un operatore integrale, con nucleo  $g(\lambda, x) = e^{-ix\lambda}/\sqrt{2\pi}$  che è solo limitato e non ha nessuna proprietà di sommabilità (ha modulo 1). Ciò nonostante,  $\mathcal{F}$  è continuo in  $L^2$  (in particolare è isometrico).

Infatti viene definito nello spazio delle funzioni  $C^\infty$  a decrescenza rapida. Si mostra che su questo spazio è invertibile, che l'inverso si ottiene con il nucleo coniugato, e che conserva il prodotto scalare. Dunque è continuo e per densità si prolunga a una biiezione isometrica su tutto  $L^2$ .

### Esempio 6.7. Operatore di moltiplicazione

Se  $\varphi$  non è limitata su  $\Omega$ , l'operatore di moltiplicazione  $M_\varphi$  non è limitato. Sia  $\Omega = \mathbb{R}$  e  $\varphi = 1 + x^2$ . Un possibile dominio di definizione di  $M_\varphi$  è il sottospazio delle funzioni a supporto compatto. Un altro è il sottospazio delle funzioni  $f$  tali che

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)^2 |f|^2 < +\infty$$

### Esempio 6.8. Operatori di convoluzione

Un caso particolare di operatore integrale è quello di operatore di convoluzione:

$$(Kf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x - y)f(y)$$

In questo caso  $g(x - y)$  certamente non può essere sommabile nelle due variabili. D'altra parte

$$(Kf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x - y)$$

e

$$\|Kf\|^2 \leq \int dx dy_1 dy_2 |f(x - y_1)| |f(x - y_2)| |g(y_1)| |g(y_2)|$$

Poiché

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y_1)| |f(x - y_2)| dx \leq \|f\|^2,$$

si ha

$$\|Kf\|^2 \leq \|g\|_1^2 \|f\|^2,$$

cioè  $K$  è limitato se  $g \in L^1$ . Anche in questo caso, è opportuno pensare l'operatore come definito sulle funzioni  $C_0^\infty$ , caso in cui è chiaro che l'integrale esiste se  $g \in L^1$ . Poi si nota che si tratta di un operatore limitato in  $L^2$  e lo si estende per densità.

### Esempio 6.9. Operatori di convoluzione in trasformata di Fourier

Rivediamo gli operatori di convoluzione in Fourier, in particolare in dimensione 1. In trasformata di Fourier, le convoluzioni si trasformano in prodotti (anche in questo caso, le identità seguenti vanno

provate prima con  $f \in C_0^\infty$  e poi estese per densità):

$$\begin{aligned}\widehat{Kf}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\lambda x} \int_{\mathbb{R}} dy g(x-y) f(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{-i\lambda(x-y)} g(x-y) e^{-i\lambda y} f(y) \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{g}(\lambda) \hat{f}(\lambda)\end{aligned}$$

Dunque l'operatore  $K$  in Fourier è l'operatore di moltiplicazione

$$\hat{f} \rightarrow \sqrt{2\pi} \hat{g} \hat{f}$$

che è continuo se e solo se  $\hat{g}$  è limitata. Una condizione sufficiente è che  $g$  sia in  $L^1$ , infatti

$$\|\hat{g}\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_1$$

Per esercizio si generalizzi questo esempio a  $\mathbb{R}^n$ .

### Esempio 6.10. Ancora operatori integrali

Do ora una condizione più generale per la limitatezza di un operatore integrale  $K$  di nucleo  $g$ . Sia

$$M = \max \left( \sup_{z_1 \in \Omega} \int_{\Omega} dz_2 |g(z_1, z_2)|, \sup_{z_2 \in \Omega} \int_{\Omega} dz_1 |g(z_1, z_2)|, \right) \quad (6.2)$$

Se  $M < +\infty$ , allora  $K$  è limitato e  $\|K\| \leq M$ . Infatti

$$\|Kf\|^2 \leq \int_{\Omega^3} dx dy_1 dy_2 |g(x, y_1)| |g(x, y_2)| |f(y_1)| |f(y_2)|$$

Usando che

$$|f(y_1)| |f(y_2)| \leq \frac{1}{2} |f(y_1)|^2 + |f(y_2)|^2$$

e riconoscendo che i due termini hanno lo stesso valore, si ha

$$\|Kf\|^2 \leq \int_{\Omega} dy_1 |f(y_1)|^2 \int_{\Omega} dx |g(x, y_1)| \int_{\Omega} dy_2 |g(x, y_2)|$$

Stimando con  $M$  l'ultimo integrale, si ottiene

$$\|Kf\|^2 \leq M \int_{\Omega} dy_1 |f(y_1)|^2 \int_{\Omega} dx |g(x, y_1)|$$

Stimando con  $M$  l'ultimo integrale, si ottiene

$$\|Kf\|^2 \leq M^2 \|f\|^2$$

da cui la tesi.

Per esercizio, mostra che se  $g(x, y) = g(x - y)$  con  $g \in L^1$ ,  $M$  è limitato.

### Esercizio 15. Operatori di moltiplicazione

Data  $\varphi$  limitata, e considera l'operatore di moltiplicazione  $M_\varphi$ . Dimostra che  $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ . Nota che in generale non esiste  $f \in L^2$  tale che  $\|\varphi f\| = \|\varphi\|_\infty \|f\|$ ; fai un esempio di questo fatto e mostra che ne segue che la sfera unitaria di uno spazio infinito dimensionale non è compatta.



### Esercizio 16. Operatori di convoluzione

Sia  $g(x) = \sin x/x$ . Nota che è una funzione di  $L^2$ , e trova la sua trasformata di Fourier ricordando che

$$\int \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \pi \operatorname{sign}(\alpha)$$

(l'integrale va inteso nel senso del valore principale). Osserva che  $\hat{g}(\lambda)$  è proporzionale alla funzione caratteristica dell'intervallo  $[-1, 1]$ . Mostra che l'operatore

$$Kf(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(y) dy$$

è ben definito su  $S_\infty$ , è continuo in  $L^2$ , e quindi è prolungabile ad un operatore su  $L^2$ , che ha l'espressione integrale, nel senso del valore principale,

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(y) dy,$$

ma il nucleo non è in  $L^1$ .

## 6.2 $\ell_2(\mathbb{R})$ e $\ell_2(\mathbb{C})$

Lo spazio delle successioni reali

$$\ell_2(\mathbb{R}) = \{ \{ \hat{x}_k \}_{k \in \mathbb{N}} \mid \sum |\hat{x}_k|^2 \}$$

con il prodotto scalare

$$(x, y) = \sum_k \hat{x}_k \hat{y}_k$$

è uno spazio di Hilbert reale separabile, che è in isometria con tutti gli spazi di Hilbert reali separabili. Infatti, dato  $H$ , sia  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una base, e sia

$$T : \mathbf{v} \rightarrow \{(\mathbf{e}_k, \mathbf{v})\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Per Bessel-Parseval,  $T$  è una isometria biettiva.

Analogamente, lo spazio delle successioni complesse

$$\ell_2(\mathbb{C}) = \{ \{ \hat{x}_k \}_{k \in \mathbb{Z}} \mid \sum |\hat{x}_k|^2 \}$$

con il prodotto scalare

$$(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{x}_k} \hat{y}_k$$

è uno spazio di Hilbert separabile, in biezione con tutti gli spazi di Hilbert complessi. Si noti che indicizzare le successioni in  $\mathbb{N}$  o  $\mathbb{Z}$  è del tutto equivalente. Nel caso complesso uso  $\mathbb{Z}$  perché sto pensando all'esempio dato della serie di Fourier.

## 7 Trasformata di Fourier

Indicherò con  $S_\infty$  lo spazio di Schwartz, cioè le funzioni  $C^\infty$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$ , con le derivate che decrescono più rapidamente di ogni polinomio:

$$S_\infty = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid \forall k, n \geq 0 \exists c_{k,n} \forall x \in \mathbb{R} (1 + |x|^k) |D^n f| \leq c_{k,n}\}.$$

In [FM] par. 3.2 trovate la dimostrazione che la trasformata di Fourier:

$$(\mathcal{F}f)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} f(x) dx$$

è biettiva da  $S^\infty$  in  $S^\infty$ , e che la sua inversa è

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \hat{f}(\lambda) d\lambda$$

Inoltre  $\mathcal{F}$  (e  $\mathcal{F}^{-1}$ ) è un'isometria rispetto al prodotto  $L^2$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\lambda)} \hat{g}(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Questa identità equivale all'identità distribuzionale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(x-y)} d\lambda = \delta(x-y)$$

Queste affermazioni discendono dal fatto che, per funzioni regolari la trasformata di Fourier traduce regolarità in decadimento all'infinito e viceversa:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D^n f) &= (i\lambda)^n \mathcal{F}(f) \\ \partial_\lambda \mathcal{F}f &= \mathcal{F}((-ix)^n f(x)) \end{aligned}$$

### 7.1 La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$

Usando la densità delle funzioni  $C_0^\infty$  in  $L^2(\mathbb{R})$ , si ottiene la densità delle funzioni  $S_\infty$  in  $L^2(\mathbb{R})$ , dunque  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}^{-1}$  si prolungano a due funzionali continui su  $L^2(\mathbb{R})$ , uno l'inverso dell'altro, e che conservano la norma. Dunque  $\mathcal{F}$  è una isometria biettiva da  $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  in sé. Nel teorema di prolungamento, si mostra che se  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}f_n$  converge a un elemento dello spazio, che non dipende dalla successione, e questo valore è per definizione  $\mathcal{F}f$ .

Osservo che le funzioni di  $L^2$  a supporto compatto sono anche in  $L^1$ , dunque la loro trasformata di Fourier è ben definita. Inoltre, data  $f \in L^2$ ,  $f_L(x) = f(x)\mathcal{X}\{|x| < lL\}$  ha supporto compatto e tende a  $f$  in  $L^2$ . Dunque, per definizione

$$\hat{f}(\lambda) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} f_L(x) dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L e^{-i\lambda x} f(x) dx$$

Insisto su un punto. Se  $f$  è in  $L^2$ , nulla sappiamo della sommabilità di  $f$ . Però l'esistenza del prolungamento di  $\mathcal{F}$  garantisce che, q.o. in  $\lambda$ , esiste il limite scritto sopra, e che questo limite è  $L^2$  in  $\lambda$ . Dunque per funzioni  $f \in L^2$  che non siano in  $L^1$ , l'integrale che definisce la trasformata di Fourier va inteso come **valore principale**, cioè come limite degli integrali su  $[-L, L]$ .

## 7.2 La trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , la trasformata esiste e

$$|\mathcal{F}f| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$$

Inoltre, poichè  $e^{-i\lambda x}$  è continua in  $\lambda$  e limitata da 1, per convergenza dominata  $\mathcal{F}f(\lambda)$  è continua in  $\lambda$  (si noti che questa proprietà è falsa se si ha solo  $f \in L^2$ ).

Inoltre, se  $f \in C^1$  e  $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$  allora

$$\mathcal{F}f'(\lambda) = i\lambda \mathcal{F}f(\lambda)$$

dunque

$$|\mathcal{F}f(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\lambda|} \|f'\|_{L^1}$$

e quindi tende a 0 per  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ .

Per densità delle funzioni  $C^1$  a supporto compatto in  $L^1$ , si ottiene che se  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}f(\lambda) = 0$$

(questa asserzione è una variante del lemma di Riemann-Lebesgue).

La trasformata di Fourier in  $L^1$  non è biettiva sulle funzioni continue, ma rimane iniettiva. La prova non è immediata ma non è difficile. Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , dati  $a, b$  tali che  $-\infty < a < b < +\infty$ , consideriamo la funzione

$$g(x) = \int_a^b f(x+t) dt = \int_{a+x}^{b+x} f(t) dt.$$

Usando la sommabilità di  $f$ , è semplice mostrare che  $g$  è una funzione continua in  $a, b, x$ . Infatti, dati due intervalli  $I_1 = [a_1 + x_1, b_1 + x_1]$  e  $I_2 = [a_2 + x_2, b_2 + x_2]$ ,

$$\left| \int_{I_1} f(x) dx - \int_{I_2} f(x) dx \right| \leq \int_{I_1 \Delta I_2} |f(x)| dx$$

che tende a zero se la misura di  $I_1 \Delta I_2$  tende a 0, come accade se  $(a_2, b_2, x_2) \rightarrow (a_1, b_1, x_1)$ . Mostriamo che  $g \in L^1(\mathbb{R})$ :

$$\int_{\mathbb{R}} dx |g(x)| \leq \int_a^b dt \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)| dx = (b-a) \|f\|_1$$

Inoltre  $g$  è in  $L^2(\mathbb{R})$ . Infatti

$$\|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} dx |g(x)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_a^b dt_1 \int_a^b dt_2 |f(x+t_1)| |f(x+t_2)| \leq (b-a)^2 \|f\|_1^2$$

Questa stima si ottiene stimando  $\int_a^b |f(x+t_2)| dt_2$  con  $\|f\|_1$ , poi integrando in  $dx$  ottenendo un altro fattore  $\|f\|_1$ , infine integrando in  $dt_1$  tra  $a$  e  $b$ . Il calcolo di  $\hat{g}(\lambda)$  è facile, e dà:

$$\hat{g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \int_a^b e^{-i\lambda t} dt.$$

(si noti che  $e^{-ix\lambda}f(x+t)$  è sommabile in  $dx dt$ , con  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [a, b]$ , dunque si può usare Fubini).

Fissati  $a$  e  $b$ , se  $\hat{f}(\lambda) = 0$  q.o. allora  $\hat{g}(\lambda) = 0$  q.o. Poiché  $g \in L^2$  e  $\mathcal{F}$  è un'isometria biettiva in  $L^2$ , ne segue che

$$\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2 = 0$$

e dunque  $g(x) = 0$  q.o. in  $x$ , ma essendo  $g$  continua  $g(x) \equiv 0$ , in particolare in  $x = 0$ , da cui ottengo che  $\int_a^b f(x) dx = 0$  per ogni  $a$  e  $b$ . Ma allora  $\int_K f = 0$  per qualunque boreliano, e dunque per qualunque misurabile, in particolare sul supporto della parte positiva e su quello della parte negativa, e dunque  $f$  è nulla quasi ovunque.

### 7.3 Completezza dei polinomi di Hermite e di Laguerre

La completezza in  $L_w^2(\mathbb{R})$  con  $w = e^{-x^2}$  dei polinomi di Hermite è equivalente al fatto che se  $f \in L_w^2$  verifica per ogni  $n \in \mathbb{N}$  che  $(x^n, f)_w = 0$ , allora  $f$  deve essere nulla.

Sia dunque  $f \in L_w^2(\mathbb{R})$ , con  $(x^n, f)_w = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . È immediato notare che  $e^{\delta|x|} \in L_w^2(\mathbb{R})$ , per ogni  $\delta > 0$ , infatti  $\int e^{-x^2+2\delta|x|}$  è finito. Ne segue che

$$e^{-x^2} e^{\delta|x|} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

Questa asserzione serve per poter usare il teorema di convergenza dominata:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{i\lambda x} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\lambda)^n}{n!} x^n f(x) dx$$

A  $\lambda$  fissato, la serie dei moduli è sommabile, infatti vale la stima

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\lambda|^n}{n!} |x^n| |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{\delta|x|} |f(x)| dx$$

Dunque usando Fubini si può invertire l'ordine dell'integrazione e della somma, ottenendo che

$$\mathcal{F}(e^{-x^2} f)(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \frac{(i\lambda)^n}{n!} x^n f(x) dx = 0$$

infatti tutti i termini della serie sono nulli, per l'ipotesi su  $f$ . Dall'iniettività della trasformata di Fourier in  $L^1$ , segue che  $e^{-x^2} f(x)$  è nulla quasi ovunque, dunque  $f$  è nulla in  $L_w^2(\mathbb{R})$ .

La completezza in  $L_w^2(\mathbb{R}^+)$  con  $w = e^{-x}$  dei polinomi di Laguerre è equivalente al fatto che se  $f \in L_w^2(\mathbb{R}^+)$  verifica per ogni  $n \in \mathbb{N}$  che  $(x^n, f)_w = 0$ , allora  $f$  deve essere nulla.

Seguendo il [CH], sembra che, usando la trasformazione  $x = y^2$  si possa mostrare che la completezza dei polinomi in  $L_{e^{-y^2}}^2(\mathbb{R})$  sia equivalente alla completezza dei polinomi in  $L_{e^{-x}}^2(\mathbb{R}^+)$ . Però c'è qualche dettaglio che non torna, quindi, seguendo il suggerimento di uno di voi, faccio una dimostrazione diretta usando lo stesso procedimento usato per la completezza dei polinomi di Hermite.

Sia dunque  $f \in L_{e^{-x}}^2$  e sia  $(x^n, f)_w = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Con il cambiamento di variabili  $x = z^2$  si ha

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-z^2} z^{2n+1} f(z^2) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| e^{-z^2} z^{2n} g(z) dz$$

dove  $g(z) = f(z^2)$ . La funzione  $g$  è in  $L^2_{|z|e^{-z^2}}(\mathbb{R})$ , infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |z|e^{-z^2} g^2(z) = \int_{\mathbb{R}} |z|e^{-z^2} f^2(x^2) = \int_0^{+\infty} e^{-x} f^2(x)$$

Si mostra facilmente che  $e^{\delta|z|} \in L^2_{|z|e^{-z^2}}$ , per ogni  $\delta > 0$ . Ne segue che

$$e^{-z^2}|z|e^{\delta|z|}g(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

Ma allora, per convergenza dominata,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} e^{i\lambda z} |z|g(z) dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\lambda)^n}{n!} z^n |z|g(z) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} \frac{(i\lambda)^n}{n!} z^n |z|g(z) dz.$$

I termini con  $n$  dispari sono nulli perché  $|z|g(z)$  è pari. Se  $n = 2k$  l'integrale è

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} z^{2k} |z|g(z) dz = 0$$

per l'ipotesi. Dunque

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} e^{i\lambda z} |z|g(z) dz = 0 \quad \forall \lambda.$$

Per iniettività della trasformata di Fourier in  $L^1$ ,

$$e^{-z^2}|z|g(z) = 0 \quad \text{q.o.}$$

e quindi  $g$  è nulla, da cui  $f = 0$  q.o..

## 8 Operatori da $H$ in sé

Considero adesso un caso particolare di operatori lineari, quelli che vanno da  $H$  in  $\mathbb{R}$  per spazi reali (in  $\mathbb{C}$  per spazi complessi). Tali operatori vengono detti **funzionali lineari**. Nel caso finito dimensione, una applicazione lineare da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$  è

$$L\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n z_i x_i$$

per opportuni coefficienti  $z_i, i = 1 \dots n$ , cioè

$$L\mathbf{x} = (\mathbf{z}, \mathbf{x})$$

In dimensione infinita, fissato  $\mathbf{z} \in H$  il funzionale

$$L\mathbf{x} = (\mathbf{z}, \mathbf{x})$$

è lineare continuo, e poiché, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz,  $|L\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{x}\|$ , e scegliendo  $\mathbf{x} = \mathbf{z}$  si ottiene che

$$\|L\| = \|\mathbf{z}\|.$$

Osservo inoltre che

$$\|\mathbf{z}\| = \sup_{\mathbf{x}: \|\mathbf{x}\|=1} |(\mathbf{z}, \mathbf{x})|.$$

Anche in dimensione infinita i funzionali lineari sono tutti e soli quelli ottenuti mediante prodotto scalare con un vettore fissato, come mostra il seguente teorema.

### 8.1 Teorema di rappresentazione di Riesz

Sia  $L$  un funzionale lineare continuo in  $H$  spazio di Hilbert reale o complesso. Essendo  $L$  lineare,  $\text{Ker } L$  è un sottospazio chiuso. Se  $\text{Ker } L = H$ , la scelta  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  dimostra il teorema. Mostriamo invece che se  $\text{Ker } L$  non è tutto  $H$ , il suo ortogonale ha dimensione 1.

Siano  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in (\text{Ker } L)^\perp$  non nulli: sia

$$L\mathbf{v}_1 = \alpha_1 \quad L\mathbf{v}_2 = \alpha_2$$

(entrambi non nulli, per ipotesi sulle  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , che sono nell'ortogonale del nucleo). Ma allora

$$L(\mathbf{v}_1/\alpha_1 - \mathbf{v}_2/\alpha_2) = 0$$

e dunque  $(\mathbf{v}_1/\alpha_1 - \mathbf{v}_2/\alpha_2) \in \text{Ker } L$ . Ma per ipotesi  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono non nulli e ortogonali al nucleo di  $L$ , dunque

$$\mathbf{v}_1/\alpha_1 - \mathbf{v}_2/\alpha_2 = 0$$

Ne segue che esiste un vettore  $\mathbf{v}_0$  di norma 1 tale che

$$(\text{Ker } L)^\perp = \{\alpha \mathbf{v}_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Poiché  $L$  è continuo,  $\text{Ker } L$  è chiuso, dunque (vedi punto 2.2 a pagina 12)

$$H = \text{Ker } L \oplus (\text{Ker } L)^\perp.$$

Sia  $\mathbf{v} \in H$ ; decomponendolo

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v})\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v} - (\mathbf{v}_0, \mathbf{v})\mathbf{v}_0)$$

dove  $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v})\mathbf{v}_0$  è la proiezione di  $\mathbf{v}$  su  $(\text{Ker } L)^\perp$  e dunque  $\mathbf{v} - (\mathbf{v}_0, \mathbf{v})\mathbf{v}_0 \in \text{Ker } L$ . Ne segue

$$L\mathbf{v} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v})L\mathbf{v}_0 = (\mathbf{z}, \mathbf{v}) \quad \text{e } \|L\| = \|\mathbf{z}\|$$

con  $\mathbf{z} = \overline{L\mathbf{v}_0}\mathbf{v}_0$ .

Nei testi questa dimostrazione è più semplice, perché viene apparentemente saltato il passaggio di provare l'unidimensionalità del kernel di  $L$ . Funziona in questo modo. Sia  $\mathbf{v}_0$  un vettore unitario in  $\text{Ker } L^\perp$ ; dato  $\mathbf{u}$ , il vettore  $(L\mathbf{v}_0)\mathbf{u} - (L\mathbf{u})\mathbf{v}_0$  è nel  $\text{Ker } L$ , infatti  $L((L\mathbf{v}_0)\mathbf{u} - (L\mathbf{u})\mathbf{v}_0) = 0$ . Dunque

$$0 = (\mathbf{v}_0, (L\mathbf{v}_0)\mathbf{u} - (L\mathbf{u})\mathbf{v}_0) = L\mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0, \mathbf{u}) - L\mathbf{u} \quad \text{da cui } L\mathbf{u} = L\mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

dove  $\mathbf{v} = \overline{L\mathbf{v}_0}\mathbf{v}_0$ .

Il motivo per cui propongo una dimostrazione più lunga è che mi sembra più semplice ricordarsi alcuni passaggi se ho in mente cosa deve dimostrare, rispetto a ricordarsi un "trucco". Naturalmente il trucco su usato è identico a quello che permette di provare che la dimensione dell'ortogonale al kernel è uno.

Per uno spazio di Banach  $B$ , lo spazio di Banach di tutti i funzionali lineari e continui è detto **duale** di  $B$  e si indica con  $B'$ . Per uno spazio di Hilbert  $H$  il duale si identifica con  $H$  stesso mediante il teorema di rappresentazione di Riesz.

La possibilità di identificare  $H'$  con  $H$  permette di definire l'**aggiunto** di un operatore da  $H$  a  $H$  (nota che per uno spazio di Banach  $B$  l'aggiunto è un operatore in  $\mathcal{L}(B')$ )

## 8.2 Operatore aggiunto

Sia  $A \in \mathcal{L}(H)$ , fissiamo un vettore  $\mathbf{u} \in H$  e consideriamo l'applicazione

$$H \ni \mathbf{v} \rightarrow (\mathbf{u}, A\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$$

È evidentemente un funzionale lineare in  $\mathbf{v}$ , e verifica

$$|(\mathbf{u}, A\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|A\mathbf{v}\| \leq \|A\| \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Per il teorema di rappresentazione, esiste  $\tilde{\mathbf{u}}$  tale che per ogni  $\mathbf{v}$ :

$$(\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$$

È facile dimostrare che  $\tilde{\mathbf{u}}$  dipende linearmente da  $\mathbf{u}$ , dunque esiste l'operatore lineare  $A^*$  tale che  $\tilde{\mathbf{u}} = A^*\mathbf{u}$ , dunque

$$(\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (A^*\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Passando ai coniugati si ottiene  $(A\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, A^*\mathbf{u})$ .

Proviamo che  $A^*$  è limitato.

$$\|A^*\mathbf{u}\| = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} |(A^*\mathbf{u}, \mathbf{v})| = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} |(\mathbf{u}, A\mathbf{v})| \leq \|A\| \|\mathbf{u}\|$$

Ne segue  $A^*$  è limitato e che

$$\|A^*\| \leq \|A\|$$

Allo stesso modo,

$$\|A\mathbf{v}\| = \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} |(\mathbf{u}, A\mathbf{v})| = \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} |(A^*\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|A^*\| \|\mathbf{v}\|$$

dunque  $\|A\| \leq \|A^*\|$  e dalle due disuguaglianze si ottiene

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Inoltre

$$A^{**} = A$$

infatti per ogni  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ ,

$$(A^{**}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A^*\mathbf{v}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Infine, sempre a proposito delle norme, sia  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ :

$$\|A\mathbf{u}\|^2 = (A\mathbf{u}, A\mathbf{u}) = (A^*A\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \|A^*A\| \|\mathbf{u}\|^2 \leq \|A\| \|A^*\| \|\mathbf{u}\|^2$$

Dividendo per  $\|\mathbf{u}\|^2$  e passando al sup si ottiene

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A\| \|A^*\| = \|A\|^2$$

quindi

$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

Usando che  $A^{**} = A$ , si prova facilmente che  $\|AA^*\| = \|A\|^2$ .

Definizione:  $A$  è **autoaggiunto** se  $A^* = A$ .

È facile provare che

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

Se  $A$  è invertibile e continuo, il teorema dell'applicazione aperta garantisce che  $A^{-1}$  è continuo. Inoltre

$$1 = \|\mathbf{I}\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \text{ e dunque } \|A\| \|A^{-1}\| \geq 1.$$

Più in generale, questo teorema è vero in spazi di Banach.

È anche facile mostrare che

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

Nel caso di spazi vettoriali reali di dimensione finita, le matrici autoaggiunte sono le matrici simmetriche, nel caso di spazi vettoriali complessi di dimensione finita la matrice associata all'aggiunto è la coniugata della trasposta.

### Esempio 8.1. Aggiunto degli operatori di moltiplicazione

Sia  $h$  una funzione data, e sia  $M_h \in \mathcal{L}(L^2)$  l'operatore di moltiplicazione

$$M_h f(x) = h(x)f(x)$$



$$M_h^* f(x) = \overline{h(x)} f(x)$$

Dunque  $M_h$  è autoaggiunto se e solo se  $h$  è reale.

### Esempio 8.2. Aggiunto degli operatori di moltiplicazione in $\ell_2$

Sia  $z_k$  una successione, e sia  $M_z \in \mathcal{L}(\ell_2)$  dato da

$$(M_z x)_k = z_k x_k$$

È facile verificare che  $\|M_z\| = \sup_k |z_k|$ . Inoltre  $M_z^* = M_{\bar{z}}$ .

### Esempio 8.3. Aggiunto degli operatori integrali

L'aggiunto dell'operatore integrale  $K f(x) = \int_{\Omega} g(x, y) f(y) dy$  è l'operatore  $K^* f(x) = \int_{\Omega} g^*(x, y) f(y) dy$ , dove  $g^*(x, y) = \overline{g(y, x)}$  (lo si verifichi per esercizio). Ne segue che se  $g$  è reale e simmetrico,  $K$  è autoaggiunto (ma non è una condizione necessaria).

### Esempio 8.4. Aggiunto degli operatori di convoluzione

Nel caso di una convoluzione  $g(x, y) = g(x - y)$ , dunque l'aggiunto è l'operatore di convoluzione di nucleo  $\overline{g(y - x)}$ . Se  $g$  è reale, l'operatore è autoaggiunto se  $g$  è una funzione pari.

Poiché la trasformata di Fourier del nucleo dell'operatore aggiunto è  $\overline{\hat{g}}$ , la condizione di autoaggiuntezza dell'operatore è

$$\hat{g}(\lambda) = \overline{\hat{g}(\lambda)}$$

cioè se  $\hat{g}$  è reale.

Si noti che per una funzione reale la trasformata di Fourier è reale se e solo se la funzione è pari.

### Esercizio 17. L'aggiunto di $\mathcal{F}$

Si provi, per esercizio, che  $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ . Un operatore il cui aggiunto coincide con l'inverso è detto **unitario**. Usando la decomposizione polare del prodotto hermitiano in somme e differenze di quadrati, si mostri per esercizio che se  $T$  è un'isometria biettiva, allora  $T$  è unitario.

## 9 I teoremi dell'alternativa per operatori di rango finito

In questo capitolo discuterò dell'analogo infinito-dimensionale dei teoremi sulla risolubilità delle equazioni lineari nel caso finito dimensionale. Premetto un semplice esempio che mostra che non sarà argomento banale.

### 9.1 Lo shift su $\ell_2(\mathbb{N}; \mathbb{R})$

Gli operatori di shift permettono di fare esempi semplici sulle differenze tra il caso finito dimensionale e il caso infinito dimensionale.

Sia  $S : \ell_2 \rightarrow \ell_2$  definito da

$$S(x_0, x_1, x_2 \dots) = (0, x_0, x_1 \dots)$$

cioè  $S$  è l'operatore che shifta in avanti di un posto la successione, mettendo 0 come primo elemento. Prova i seguenti fatti.

a.  $S$  è iniettivo, infatti

$$\text{Ker } S = \{0\}$$

ma non suriettivo, infatti

$$\text{Range } S = \{0\} \times \ell_2$$

(ricorda che invece un'applicazione lineare da  $\mathbb{R}^n$  in sé è iniettiva se e solo se è suriettiva).

b.  $S$  conserva il prodotto scalare, ma non essendo biiettivo non è un operatore unitario.

c. L'aggiunto di  $S$  è definito da

$$S^*(x_0, x_1, x_2 \dots) = (x_1, x_2 \dots)$$

che è lo shift a sinistra.

d.  $S^*S = \mathbf{I}$  ma  $SS^* \neq \mathbf{I}$

e.

$$\text{Ker } S^* = \mathbb{R} \times 0^{\mathbb{N}} \quad \text{Range } S^* = \ell_2$$

Da questo esempio si vede che in dimensione infinita, un operatore può essere iniettivo senza essere suriettivo e viceversa. Inoltre la dimensione del kernel di un operatore può essere differente dalla dimensione del kernel dell'aggiunto.

Riassumo qui i risultati principali sulle equazioni lineari in spazi di dimensione finita, e discuto la loro estensione al caso di spazi di dimensione infinita.

Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  in campo complesso, e sia  $b$  assegnato, e consideriamo il problema dell'esistenza di  $x \in \mathbb{C}^n$  tale che

$$Ax = b$$

**SL 1.** Se  $\det A \neq 0$ , per ogni  $b$  esiste una ed una sola soluzione:  $A$  è invertibile, e l'equazione omogenea associata ha solo la soluzione nulla.

**SL 2.** Se  $\det A = 0$ , l'equazione omogenea associata ammette un sottospazio non banale di soluzioni, e l'equazione  $Ax = b$  ammette soluzione (non unica) se il rango della matrice completa è uguale al rango di  $A$  (Rouché-Capelli). Questa affermazione è infatti equivalente al fatto che  $b$  è combinazione lineare delle colonne di  $A$ , cioè che  $b$  è nel  $\text{Range } A$

La nozione di determinate e di rango di una matrice non si esportano facilmente al caso infinito-dimensionale, ma i risultati precedenti possono essere riscritti in termini più adatti al caso infinito dimensionale.

Premetto un'osservazione valida in generale negli spazi di Hilbert.

**Teorema 9.1.**  $(\text{Range } A)^\perp = \text{Ker } A^*$

*Sia  $y \in \text{Range } A$ , dunque esiste  $z$  tale che  $y = Az$ ;*

$$\begin{aligned} x \in (\text{Range } A)^\perp &\iff \forall y \in \text{Range } A (y, x) = 0 \iff \forall z (Az, x) = 0 \\ &\iff \forall z (z, A^*x) = 0 \iff x \in \text{Ker } A^* \end{aligned}$$

*Dunque*

$$(\text{Range } A)^\perp = \text{Ker } A^*.$$

*La stessa conclusione vale scambiando  $A$  e  $A^*$ .*

Da questo fatto, in dimensione finita, se  $A$  è un operatore da  $\mathbb{C}^n$  in sé:

$$\mathbb{C}^n = \text{Range } A \oplus \text{Ker } A^* = \text{Range } A^* \oplus \text{Ker } A \quad (9.1)$$

inoltre, poiché il rango di una matrice è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti, e anche il massimo numero di righe linearmente indipendenti,

$$\dim \text{Range } A = \dim \text{Range } A^*$$

da cui, usando la doppia decomposizione di  $\mathbb{C}^n$  fatta sopra, si ottiene

$$\dim \text{Ker } A = \dim \text{Ker } A^*$$

Il teorema di Rouché Capelli si può dunque riformulare così:  $Ax = b$  ha soluzione se e solo se  $b$  è nell'immagine di  $A$ , cioè se e solo se  $b$  è ortogonale al nucleo di  $A^*$ . In generale la soluzione non è unica a meno che  $\text{Ker } A$  non sia banale, ma in tal caso lo è anche quello di  $A^*$  (perché hanno la stessa dimensione) e dunque per qualunque  $b$  il sistema ha soluzione unica.

Riassumendo, in dimensione finita

**df 1.**  $\mathbb{C}^n = \text{Range } A \oplus \text{Ker } A^*$

**df 2.**  $\dim \text{Ker } A = \dim \text{Ker } A^*$

Da questi fatti segue che  $A$  è invertibile se e solo se  $\text{Ker } A \neq \{0\}$ , infatti vale la seguente catena di equivalenze:

- $A$  è suriettivo se e solo se  $\text{Range } A = \mathbb{C}^n$
- $\text{Range } A = \mathbb{C}^n$  se e solo se  $\text{Ker } A^*$  è banale (per **df. 1**)

- $\text{Ker } A^*$  è banale se e solo se  $\text{Ker } A$  è banale (per **df. 2**)
- $\text{Ker } A$  è banale se e solo se  $A$  è iniettivo.

Inoltre **df. 1** afferma che  $Ax = b$  ha soluzione se e solo se  $b$  è ortogonale a  $\text{Ker } A^*$ , e la soluzione non è unica se i kernel non sono banali.

In dimensione infinita risultati di questo tipo (che sono veri solo per opportune classi di operatori) si chiamano **teoremi dell'alternativa**, perché affermano che o l'equazione  $Ax = b$  ha soluzione per ogni  $b$ , e in tal caso è unica, o ha soluzione solo se  $b$  è ortogonale al nucleo di  $A^*$  (e in tal caso non è unica). Più formalmente, da una definizione. Un operatore limitato  $A$  **verifica i teoremi dell'alternativa** se

$$\dim \text{Ker } A = \dim \text{Ker } A^*$$

e  $\text{Range } A$  è chiuso, e dunque

$$H = \text{Ker } A^* \oplus \text{Range } A$$

Naturalmente la condizione sulla dimensione dei nuclei è interessante solo nel caso siano finito-dimensionali.

### Esempio 9.1. L'equazione lineare per gli shift

Rileggiamo in termini di risolubilità di equazioni lineari l'esempio sull'operatore di shift  $S$ . Anche in questo caso

$$l_2 = \text{Range } S^* \oplus \text{Ker } S = \text{Range } S \oplus \text{Ker } S^*$$

Dunque  $S\hat{x} = \hat{b}$  ha soluzione se e solo se  $\hat{b}$  è ortogonale al  $\text{Ker } S^*$ , cioè se  $b_0 = 0$ . Si noti che la soluzione se esiste è unica. Invece  $S^*\hat{x} = \hat{b}$  ha soluzione per ogni  $\hat{b}$ , ma non è unica, perché il  $\text{Ker } S^*$  è non banale. In questo esempio, è vero il "teorema di Rouché-Capelli", ma è falso che la dimensione dei nuclei di  $S$  e  $S^*$  siano uguali.

Considero ora un altro esempio istruttivo.

### Esempio 9.2. L'equazione lineare per gli operatori di moltiplicazione

Sia ora  $h = \frac{1}{1+x^2}$ , e sia  $M_h f(x) = h(x)f(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$ . Questo operatore è limitato e autoaggiunto in  $L^2(\mathbb{R})$ , con il nucleo banale. D'altra parte  $M_h f = b$  ha soluzione solo se  $b(x)(1+x^2) \in L^2(\mathbb{R})$ , dunque la condizione di nucleo banale dell'aggiunto non corrisponde alla risolubilità dell'equazione lineare. Il motivo è che, in generale, dal fatto sempre vero che  $\text{Ker } A^* = (\text{Range } A)^\perp$  si ottiene

$$H = \text{Ker } A^* \oplus (\text{Ker } A^*)^\perp = \text{Ker } A^* \oplus \text{Range } A^{\perp\perp} = \text{Ker } A^* \oplus \overline{\text{Range } A}$$

Dunque dalla banalità di  $\text{Ker } A^*$  si ottiene la densità del  $\text{Range } A$ , non che  $\text{Range } A$  sia tutto  $H$ . Nell'esempio che sto considerando, è facile vedere che  $M_h L^2$  è denso (basta notare che  $M_h$  porta  $S_\infty$  in sé), mentre  $M_h L^2$  non è tutto  $L^2$ . Infatti

$$1/(1+x^2) \in L^2(\mathbb{R})$$

ma la soluzione di

$$\frac{1}{1+x^2} f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{è} \quad f(x) = 1 \notin L^2(\mathbb{R})$$

Dunque in questo caso

$$L^2(\mathbb{R}) \neq \text{Range } M_h \oplus \text{Ker } M_h^*$$

Quello che accade è che  $\text{Range } M_h$  non è chiuso.

Questo esempio mostra che si può sperare di riprodurre i risultati finito dimensionali solo per classi di operatori che abbiano l'immagine chiusa.

Riassumendo: anche in dimensione infinita, dato  $A \in \mathcal{L}(H)$ , si ha

$$(\text{Range } A)^\perp = \text{Ker } A^*$$

ma da questo si può solo concludere che

$$H = \overline{\text{Range } A} \oplus \text{Ker } A^* = \overline{\text{Range } A^*} \oplus \text{Ker } A$$

In dimensione infinita gli operatori che più somigliano a quelli dei casi finito dimensionali sono gli **operatori di rango finito**. Per definizione, un operatore continuo  $T$  è di rango finito se e solo se la dimensione del  $\text{Range } T$  è finita. In particolare questo implica che il  $\text{Range } T$  è un sottospazio chiuso, essendo finito dimensionale.

Prima di studiarli, premetto una definizione. Dati due vettori  $a$  e  $b$ , indico con  $|a\rangle\langle b|$  il loro **prodotto tensoriale**<sup>2</sup> come l'operatore in  $\mathcal{L}(H)$  definito da

$$|a\rangle\langle b| f = a(b, f)$$

Nota che la matrice associata a  $|a\rangle\langle b|$  è la matrice che si ottiene moltiplicando il vettore colonna di  $a$  per il vettore riga  $b$  coniugato, cioè  $|a\rangle\langle b|_{ij} = a_i \bar{b}_j$ .

La sua norma operatoriale è  $\|a\| \|b\|$  (esercizio) e il suo aggiunto è

$$|a\rangle\langle b|^* = |b\rangle\langle a|,$$

infatti

$$(|a\rangle\langle b|^* y, x) = (y, |a\rangle\langle b| x) = (y, a(b, x)) = (b, x)(y, a) = (\overline{b(y, a)}, x) = (b(a, y), x) = (|b\rangle\langle a| y, x)$$

Verifica per esercizio che se  $\{e_k\}_{k=0}^n$  è una base ortonormale per un sottospazio finito  $M$ , allora

$$\sum_{k=0}^n |e_k\rangle\langle e_k| \text{ è il proiettore su } M$$

## 9.2 Operatori di rango finito

Sia  $T$  è un operatore di rango finito, e sia  $\{p_i\}_{i=1}^n$  una base per  $\text{Range } T$ . Per ogni  $f$  si può decomporre  $Tf$  nella base per  $\text{Range } T$ :

$$Tf = \sum_{i=1}^n (p_i, Tf) p_i = \sum_{i=1}^n (T^* p_i, f) p_i = \sum_{i=1}^n (q_i, f) p_i$$

dove  $q_i = T^* p_i$ . Usando la definizione di prodotto tensore,

$$T = \sum_{i=1}^n |p_i\rangle\langle q_i| \tag{9.2}$$

---

<sup>2</sup>Non è veramente il prodotto tensoriale di  $a$  e  $b$ , perché, per come è definito,  $|a\rangle\langle b|$  è una forma bilineare su  $H' \times H$ , mentre il prodotto tensore è definibile, per esempio, come forma bilineare su  $H' \times H'$ , vedi [RS]. Nel caso di  $H$  reale la differenza non si nota.

da cui

$$T^* = \sum_{i=1}^n |q_i\rangle\langle p_i|$$

Ne segue che l'immagine di  $T^*$  è lo span dei vettori  $q_i$  dunque anche  $T^*$  è di rango finito. Si noti che (9.2) definisce comunque un operatore di rango finito, con  $\text{Range } T = \text{span}\{p_i\}_{i=1}^n$ , anche se i  $p_i$  non sono ortonormali, e anche se i  $p_i$  non sono indipendenti.

Per quel che riguarda il problema lineare  $Tx = b$ , si nota subito che  $\text{Ker } T$  ha dimensione infinita e dunque  $T$  non è un operatore invertibile, inoltre  $\text{Range } T^*$  è chiuso (perché di dimensione finita) dunque

$$H = \text{Ker } T^* \oplus \text{Range } T$$

e  $Tx = b$  ha soluzione (non unica) se e solo se  $b$  è ortogonale al nucleo di  $T^*$ . In questo senso, il teorema di Rouché-Capelli vale per gli operatori di rango finito.

### **Esercizio 18. Operatori di rango finito**

Sia  $T = \sum_{i=1}^n |q_i\rangle\langle p_i|$ . Mostra che se  $\dim \text{Range } T = n$ , allora  $\{p_i\}_{i=1}^n$  è un sistema di  $n$  vettori linearmente indipendenti e  $\{q_i\}_{i=1}^n$  è un sistema di  $n$  vettori linearmente indipendenti.

In pratica gli operatori di rango finito sono degli operatori finito dimensionali, immersi in uno spazio infinito dimensionale, quindi la teoria delle equazioni lineari per questi operatori è banale. Più significativo è il caso di perturbazioni di rango finito dell'operatore identità, cioè lo studio di  $\mathbf{I} - T$ . L'interesse per questo tipo di operatori discende dalla ricerca degli autovalori di  $T$ , infatti  $\lambda$  è un autovalore di  $T$  se e solo se  $\text{Ker}(\lambda\mathbf{I} - T)$  è non banale. Sviluppare la teoria per  $\mathbf{I} - T$  permetterà dunque di considerare il problema agli autovalori  $Tu = \lambda u$ , nel caso di autovalori non nulli.

## **9.3 $\mathbf{I} - T$ con $T$ di rango finito**

Sia  $T$  un operatore di rango finito dato da

$$T = \sum_{i=1}^n |p_i\rangle\langle q_i|$$

Sia  $M$  il sottospazio finito (e dunque chiuso) generato dai vettori  $p_i$  e  $q_i$ , con  $i \in 1, \dots, n$ . Poiché  $M$  è chiuso

$$H = M \oplus M^\perp$$

Per definizione di  $M$ :

$$\begin{aligned} \text{Range } T &\subset M, & \text{da cui } M^\perp &\subset \text{Ker } T^* \\ \text{Range } T^* &\subset M, & \text{da cui } M^\perp &\subset \text{Ker } T \end{aligned}$$

Poiché  $H$  si decompone in somma diretta di  $M$  e  $M^\perp$ , posso scrivere i suoi elementi, in modo unico, come somma di elementi di  $M$  e di  $M^\perp$ :  $z = z_M + z_\perp$ , con  $z_M \in M$  e  $z_\perp \in M^\perp$ . Vediamo come agisce  $\mathbf{I} - T$ :

$$(\mathbf{I} - T)z = (\mathbf{I} - T)z_M + (\mathbf{I} - T)z_\perp = (\mathbf{I} - T)z_M + z_\perp$$

infatti  $z_{\perp} \in M^{\perp} \subset \text{Ker } T$ . Si osservi inoltre che  $(\mathbf{I} - T)z_M \in M$ . Ne segue che

$$\text{Ker } (\mathbf{I} - T) = \{z_M \in M : (\mathbf{I} - T)z_M = 0\}$$

che coincide con il nucleo della restrizione a  $M$  dell'operatore  $I - T$ . Analogamente

$$\text{Ker } (\mathbf{I} - T^*) = \{z_M \in M : (\mathbf{I} - T^*)z_M = 0\}.$$

Su  $M$ , che è di dimensione finita, gli operatori  $I - T$  e  $I - T^*$  sono uno l'aggiunto dell'altro, dunque

$$\dim \text{Ker } (\mathbf{I} - T) = \dim \text{Ker } (\mathbf{I} - T^*) < +\infty. \quad (9.3)$$

Studiamo ora le immagini. Dall'identità  $(\mathbf{I} - T)(z_M + z_{\perp}) = (\mathbf{I} - T)(z_M) + z_{\perp}$  si ottiene che

$$\text{Range } (\mathbf{I} - T) = (\mathbf{I} - T)(M) \oplus M^{\perp}$$

dove  $(\mathbf{I} - T)(M) \subset M$  è l'immagine della restrizione a  $M$  dell'operatore  $\mathbf{I} - T$ . Dunque l'immagine è somma diretta di  $M^{\perp}$ , che è un sottospazio chiuso, e dell'immagine della restrizione di  $\mathbf{I} - T$  a  $M$ , che è un sottospazio finito e dunque chiuso. Ne segue che l'immagine è somma diretta di due sottospazi chiusi ortogonali tra loro, dunque è un sottospazio chiuso (lo si provi per esercizio). Lo stesso risultato vale per  $\text{Range } (\mathbf{I} - T^*)$ . Quindi

$$\begin{aligned} H &= \text{Ker } (\mathbf{I} - T) \oplus \text{Range } (\mathbf{I} - T^*) \\ &= \text{Ker } (\mathbf{I} - T^*) \oplus \text{Range } (\mathbf{I} - T) \end{aligned}$$

Questa uguaglianza, insieme alla (9.3), dimostra che per gli operatori del tipo  $\mathbf{I} - T$ , con  $T$  di rango finito, valgono i teoremi dell'alternativa.

Un'osservazione finale: se  $\text{Ker } (\mathbf{I} - T)$  è banale, esiste l'inverso che è un operatore limitato. Nel caso in cui il kernel non sia banale, e l'equazione  $(\mathbf{I} - T)x = b$  abbia soluzione, la soluzione è della forma  $x = x_0 + x_1$ , con  $x_0 \in \text{Ker } (\mathbf{I} - T)$  soluzione qualunque dell'omogenea, e  $x_1$  unica soluzione di

$$(\mathbf{I} - T)x_1 = b \quad \text{con } x_1 \in (\text{Ker } (\mathbf{I} - T))^{\perp}$$

La soluzione in  $x_1$  è unica perché  $\mathbf{I} - T$  ristretto all'ortogonale al suo kernel è anche iniettivo oltre a essere suriettivo, dunque è invertibile e l'inverso è continuo. In particolare esiste  $C$  tale che  $\|x_1\| \leq C\|b\|$ . Una stima di questo tipo, cioè che a meno della soluzione dell'omogenea, la soluzione dell'equazione è ottenuta da  $b$  mediante un operatore limitato, sarà vera tutte le volte che potremo dimostrare un teorema dell'alternativa.

## 9.4 Equazioni integrali di Fredholm per nuclei separabili

Considero  $L^2(\Omega; \mathbb{R})$  e sia  $g(x, y)$  un **nucleo integrale** assegnato e sia  $b$  una funzione data. L'equazione

$$f(x) - \int_{\Omega} g(x, y)f(y) dy = b(x)$$

è detta equazione integrale di Fredholm. Sia

$$Kf(x) = \int_{\Omega} g(x, y)f(y).$$

Il suo aggiunto è

$$K^* f(x) = \int_{\Omega} g(y, x) f(y)$$

Il nucleo  $g$  è **separabile** se

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^n p_i(x) q_i(y)$$

con  $p_i$  e  $q_i$  in  $L^2(\Omega)$ . In tal caso

$$K f(x) = \sum_{i=1}^n (q_i, f) p_i(x)$$

è di rango finito, quindi per l'equazione

$$(\mathbf{I} - K) f = b$$

valgono le conclusioni descritte prima.

Nella dimostrazione del teorema dell'alternativa per gli operatori di rango finito, abbiamo proiettato su  $M$  che contiene il range di  $K$  e di  $K^*$ . Nella pratica si procede esplicitamente, limitandosi a proiettare sul range di  $K^*$ . Come esempio userò operatori integrali a nucleo separabile, ma la teoria è del tutto generale.

Consideriamo il problema di trovare soluzioni all'equazione di Fredholm  $f - K f = b$  per un nucleo separabile  $g$ . Allora

$$K f(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x) \int_{\Omega} q_i(y) f(y) dy = \sum_{i=1}^n p_i(x) (q_i, f)$$

Siano  $A_{ij} = \int_{\Omega} q_i(x) p_j(x) dx$ . Moltiplichiamo scalarmente l'equazione per  $q_i$ :

$$(q_i, f) - \sum_{j=1}^n (q_i, p_j) (q_j, f) = (q_i, b)$$

Indichiamo con  $f_i = (q_i, f)$  e  $b_i = (q_i, b)$ . Si ottiene il sistema

$$f_i - \sum_{j=1}^n A_{ij} f_j = b_i \quad i = 1 \dots n$$

Se la matrice  $\mathbf{I} - A$  è invertibile, il sistema ha sempre soluzione, e la soluzione del sistema originario è

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f_j p_j(x) + b(x)$$

(si noti che sull'ortogonale ai  $p_j$  la funzione  $f$  coincide con  $b$ ). Se la matrice non è invertibile, il sistema ha soluzione se e solo il vettore  $(b_1, \dots, b_n)$  è ortogonale al nucleo della matrice  $\mathbf{I} - A^*$ . Consideriamo l'equazione aggiunta

$$h(x) - \sum_{j=1}^n q_j(x) \int_{\Omega} p_j(y) h(y) dy = 0$$



e moltipliciamola scalarmente per  $p_j$  indicando con  $h_i = (p_i, h)$ . Si ottiene l'equazione omogenea aggiunta

$$h_i - \sum_{j=1}^n A_{ji} h_j = 0$$

Se questo sistema lineare ha soluzioni non banali, il kernel di  $\mathbf{I} - K^*$  è dato dalle funzioni  $h$  tali che

$$h(x) = \sum_{i=1}^n h_i q_i(x)$$

La condizione di ortogonalità di un vettore  $b$  a queste soluzioni è

$$(b, h) = 0 \iff \sum_{i=1}^n h_i (q_i, b) = 0 \iff \sum_{i=1}^n h_i b_i = 0$$

cioè esattamente l'ortogonalità del vettore  $(b_1, \dots, b_n)$  ai vettori  $(g_1, \dots, g_n)$  nel nucleo della matrice  $\mathbf{I} - A^*$ .

**Esercizio 19. Un'equazione di Fredholm a nucleo separabile**

Mostra che l'equazione

$$f(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 xy^3 f(y) dy = b(x)$$

ha sempre soluzione, e determinala.

Questo esercizio si risolve così: si ha

$$f(x) - \frac{x}{2} \int_{-1}^1 y^3 f(y) dy = b(x)$$

dunque se fosse noto il valore di

$$C_f = \int_{-1}^1 y^3 f(y) dy$$

la soluzione sarebbe semplicemente

$$f(x) = b(x) + \frac{1}{2} C_f x$$

Moltiplicando per  $x^3$  l'equazione e integrando, si ottiene un'equazione per  $C_f$ :

$$\int_{-1}^1 x^3 f(x) dx - C_f \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2} f(x) dx = \int_{-1}^1 x^3 b(x) dx$$

Cioè

$$C_f - \frac{1}{5} C_f = \int_{-1}^1 x^3 b(x) dx$$

che ha sempre soluzione:

$$C_f = \frac{5}{4} \int_{-1}^1 x^3 b(x) dx$$

Dunque l'equazione di partenza è sempre risolvibile. Noto infine che le soluzioni dell'omogenea si ottengono per  $b = 0$  e sia ha  $C_f = 0$  e dunque  $f = 0$ , cioè il nucleo è banale.

### Esercizio 20. Un'altra equazione di Fredholm a nucleo separabile

Sia ora

$$f(x) - \frac{5}{2} \int_{-1}^1 xy^3 f(y) dy = b(x)$$

Mostra che ha soluzione se  $b(x) = x^2$ , ma non se  $b(x) = x$ .

Procedendo come sopra, definisco

$$C_f = \int_{-1}^1 y^3 f(y) dy$$

moltiplico l'equazione per  $x^3$  e integro, ottenendo

$$C_f - C_f = \int_{-1}^1 x^3 b(x) dx$$

che non ha soluzione se  $\int_{-1}^1 x^3 b(x) dx \neq 0$ , e in tal caso l'equazione di partenza non ha soluzione. Invece, se  $\int_{-1}^1 x^3 b(x) dx = 0$ , l'equazione per  $C_f$  è risolta da qualunque  $C_f$  dunque la soluzione è data da

$$f(x) = c \frac{5}{2} x + b(x)$$

Nota che  $\{cx\}_{c \in \mathbb{R}}$  è il sottospazio delle soluzioni dell'omogenea, mentre  $\{cx^3\}_{c \in \mathbb{R}}$  è il sottospazio delle soluzioni dell'omogenea del problema aggiunto.

## 9.5 Piccole perturbazioni

Estendiamo la teoria fatta per  $I - T$  con  $T$  di rango finito. La teoria di questa estensione è iniziata con lo sviluppo in serie di polinomi dei nuclei integrali regolari, che evidentemente dà un'approssimazione di rango finito all'operatore integrale. Qui presento direttamente la versione astratta dei risultati.

## 9.6 Operatori piccoli e serie di Neumann

In dimensione finita, se  $A$  è una matrice invertibile e  $B$  una matrice qualunque, per continuità del determinante,

$$\text{se } |\varepsilon| \text{ è suff. piccolo, allora } \det(A - \varepsilon B) \neq 0$$

e dunque  $A - \varepsilon B$  è invertibile. L'uso della norma operatoriale permette di chiarire meglio il valore di  $\varepsilon$ . Consideriamo per semplicità  $A = \mathbf{I}$ . Ricordando che

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \in \mathbb{N}} x^k$$

vorremmo provare che

$$(\mathbf{I} - B)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} B^k$$

La serie a destra (detta serie di Neumann) è totalmente limitata se  $\|B\| < 1$  infatti

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|B^k\| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \|B\|^k = \frac{1}{1 - \|B\|}$$

dunque converge in norma ad operatore limitato. Per la convergenza totale, possiamo moltiplicare a sinistra termine a termine per  $I - B$  e ottenere

$$(I - B) \sum_{k \in \mathbb{N}} B^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} (B^k - B^{k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k - \sum_{k=0}^{+\infty} B^k = B^0 = I$$

e, poiché  $B$  commuta con tutte le sue potenze, lo stesso si ottiene moltiplicando a destra. Dunque la serie di Neumann effettivamente definisce l'inverso di  $I - B$ .

Se  $A$  è invertibile, allora, formalmente,

$$(A - B)^{-1} = (I - A^{-1}B)^{-1}A^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (A^{-1}B)^k A^{-1}$$

e analogamente

$$(A - B)^{-1} = A^{-1} \sum_{k \in \mathbb{N}} (BA^{-1})^k$$

Le serie convergono se  $\|A^{-1}B\| < 1$   $\|BA^{-1}\| < 1$ . Poiché  $\|A^{-1}B\|$  e  $\|BA^{-1}\|$  sono maggiorate da  $\|A^{-1}\| \|B\|$ , ne segue che per la convergenza è sufficiente che  $\|B\| \leq 1/\|A^{-1}\|$ . Ne segue che il sottoinsieme degli operatori invertibili è un aperto nella topologia data dalla norma operatoriale.

## 9.7 Equazioni integrali di Volterra

Un'equazione del tipo

$$f(x) - \int_0^x g(x, y) f(y) dy = b(x)$$

Si chiama equazione di Volterra. Nota che se vuoi trovare una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria lineare non omogenea

$$\dot{f}(t) = a(t)f(t) + g(t),$$

integrando da 0 a  $t$  ottieni

$$f(t) - \int_0^t a(s)f(s) ds = f(0) + \int_0^t g(s) ds$$

e questa è un'equazione di Volterra. (in generale le equazioni differenziali ordinarie si possono trasformare in equazioni integrali).

Nota anche che questo è un caso particolare di equazione di Fredholm.

Tornando all'equazione di Volterra, considero funzioni in  $\Omega = [0, \ell]$ , e assumo che il nucleo sia una funzione continua e limitata  $|g(x, y)| \leq M$ . Indico con

$$K_F f = \int_0^\ell g(x, y) f(y) dy$$

$$K_V f = \int_0^x g(x, y) f(y) dy = \int_0^\ell g(x, y) \mathcal{X}\{y < x\} f(y) dy$$

Considero le due equazioni di Fredholm e Volterra corrispondenti, con  $\mu$  numero reale.

$$f - \mu K_F f = b \quad f - \mu K_V f = b$$

È facile provare che

$$|K_F f(x)| \leq M\ell \|f\|_\infty$$

e che la stessa stima vale per  $K_V f$ . Dunque, per  $\mu$  abbastanza piccolo, cioè se  $|\mu| M\ell \|f\|_\infty < 1$ , entrambe le equazioni sono risolte dalla serie di Neumann applicata a  $b$ , sommata in  $L_\infty$ . In particolare, nel caso di Fredholm, si riconosce la serie di Neumann dentro la seguente espressione di  $f$  in funzione di  $b$ , ottenuta iterando l'equazione:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^n \int_{\Omega^n} g(x, y_1) g(y_1, y_2) \cdots g(y_{n-1}, y_n) b(y_n) dy_1 \cdots dy_n$$

In realtà, l'equazione di Volterra è risolvibile per ogni  $\mu$ , come è facile provare. Infatti si può fare una stima migliore  $K_V^n b$ :

$$\begin{aligned} |K_V^n b| &\leq \left| \int_0^x dy_1 k(x, y_1) \int_0^{y_1} dy_2 k(y_1, y_2) \cdots \int_0^{y_{n-1}} dy_n k(y_{n-1}, y_n) b(y_n) \right| \leq \\ &\leq M^n \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} |b(y_n)| dy_n \leq \|b\|_\infty M^n \ell^n / n! \end{aligned}$$

dunque la serie di  $\mu^n K_V^n b$  converge per qualunque  $\mu$ .

### **Esercizio 21. Equazioni di Fredholm e di Volterra per nuclei $L^2$**

Mostra che se  $g \in L^2((0, \ell)^2)$  allora  $K_F$  e  $K_V$  sono due operatori limitati, e dunque per  $\mu$  piccolo le equazioni

$$f - \mu K_F f = b \quad \text{e} \quad f - \mu K_V f = b$$

hanno soluzione per ogni  $b$ .

Mostra che l'equazione di Volterra ha soluzione per ogni  $\mu$ , assumendo che  $|g(x, y)| \leq p(x)q(y)$  con  $p, q \in L^2((0, \ell))$ . Suggerimento: RIFARE E CHIEDITI SE PUOI FARLO VIA COMPATTI O CON ALTRE IPOTESI SU  $g$

mostra iterativamente che puoi stimare  $K_V^n b$  con

$$\|K_V^n b\|^2 \leq \ell^{n-1} \|b\| \|p\| \left( \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} dy_n q^2(y_1) p^2(y_1) \cdots q^2(y_n) p^2(y_n) \right)^{1/2}.$$

Usa il fatto che, se  $\alpha(y_1 \dots y_n)$  è positiva e simmetrica per permutazioni delle variabili, allora

$$\int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} dy_n \alpha(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{n!} \int_{[0, x]^n} dy_1 \cdots dy_n \alpha(y_1, \dots, y_n)$$

per concludere che

$$\|K_V^n\| \leq \frac{(c\ell)^{n-1}}{\sqrt{n!}}$$

e che dunque  $f - \mu K_V f = b$  ha sempre soluzione.

Passo ora a piccole perturbazioni di operatori di rango finito. Premetto un'osservazione, facile da dimostrare: sia  $A$  è un operatore di rango finito, e sia  $B$  un operatore limitato, allora

$$AB \text{ e } BA \text{ sono di rango finito.}$$

**Teorema 9.2. Piccole perturbazioni di operatori di rango finito**

Sia  $K$  un operatore di rango finito,  $R$  un operatore con  $\|R\| < 1$ ,  $T = R + K$ . Per l'operatore  $I - T$  vale il teorema dell'alternativa di Fredholm.

*Dimostrazione.* Dimostrazione. Definendo  $A = I - R$  e notando che  $A$  è invertibile (in serie di Neumann) perché  $\|R\| < 1$ , riscrivo

$$I - T = (I - R) - K = A - K = A(I - A^{-1}K) = A(I - S)$$

con  $S = A^{-1}K$  operatore di rango finito, perché  $K$  ha rango finito. Passando all'aggiunto

$$I - T^* = (I - S^*)A^*$$

Per la teoria svolta sugli operatori di rango finito,

$$\dim \text{Ker}(I - S) = \dim \text{Ker}(I - S^*)$$

Inoltre

$$\text{Ker}(I - T) = \text{Ker}(A(I - S)) = \text{Ker}(I - S)$$

perché  $A$  è una biiezione, e

$$\text{Ker}(I - T^*) = \text{Ker}((I - S^*)A^*) = A^{*-1}\text{Ker}(I - S^*)$$

perché  $A^*$  è una biiezione. Quest'ultima identità implica che

$$\dim \text{Ker}(I - T^*) = \dim \text{Ker}(I - S^*) = \dim \text{Ker}(I - S) = \dim \text{Ker}(I - T) < +\infty$$

Controllo la chiusura dell'immagine di  $I - T$ ;

$$\text{Range}(I - T) = \text{Range}(A(I - S)) = A \text{Range}(I - S)$$

e dunque è chiusa, perchè  $I - S$  ha immagine chiusa e  $A$  è un omeomorfismo. □

## 9.8 Convergenza debole

Nello studio dell'equazione delle onde e nella meccanica quantistica è essenziale studiare il problema agli autovalori

$$Tx = \lambda x \text{ cioè } (\lambda \mathbf{I} - T)x = 0$$

Il risultato perturbativo del capitolo precedente si può applicare a questa equazione solo se la perturbazione  $R$  ha norma più piccola di  $\lambda$ . Dunque se vogliamo usare il teorema dell'alternativa per studiare il problema agli autovalori per ogni  $\lambda$ , dobbiamo considerare operatori che sono di rango finito a meno di una perturbazione arbitrariamente piccola. Dobbiamo cioè identificare quali sono gli operatori che sono limite di operatori di rango finito. Mostrerò che si ottiene un sottospazio più grande di quello degli operatori di rango finito.

L'estensione dei teoremi dell'alternativa a una classe di operatori più ampia di quella degli operatori di rango finito è un argomento che ha a che fare con la compattezza in spazi di Hilbert. Osservo innanzi tutto che i chiusi e limitati in spazi di Hilbert infinito dimensionali non sono compatti. L'esempio più semplice è quello costituito dalla successione costituita dagli elementi di una base ortonormale: sono tutti vettori di norma 1, ma sono a due a due ortogonali, dunque  $\|e_k - e_h\| = \sqrt{2}$  e la successione non può convergere.

D'altra parte, se  $K$  è un operatore di rango finito, l'immagine mediante  $K$  di un insieme limitato è un limitato in un sottospazio finito dimensione e dunque è precompatto. Mostrerò che questa è esattamente la proprietà conservata da operatori che sono limite di operatori di rango finito.

Però è più semplice formulare questa parte di teoria in termini di successioni **debolmente convergenti**: in termini fisici, si tratta di spostare lo sguardo dalla successione agli osservabili, cioè ai prodotti scalari con altri vettori.

### Definizione.

La successione  $f_n$  **converge debolmente** a  $f$  e si indica con

$$f_n \rightharpoonup f, \iff \forall g \in H \quad (g, f_n) \rightarrow (g, f)$$

Non è difficile provare che il limite debole è unico, e che se  $f_n \rightarrow f$  in norma, allora  $f_n \rightharpoonup f$ . Inoltre in spazi di dimensione finita  $f_n \rightharpoonup f$  se e solo se  $f_n \rightarrow f$  in norma (lo si dimostri per esercizio). In dimensione infinita l'equivalenza è falsa, come mostra questo esempio.

### Esempio 9.3. Convergenza debole a 0 di vettori ortonormali

Sia  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un sistema ortonormale infinito, allora

$$e_n \rightharpoonup 0$$

infatti,

$$(e_n, g) = \hat{g}_n \rightarrow 0 \text{ perché } \sum_n |\hat{g}_n|^2 \leq \|g\|^2$$

per la disuguaglianza di Bessel. D'altra parte  $\|e_n\| = 1$ , dunque  $e_n$  non converge a 0 in norma. Chiamerò spesso **convergenza forte** la convergenza in norma.

Utilizzando il principio dell'uniforme limitatezza (conseguenza del lemma della categoria di Baire) si dimostra facilmente il seguente importante fatto.

**Teorema 9.3. Limitatezza delle successioni debolmente convergenti**

Se  $f_n \rightharpoonup f$ , allora  $f_n$  è limitata, cioè esiste  $c > 0$  tale che, per ogni  $n$ ,  $\|f_n\| \leq c$ .

Inoltre

$$\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$$

*Dimostrazione.* Dimostro prima il secondo punto.

$$\|f\|^2 = (f, f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f^n, f) \leq \|f\| \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f^n\|,$$

e dividendo per  $\|f\|$  si ottiene la tesi.

Del secondo punto si può dare una dimostrazione a mano nel caso separabile, ma comunque è più utile imparare il teorema di Banach-Steinhaus da cui discende più semplicemente. Ometto la dimostrazione.

**Proposizione 9.1. Condizioni equivalenti di convergenza debole**

Sono equivalenti:

- (a)  $f^n$  converge debolmente a  $f$
- (b)  $f^n$  è limitata ed esiste un sottospazio denso  $W$  tale che per ogni  $w$  in  $W$  la successione  $(w, f^n)$  converge a  $(w, f)$
- (c)  $f^n$  è limitata, e esiste una base  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , tale che per ogni  $k$  si ha  $(e_k, f^n) \rightarrow (e_k, f)$

Inoltre, se  $f^n$  è limitata e  $(e_k, f^n) \rightarrow \hat{f}(k)$ , allora  $f = \sum_k \hat{f}(k)e_k \in H$  e  $f^n \rightharpoonup f$ .

*Dimostrazione.* Usando la limitatezza delle successioni debolmente convergenti, è immediato verificare che il punto (a) implica (b) per qualunque sottospazio denso, e (c) per qualunque base.

Proviamo che (b) implica (a). Sia  $g \in H$ . Poiché  $W$  è denso, dato  $\varepsilon$  esiste  $g_\varepsilon \in W$  tale che  $\|g - g_\varepsilon\| < \varepsilon$ . Dunque

$$|(g, f^n) - (g, f)| \leq |(g - g_\varepsilon, f^n - f)| + |(g_\varepsilon, f^n - f)| \leq (\|f\| + \sup \|f^n\|)\varepsilon + |(g_\varepsilon, f^n - f)|$$

e il secondo membro tende a 0 in  $n$  a  $\varepsilon$  fissato. Dunque  $(g, f^n) \rightarrow (g, f)$ .

Proviamo che (c) implica (b). Sia  $W = \text{span}\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . È immediato verificare che per ogni  $w \in W$ , si ha che  $(w, f^n) \rightarrow (w, f)$ , infatti  $w$  è una combinazione lineare finita di vettori  $e_k$ .

Per provare l'ultima asserzione, supponiamo che  $(e_k, f^n) \rightarrow z_k$ . Per il lemma di Fatou

$$\sum_k |z_k|^2 = \sum_k \lim_n |(e_k, f^n)|^2 \leq \liminf_n \sum_k |(e_k, f^n)|^2 = \liminf_n \|f^n\|^2 < +\infty$$

Dunque  $f = \sum e_k z_k \in H$ , e vale  $(e_k, f^n) \rightarrow (e_k, f)$ . A questo punto si conclude usando (c).  $\square$

**Esercizio 22. Un controesempio**

Come controesempio all'implicazione (c)  $\Rightarrow$  (a), considera la successione non limitata

$$f^n = \sum_{i=n+1}^{2n} e_i.$$

Prova che per ogni  $e_k$  vale  $(e_k, f^n) \rightarrow 0$ , d'altra parte calcola  $\|f^n\|$  e mostra che diverge. Trova  $g \in H$  tale che  $(g, f^n)$  non tende a 0.

L'indebolimento della nozione di convergenza permette di riottenere la precompattatezza per successioni (debole) dei limitati, molto utile in analisi funzionale.

**Teorema 9.4. I limitati sono debolmente precompatti**

Lo dimostro facendo vedere che una successione  $f_n$  limitata ammette una sottosuccessione debolmente convergente. Sia  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una base. Poichè  $\|f_n\| \leq c$  per ogni  $n$ , da  $\hat{f}_n(0) = (e_0, f_n)$  si può estrarre una sottosuccessione  $n_1(k)$  convergente a un numero  $g(0)$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Considero ora  $\hat{f}_{n_1(k)}(1) = (e_1, f_{n_1(k)})$ . anche questa successione ammette una sotto-successione, che indico con  $n_2(k)$ , convergente, a un numero  $\hat{g}(1)$ . Iterando questa costruzione, ottengo le sotto-successioni  $n_j(k)$ , ognuna sottosuccessione delle precedenti, per cui  $\hat{f}_{n_j(k)}(j) = (e_j, f_{n_j(k)}) \rightarrow \hat{g}(j)$ . Per  $k > j$  la successione  $n_k(k)$  è una sottosuccessione di  $n_j(k)$ , dunque, per ogni  $j$ ,

$$\hat{f}_{n_k(k)}(j) = (e_j, f_{n_k(k)}) \rightarrow \hat{g}(j)$$

A questo punto, uso (c) del teorema precedente e concludo che la sottosuccessione trovata converge debolmente.

È il caso di ricordare che il teorema di Banach-Alaoglu garantisce che i chiusi e limitati del duale di uno spazio di Banach sono compatti rispetto alla topologia  $*$ -debole, e che se uno spazio è separabile, allora la topologia  $*$ -debole è metrizzabile, dunque la compattatezza equivale alla compattatezza per successioni, e questo è esattamente il caso degli spazi di Hilber separabili.

Si noti infine che usando il teorema di Hahn-Banach si dimostra che i sottoinsiemi convessi sono chiusi se e solo se sono debolmente chiusi. Dunque il teorema precedente assicura che i convessi limitati chiusi sono debolmente compatti.

Come mostrato sopra, una successione di vettori ortonormali converge debolmente a 0. Generalizziamo questo esempio.

**Proposizione 9.2. Un esempio utile**

Sia  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  un sistema ortonormale completo, e sia  $f^n$  una successione limitata, cioè  $\|f^n\| \leq C$ , con  $f^n$  nell'ortogonale di  $\text{span}\{e_k\}_{k \leq n}$ . Allora  $f^n \rightharpoonup 0$ .

*Dimostrazione.* Infatti, per ogni  $k$ ,  $(f_n, e_k) = 0$  non appena  $n > k$ . Dunque per il punto (c) del teorema precedente  $f_n \rightharpoonup 0$ . □

Quelli che seguono sono risultati semplici che però saranno utili nelle applicazioni successive.

**Teorema 9.5. Convergenza debole, convergenza forte**

Se  $f^n \rightharpoonup f$  e  $g^n \rightarrow g$  in norma, allora

$$(f^n, g^n) \rightarrow (f, g)$$

*Dimostrazione.* Infatti

$$|(f^n, g^n) - (f, g)| \leq |(f^n, g^n - g)| + |(f^n - f, g)| \leq \|f^n\| \|g^n - g\| + |(f^n - f, g)|$$



Il primo termine tende a 0 perché  $g^n \rightarrow g$  in norma e  $\|f^n\|$  è limitata, il secondo tende a 0 perché  $f^n \rightarrow f$ .  $\square$

Si noti che se  $f^n \rightarrow f$  e  $g^n \rightarrow g$  non è in generale vero che  $(f^n, g^n) \rightarrow (f, g)$ . Per esempio  $e_n \rightarrow 0$ , ma  $(e_n, e_n) = 1$

Ci sono alcuni esempi chiave di convergenza debole a 0 che coinvolgono aspetti interessanti della teoria delle funzioni.

#### Esempio 9.4. Convergenza debole a 0 per oscillazione

Analogamente al caso  $l_2(\mathbb{N})$ , in  $l_2(\mathbb{Z})$  si ha  $e_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \pm\infty$ . Usando l'isometria tra  $L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$  e  $l_2(\mathbb{Z})$ , si ottiene che la successione  $e^{ikx}$  converge debolmente a 0 per  $k \rightarrow \pm\infty$ . Questa asserzione è evidentemente un caso particolare del Lemma di Riemann-Lebesgue, perché equivale a

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = 0$$

per  $f \in L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ .

Il Lemma di Riemann-Lebesgue si dimostra per funzioni sommabili, che include anche il nostro caso, perché  $f \in L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$  implica  $f \in L^1((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ .

#### Esempio 9.5. Convergenza debole a 0 per concentrazione e dispersione

Sia  $g$  positiva a supporto in  $(-M, M)$  e di integrale 1. Come noto,

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow \delta(x)$$

nel senso delle distribuzioni; sia  $f_\varepsilon = \sqrt{g_\varepsilon}$ . Ovviamente  $\|f_\varepsilon\|_{L^2} = 1$ , mentre

$$f_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0$$

infatti se  $h$  è una funzione limitata a supporto compatto

$$(h, f_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} h(x) \sqrt{g(x/\varepsilon)} dx = \sqrt{\varepsilon} \int_{-M}^M h(\varepsilon x) \sqrt{g(x)} dx$$

che tende a 0. Ricordando che le funzioni limitate a supporto compatto sono dense in  $L^2(\mathbb{R})$ , si ottiene che  $f_\varepsilon \rightarrow 0$ .

Anche per  $\varepsilon \rightarrow +\infty$ ,  $f_\varepsilon \rightarrow 0$ , infatti se  $h$  è in  $L^1$ ,

$$(h, f_\varepsilon) \leq \sqrt{\frac{\|g\|_\infty}{\varepsilon}} \|h\|_1 \rightarrow 0$$

Usando la densità delle funzioni  $L^1 \cap L^\infty$  in  $L^2$  si ottiene la tesi. In questo caso  $f_\varepsilon$  tende debolmente a 0 perché la sua norma  $L^2$  si spalma su tutto lo spazio.

#### Esempio 9.6. Convergenza debole per traslazione all'infinito

Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , e sia  $f_r(x) = f(x - r)$  la sua traslazione a destra di  $r$ , che ne conserva la norma  $L^2$ . È facile mostrare che  $f_r \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow +\infty$ . Sia infatti  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Poiché anche  $f$  è in  $L^2(\mathbb{R})$ , dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $M$  tale che

$$\int_{|x|>M} f^2 < \varepsilon \text{ e } \int_{|x|>M} g^2 < \varepsilon$$

Sia ora  $n > 2M$

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| |f(x-r)| dx = \int_{-\infty}^{r/2} |g(x)| |f(x-r)| + \int_{r/2}^{+\infty} |g(x)| |f(x-r)|$$

Usando Cauchy-Schwartz, il primo termine risulta minore di  $\|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \|f\|_{L^2((-\infty, -r/2))}$ , il secondo di  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2((r/2, +\infty))}$ , entrambi stimati da costante per  $\varepsilon$  perché  $r/2 > M$ .

In pratica, la norma di  $f_r(x) = f(x-r)$  si sposta verso  $+\infty$ , e dunque, integrando  $f_r$  contro una funzione  $g$  di  $L^2$  che ha necessariamente la norma concentrata al finito, si ottiene una quantità evanescente.

### Esempio 9.7. Convergenza debole in trasformata di Fourier

L'isometria data dalla trasformata di Fourier trasforma la convergenza debole per oscillazione (cioè Riemann-Lebesgue, vedi il punto 7.2 a pagina 51) in convergenza debole per traslazione all'infinito e viceversa. Infatti, se  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\mathcal{F}(e^{i\mu x} f(x))(\lambda) = \hat{f}(\lambda - \mu).$$

Usando l'esempio precedente e che  $\mathcal{F}$ , essendo un'isometria, porta successioni debolmente convergenti in successioni debolmente convergenti, se ne deduce che, per ogni  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ;

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{i\mu x} f(x) g(x) dx = 0$$

Nota che  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  implica che il prodotto è in  $L^1(\mathbb{R})$ .

Può essere utile rivedere alcuni degli esempi precedenti in termini di convergenza forte e debole di operatori.

## 9.9 Successioni di operatori

Data la successione  $T_n \in \mathcal{L}(H)$  e  $T \in \mathcal{L}(H)$

- $T_n$  converge in norma a  $T$  se  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$
- $T_n$  converge **fortemente** a  $T$  se, per ogni  $x \in H$ ,  $T_n x$  converge in norma a  $Tx$ , cioè  $\|T_n x - Tx\| \rightarrow 0$
- $T_n$  converge **debolmente** a  $T$  se  $T_n x \rightharpoonup Tx$  cioè per ogni  $y \in H$   $(y, T_n x) \rightarrow (y, Tx)$

Si osservi che  $T_n$  converge debolmente a  $T$  se e solo se, per ogni  $f \in H$ , la successione  $T_n f$  converge debolmente a  $Tf$ .

Consideriamo alcuni esempi.

### Esempio 9.8. Convergenza di sequenze di Proiettori

Data una base, sia  $P_n$  il proiettore su  $\text{span}\{e_k\}_{k \leq n}$ . La successione  $P_n$  converge fortemente all'identità, infatti dato  $u$

$$\|u - P_n u\|^2 = \sum_{k > n} |\hat{u}_k|^2 \rightarrow 0$$

perché è il resto di una serie convergente (la serie è convergente per la disuguaglianza di Bessel). Equivalentemente,  $\mathbf{I} - P_n$ , che è il proiettore ortogonale su  $\text{span}\{e_k\}_{k \geq n+1}$ , converge fortemente a

0. D'altra parte  $\mathbf{I} - P_n$  è il proiettore sull'ortogonale, dunque ha norma 1 e la convergenza non vale in norma.

Se  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è un sistema ortonormale completo, si può dunque scrivere l'identità

$$\mathbf{I} = \sum_{k \in \mathbb{N}} |e_k\rangle\langle e_k|,$$

dove la serie converge fortemente ma non in norma.

### **Esempio 9.9. Convergenza di operatori di traslazione**

Sia  $S_r \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$  definito da

$$S_r f(x) = f(x - r)$$

Abbiamo già mostrato che  $f(x - r)$  tende debolmente a 0, dunque  $S_r$  tende debolmente a 0 per  $r \rightarrow +\infty$ , ma non fortemente.

Usando l'isometria data dalla trasformata di Fourier, si ottiene che anche l'operatore di moltiplicazione

$$M_r : f(x) \rightarrow e^{-irx} f(x)$$

tende debolmente a 0 (ma non fortemente) per  $r \rightarrow +\infty$ .

### ***Esercizio 23. Convergenza delle iterate degli shift***

Sia  $S^n \in \mathcal{L}(\ell_2)$  l'iterato  $n$ -esimo dello shift a destra di un posto, cioè lo shift a destra di  $n$  posti. Si mostri per esercizio che  $S^n$ , che conserva la norma  $\ell_2$ , tende a 0 debolmente ma non fortemente. Si consideri ora il suo aggiunto  $S^{n*}$  che è lo shift a sinistra di  $n$  posti. Si mostri che ha norma 1, e che tende fortemente a 0, per la disuguaglianza di Bessel.

## 10 Operatori compatti

Torniamo ai teoremi dell'alternativa.

### 10.1 Operatori compatti

Definizione:  $T$  è un **operatore compatto** se e solo se porta insiemi limitati in insiemi precompatti.

Si provi per esercizio che  $T$  è compatto se e solo se  $f_n \rightarrow f$  implica  $Tf_n \rightarrow Tf$ , cioè  $\|Tf_n - Tf\| \rightarrow 0$ . Per completare questa dimostrazione serve il seguente risultato che si dimostra nei corsi di analisi di base: in uno spazio metrico, la successione  $x_n$  converge a  $x$  se e solo se per ogni sottosuccessione esiste una sua sottosuccessione che converge a  $x$ .

#### Proposizione 10.1. Proprietà degli operatori compatti

- oc 1.** Se  $T$  è compatto e  $B$  è limitato, allora  $TB$  e  $BT$  sono compatti (per esercizio).
- oc 2.** Gli operatori di rango finito sono compatti (per esercizio).
- oc 3.** Il sottospazio degli operatori compatti è chiuso, cioè se  $T_n \rightarrow T$  e  $T_n$  sono compatti, allora  $T$  è compatto.
- oc 4.** Il sottospazio degli operatori di rango finito è denso nel sottospazio degli operatori compatti, cioè  $T$  è compatto se e solo se è limite di operatori di rango finito.

*Dimostrazione.* Proviamo **oc 3**: sia  $f_n \rightarrow f$  e sia  $T_m \rightarrow T$ , con  $T_m$  compatti. Per ogni  $n$  ed  $m$ :

$$\|Tf_n - Tf\| \leq \|T - T_m\| (\|f_n\| + \|f\|) + \|T_m f_n - T_m f\|$$

Per  $m$  abbastanza grande,  $\|T - T_m\|$  è piccolo, e a  $m$  fissato, essendo  $T_m$  compatto,  $\|T_m f_n - T_m f\| \rightarrow 0$  in  $n$ . Dunque  $\|Tf_n - Tf\|$  va a zero e quindi  $T$  è compatto.

Se  $T_m$  sono operatori di rango finito, e  $T_m \rightarrow T$ , allora  $T$  è compatto per il punto precedente. Proviamo il viceversa, cioè che per ogni  $T$  compatto,  $T$  è limite di operatori di rango finito. Fissiamo una base e sia  $P_n$  il proiettore su  $V_n = \text{span}\{e_k\}_{k=0}^n$  e  $P_n^\perp$  il proiettore sull'ortogonale. Sia  $T_n = TP_n$ . Per costruzione  $T_n$  è di rango finito e  $T - T_n = TP_n^\perp$ . Supponiamo per assurdo che  $\|T - T_n\| = \|TP_n^\perp\|$  non tenda a 0, dunque passando a una sottosequenza che indico ancora con  $n$ ,  $\|TP_n^\perp\| \geq \ell > 0$ . Quindi esiste una successione  $f_n$  di vettori di lunghezza 1 tale che  $\|TP_n^\perp f_n\| \geq \ell$ . Poiché  $1 = \|f_n\|^2 = \|P_n f_n\|^2 + \|P_n^\perp f_n\|^2$ , scegliendo  $g_n = P_n^\perp f_n / \|P_n^\perp f_n\| \in V_n$  che ha norma uno, si ha

$$\|TP_n^\perp g_n\| = \|TP_n^\perp f_n\| / \|P_n^\perp f_n\| \geq \ell.$$

Dunque abbiamo trovato  $g_n \notin V_n$  con  $\|g_n\| = 1$  tale che

$$\|Tf_n\| = \|TP_n^\perp g_n\| \geq \ell$$

Ma come abbiamo dimostrato nel teorema 9.2,  $g_n \rightarrow 0$ , e dunque, essendo  $T$  compatto,  $\|Tg_n\| \rightarrow 0$ , che è assurdo.  $\square$

Come abbiamo dimostrato nel teorema 9.2, se un  $T = K + R$ ,  $K$  è di rango finito e  $R$  ha norma inferiore a 1, allora per  $T$  valgono i teoremi dell'alternativa. Questo è proprio il caso degli operatori compatti.

**Teorema 10.1. Teorema dell'alternativa per operatori compatti**

Se  $T$  è compatto, per l'operatore  $\lambda \mathbf{I} - T$ , con  $\lambda \neq 0$ , valgono i teoremi dell'alternativa. Infatti,  $T$  si può approssimare con precisione arbitraria con operatori di rango finito, dunque per  $\varepsilon < |\lambda|$ , esiste  $R_\varepsilon$  di norma minore di  $\varepsilon$ , e  $K_\varepsilon$  di rango finito tale che

$$\lambda \mathbf{I} - T = (\lambda \mathbf{I} - R_\varepsilon) - K_\varepsilon$$

con  $(\lambda \mathbf{I} - R_\varepsilon)$  invertibile. Procedendo come nel teorema 9.2 si dimostra la tesi.

Come corollario, si ottiene il risultato del teorema 9.2 anche per operatori compatti.

**Teorema 10.2. Piccole perturbazioni di operatori compatti**

Sia  $K$  un operatore compatto,  $R$  un operatore con  $\|R\| < 1$ ,  $T = R + K$ . Per l'operatore  $I - T$  vale il teorema dell'alternativa di Fredholm.

Premetto agli esempi di operatori compatti qualche osservazione sulla compattezza in  $\ell_2$ .

**Esempio 10.1. Sottoinsiemi compatti in  $\ell_2$** 

Sia  $\alpha > 0$ , e sia

$$W = \{\hat{f} \in \ell_2 \mid \sum_{k \geq 0} (1 + |k|^{2\alpha}) |\hat{f}_k|^2 \leq c < +\infty\}$$

$W$  è un compatto di  $\ell_2$ . Sia infatti  $\hat{f}^n$  una successione in  $W$ . Per ogni  $k$ ,

$$(1 + |k|^{2\alpha}) |\hat{f}_k^n|^2 < c$$

dunque per sottosequenze,  $\hat{f}_k^n$  converge in  $n$  (va usato il solito argomento diagonale; continuo a indicare con  $\hat{f}^n$  le varie sottosequenze); chiamo  $\hat{z}$  il limite. Per il lemma di Fatou:

$$\sum_{k \geq 0} (1 + |k|^{2\alpha}) |\hat{z}_k|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} (1 + |k|^{2\alpha}) |\hat{f}_k^n|^2 \leq c$$

e dunque  $\hat{x} \in W$ . Mostro che la convergenza è forte:

$$\sum_{k \geq 0} |\hat{f}_k^n - \hat{z}_k|^2 = \sum_{k=0}^m |\hat{f}_k^n - \hat{z}_k|^2 + \sum_{k=m+1}^{+\infty} |\hat{f}_k^n - \hat{z}_k|^2 \frac{1 + |k|^{2\alpha}}{1 + |k|^{2\alpha}} \leq \sum_{k=0}^m |\hat{f}_k^n - \hat{z}_k|^2 + \frac{2c}{1 + m^{2\alpha}}$$

Scegliendo  $m$  abbastanza grande, il secondo termine può essere reso piccolo a piacere, mentre il primo, a  $m$  fissato, tende a 0.

Come applicazione, si osservi che se  $f \in L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$  è derivabile e la derivata è in  $L^2$ , allora

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2) |\hat{f}_k|^2 < +\infty$$

Dunque avere derivata limitata in norma  $L^2$  è una condizione sufficiente per la compattezza

Approfondisco questo esempio. Si chiama **spazio di Sobolev**  $H^m$  lo spazio delle funzioni  $L^2$  con derivate fino all'emmesima in  $L^2$ :

$$H^m = \left\{ f : \int |D^i f|^2 < +\infty, i \in 0 \dots m \right\}$$

È uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(f, g)_m = \sum_{i=0}^m (D^i f, D^i g)$$

dove i prodotti a destra sono in  $L^2$ . In serie di Fourier,  $H^m$  si identifica con

$$h^m = \left\{ \hat{f} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2 + \dots + |k|^{2m}) |\hat{f}_k|^2 < +\infty \right\}$$

L'esempio precedente mostra come i limitati di  $h^m$  siano percompatti in  $\ell^2$ , dunque i limitati di  $H^m$  sono precompatti in  $L^2$ . In altri termini, l'immersione naturale di  $H^m$  in  $L^2$  è un operatore compatto.

#### **Esercizio 24.**

Generalizza l'esempio mostrando che se  $\alpha_k$  è una successione positiva monotona crescente e divergente, l'insieme

$$W = \left\{ \hat{f} \in \ell_2 \mid \sum_{k \geq 0} \alpha_k^2 |\hat{f}_k|^2 \leq c \right\}$$

è compatto. Mostra che sia l'ipotesi di monotonia sia quella di positività sono necessarie.

Come complemento a questo esempio, dimostra che l'insieme  $\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int (1 + |x|^2) |f(x)|^2 dx \leq c\}$  non è compatto (costruisci un controesempio con le funzioni a supporto in  $D$  compatto di  $\mathbb{R}^n$ , per le quali la limitatezza dell'integrale proposto non dà nessuna informazione aggiuntiva oltre alla limitatezza della norma).

#### **Esempio 10.2. Compattezza degli operatori di moltiplicazione in $\ell_2$**

Sia  $\beta_k$  una successione in  $\mathbb{C}$ . L'operatore

$$(T\hat{f})_k = \beta_k \hat{f}_k$$

è continuo se  $\beta_k$  è limitata e

$$T = \sup_k |\beta_k|.$$

Sia ora  $T_n = TP_n$ , dove  $P_n$  è il proiettore sulle prime  $n+1$  componenti, cioè  $(T_n \hat{f})_k$  è zero se  $k > n$ , mentre è  $\beta_k \hat{f}_k$  per  $k \leq n$ . Questo operatore è di rango finito. Vediamo sotto quali condizioni c'è convergenza in norma a  $T$ . Anche l'operatore  $T - T_n$  è un operatore di moltiplicazione, dunque

$$\|T - T_n\| = \sup_{k > n} |\beta_k|$$

Si ha convergenza in norma se e solo se  $\beta_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ .

Ne segue che se  $\beta_k$  è infinitesima, l'operatore di moltiplicazione  $T$  è compatto.

Come conseguenza, sia  $\alpha_k$  una successione positiva divergente. L'operatore  $T$  che moltiplica per  $1/\alpha_k$  è compatto, dunque è compatto l'insieme

$$T(\{\hat{f} : \|\hat{f}\| \leq 1\}) = \left\{ \{\hat{f}_k/\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \sum_k |\hat{f}_k|^2 \leq 1 \right\}$$

che, indicando con  $\hat{x}_k = \hat{f}_k/\alpha_k$  è l'insieme

$$\left\{ \{\hat{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \sum_k |\alpha_k|^2 |\hat{x}_k|^2 \leq 1 \right\}$$

In questo modo abbiamo ritrovato la compattezza in  $\ell_2$  delle successioni che hanno maggiore sommabilità.

### Esempio 10.3. Compattezza degli operatori integrali con nucleo in $L^2$

Ricordo che se  $\varphi_i(x)$  è una base per  $L^2(\Omega)$  allora  $\varphi_i(x)\varphi_j(y)$  è una base per  $L^2(\Omega \times \Omega)$  (vedi 2.5). Sia dunque  $g(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ . Per quanto detto sopra,  $g$  è il limite in  $L^2$  di  $\sum_{i,j \leq m} \hat{g}_{ij} \varphi_i(x)\varphi_j(y)$  per opportuni  $\hat{g}_{ij}$ . Dunque l'operatore associato a  $g$  è limite di operatori di rango finito (verificare per esercizio questa affermazione, usando che la norma dell'operatore è stimata dalla norma  $L^2(\Omega \times \Omega)$  del nucleo, vedi 6). Ne segue che è compatto.

### Esempio 10.4. Compattezza degli operatori in $\ell_2$ con nucleo $\ell_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

Analogamente, sia  $g_{ij} \in \ell_2(\mathbb{N}^2)$ , cioè

$$\sum_{ij} |g_{ij}|^2 < +\infty$$

Allora l'operatore

$$(K\hat{f})_i = \sum_j g_{ij} \hat{f}_j$$

è compatto, infatti se ne ottengono approssimazioni di rango finito troncando la serie, e il resto tende a zero in  $\ell_2$  per l'ipotesi di sommabilità dei coefficienti  $g_{ij}$ . In dettaglio, sia  $P_m$  l'operatore di proiezione sulle prime  $m$  componenti, e sia  $K_m = KP_m$ , cioè l'operatore che ha come elementi di matrice

$$g_{ij} \chi_{\{j \leq m\}}$$

Ora

$$\|K - K_m\| = \|KP_m^\perp\|$$

Dunque è sufficiente provare che se  $g \in \ell_2(\mathbb{N}^2)$  allora  $\|KP_m^\perp\| \rightarrow 0$ , per ottenere che  $K_m \rightarrow K$  in norma. Procediamo esplicitamente:

$$|(KP_m^\perp \hat{f})_i| \leq \sum_{j \geq m+1} |g_{ij}| |\hat{f}_j| \leq \left( \sum_{j \geq m+1} |g_{ij}|^2 \right)^{1/2} \|\hat{f}\|$$

Quadrando e sommando in  $i$ , dividendo per  $\|f\|$  e passando al sup su  $\|f\| = 1$ :

$$\|KP_m^\perp\| \leq \sum_{j \geq m+1} \sum_{i \geq 0} |g_{ij}|^2$$

Ma la serie in  $j$  è convergente, dunque il suo resto  $\sum_{j=m+1}^{+\infty}$  tende a 0 per  $m \rightarrow +\infty$ , e questo prova la tesi.

### Esempio 10.5. Compattezza di operatori integrali con nucleo singolare

Sia  $\Omega$  dominio limitato di  $\mathbb{R}^n$ , sia  $h(x, y)$  una funzione limitata. Considero l'operatore integrale

$$Kf(x) = \int_{\Omega} \frac{h(x, y)}{|x - y|^\alpha} f(y) dy$$

Mostra che il nucleo è  $L^2$  (e dunque  $K$  è continuo e compatto) se  $\alpha < n/2$ .

Si può provare che  $K$  è compatto per  $\alpha < n$ . Intanto osserviamo che per  $\alpha < n$  è continuo. Ricordando le condizioni di continuità discusse in 6, è sufficiente provare la limitatezza di

$$M = \max \left( \sup_{z_1 \in \Omega} \int_{\Omega} dz_2 \frac{|h(z_1, z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha}, \sup_{z_2 \in \Omega} \int_{\Omega} dz_1 \frac{|h(z_1, z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha}, \right)$$

Si ottiene

$$M \leq \|h\|_\infty \sup_{y \in \Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{|x - y|^\alpha} dx$$

Sia  $L = \text{diam}(\Omega)$ . L'integrale si stima con

$$\int_{|z| \leq L} \frac{1}{|z|^\alpha} dz = c_n \int_0^L \frac{\rho^{n-1}}{\rho^\alpha} d\rho = \frac{c_n}{n - \alpha} L^{n-\alpha}$$

se  $\alpha < n$ , dove  $c_n$  è la misura del bordo della sfera unitaria in  $\mathbb{R}^n$ .

Mostriamo che sotto questa stessa condizione sufficiente per la limitatezza, si ha che  $K$  è compatto. Infatti, sia  $K_\varepsilon$  l'operatore di nucleo  $g_\varepsilon$ , dove

$$g_\varepsilon = \frac{h(x, y)}{|x - y|^\alpha} \mathcal{X}\{|x - y| > \varepsilon\}$$

Si tratta di un nucleo limitato su  $\Omega \times \Omega$ , con  $\Omega$  limitato, dunque è in  $L^2(\Omega \times \Omega)$ , e quindi  $K_\varepsilon$  è compatto. Resta da provare che  $K_\varepsilon$  tende a  $K$  in norma per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , infatti essendo i  $K_\varepsilon$  compatti il limite è compatto. Procedendo come sopra,

$$\|K - K_\varepsilon\| \leq M_\varepsilon$$

dove

$$M_\varepsilon \leq \|h\|_\infty \sup_{y \in \Omega} \int_{\Omega} \frac{\mathcal{X}\{|x - y| \leq \varepsilon\}}{|x - y|^\alpha} dx \leq \frac{c_n}{n - \alpha} \|h\|_\infty \varepsilon^{n-\alpha}$$

che tende a 0 se  $\alpha < n$ .

### **Esercizio 25. Operatori di convoluzione in $\ell_2(\mathbb{Z})$**

Mostra che se  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| = \|a\|_{\ell_1}$  è limitata, allora l'operatore

$$(A\hat{x})_k = \sum_{h \in \mathbb{Z}} a_{k-h} \hat{x}_h$$

è continuo.

Mostra che  $A$  non è compatto. Infatti, se  $e_i = \{\delta_{ki}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sono i vettori della base canonica,  $e_i \rightarrow 0$  per  $i \rightarrow \pm\infty$ . D'altra parte  $(Ae_i)_k = a_{k-i}$ , dunque  $\|Ae_i\|^2 = \sum_k |a_k|^2 = \|a\|_{\ell_2}^2$  che è una costante che non può tendere a 0 per  $i \rightarrow +\infty$

### **Esercizio 26. Operatori di convoluzione in $\mathbb{R}^n$**

Sia  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , mostra che l'operatore di convoluzione

$$f \rightarrow g * f$$

che è continuo perché  $g$  è sommabile, non è compatto.

Se  $T$  è compatto, per l'equazione  $(\lambda \mathbf{I} - T)x = b$  valgono i teoremi dell'alternativa, dunque o  $\lambda \mathbf{I} - T$  è invertibile, o  $\lambda$  è un autovalore. Per un operatore qualunque non è così, e la nozione di "autovalore" va inclusa in quella più generale di **spettro**.



## 10.2 Risolvente e spettro

Sia  $T \in \mathcal{L}(H)$  un operatore limitato. Sia  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Si chiama **insieme risolvente** l'insieme dei  $\lambda$  per i quali  $\lambda \mathbf{I} - T$  è invertibile (e dunque ha inverso continuo per il teorema della mappa aperta)<sup>3</sup> In tal caso l'operatore  $R_\lambda(T) = (\lambda \mathbf{I} - T)^{-1}$  è detto **operatore risolvente**. Il nome risolvente per  $R_\lambda(T)$  è evidentemente dovuto al fatto che questo operatore risolve l'equazione  $\lambda f - Tf = b$ , per  $b$  assegnato.

Si chiama spettro di  $T$  l'insieme

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

cioè  $\lambda \in \sigma(T)$  se e solo se  $\lambda \mathbf{I} - T$  non è invertibile. Posso succedere tre cose:

- $\lambda \mathbf{I} - T$  non è iniettivo; ma allora il suo nucleo è non banale, cioè l'equazione agli autovalori  $Tf = \lambda f$  ha soluzioni non banali. In tal caso  $\lambda$  è un autovalore e  $f$  è un autovettore. L'insieme degli autovalori è detto **spettro puntuale** ed è indicato con  $\sigma_p(T)$ .
- $\lambda \mathbf{I} - T$  è iniettivo ma non suriettivo,  $\text{Range}(\lambda \mathbf{I} - T)$  è denso in  $H$  ma  $(\lambda \mathbf{I} - T)^{-1}$  (che esiste) non è limitato. In tal caso si dice che  $\lambda$  appartiene allo **spettro continuo**  $\sigma_C(T)$ . Si noti che questa condizione equivale al fatto che  $\ker(\bar{\lambda} \mathbf{I} - T^*)$  è banale.
- $\lambda \mathbf{I} - T$  è iniettivo ma non suriettivo, e  $\text{Range}(\lambda \mathbf{I} - T)$  non è denso. In tal caso si dice che  $\lambda$  appartiene allo **spettro residuo**  $\sigma_R(T)$ . Si noti che questa condizione equivale al fatto che  $\text{Ker}(\bar{\lambda} \mathbf{I} - T^*)$  è non banale.

Queste definizioni hanno senso anche per un operatore  $T$  illimitato, definito su  $D(T)$  sottospazio denso di  $H$ . In particolare, notando che  $\lambda \mathbf{I} - T$  è definito su  $D(T)$  diremo che  $\lambda \in \rho(T)$  se l'operatore  $\lambda \mathbf{I} - T$  da  $D(T)$  in  $H$  è iniettivo,  $\text{Range}(\lambda \mathbf{I} - T) = H$ , e l'inverso è continuo, condizione che è equivalente all'esistenza di  $c > 0$  tale che

$$\|(\lambda \mathbf{I} - T)x\| \geq c\|x\|$$

Prima di sviluppare la teoria, faccio un esempio per illustrare i vari casi possibili, trovando lo spettro dello shift a destra  $S$  e dello shift a sinistra  $S^*$  su  $\ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ . Sarà utile sapere che in generale  $\rho(T)$  è un aperto, e dunque che  $\sigma(T)$  è un chiuso, e che se  $T$  è limitato e  $|\lambda| > \|T\|$  allora  $\lambda \in \rho(T)$ .

Studiamo dunque gli operatori di shift.

### Esempio 10.6. Lo spettro degli shift su $\ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

Intanto è evidente che l'equazione agli autovalori  $S\hat{f} = \lambda\hat{f}$  ha solo la soluzione nulla per qualunque  $\lambda$ , dunque  $S$  non ha spettro puntuale. D'altra parte, se  $|\lambda| > 1$  allora  $\lambda$  è nel risolvente, perché l'operatore si inverte mediante la serie di Neumann, infatti  $\|S\| = 1$ .

Considero ora l'aggiunto  $S^*$ . È facile provare che se  $\lambda$  è autovalore, allora l'autovettore è la successione  $\{\lambda^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , che è in  $\ell^2$  se e solo se  $|\lambda| < 1$ . Dunque lo spettro puntuale di  $S^*$  è l'interno della palla unitaria.

<sup>3</sup>Nel caso degli operatori illimitati, va richiesto esplicitamente che l'inverso sia continuo; per esercizio si costruisca in  $\ell^2$  un operatore di moltiplicazione densamente definito, con inverso definito ovunque ma non continuo.

Poiché  $\|S^*\| = 1$ , i valori di  $\lambda$  di modulo maggiore di uno sono nel risolvente. Poiché lo spettro è chiuso, ne segue che anche il bordo della palla unitaria deve essere nello spettro di  $S^*$ . A questo punto uso che

$$\ell_2 = \text{Ker}(\bar{\lambda}\mathbf{I} - S) \oplus \overline{\text{Range}(\lambda\mathbf{I} - S^*)}$$

Poiché lo spettro puntuale di  $S$  è vuoto,  $\text{Range}(\lambda\mathbf{I} - S^*)$  è denso per qualunque  $\lambda$ , e dunque in particolare il bordo della palla unitaria è lo spettro continuo di  $S^*$ .

Poiché

$$\ell_2 = \text{Ker}(\bar{\lambda}\mathbf{I} - S^*) \oplus \overline{\text{Range}(\lambda\mathbf{I} - S)}$$

ne segue che  $\text{Range}(\lambda\mathbf{I} - S)$  non è denso in  $\ell_2$  se  $|\lambda| < 1$ , e dunque  $\lambda < 1$  sono tutti valori nello spettro residuo di  $S$ .

Poiché lo spettro è chiuso, anche il bordo della palla unitaria è nello spettro, e, poiché se  $\lambda$  ha modulo 1 il kernel di  $\bar{\lambda} - S$  è vuoto, si tratta dello spettro continuo di  $S$ .

### **Esercizio 27. Spettro degli shift**

Si provi a mano la non invertibilità di  $\lambda - S$  e  $\lambda - S^*$ , nel caso  $|\lambda| = 1$ , cioè  $\lambda = e^{i\alpha}$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Suggerimento: si provi a risolvere

$$\lambda x - Sx = e_0 \quad \text{e} \quad \lambda x - S^*x = e_0$$

dove  $e_0 = (1, 0, 0, \dots)$ .

### **Esercizio 28. Spettro degli operatori di moltiplicazione**

Sia  $M_h$  un operatore di moltiplicazione in  $L^2(\Omega)$ , con  $h$  limitata.

Dato  $\delta > 0$ , sia

$$A_\delta(\mu) = \{\mathbf{x} \in \Omega : |h(\mathbf{x}) - \mu| < \delta\}$$

Sia  $\omega(h) = \{\mu \in \mathbb{C} : \forall \delta > 0, |A_\delta(\mu)| > 0\}$  (cioè  $\omega(h)$  è sostanzialmente l'insieme dei punti di accumulazione dell'immagine di  $h$ , tenendo però conto che  $h$  è definita a meno di un insieme di misura nulla).

Prova che

- a. se  $\lambda \notin \omega(h)$  allora  $\lambda \in \rho(M_h)$ ;
- b. se  $B_\lambda = \{\mathbf{x} \in \Omega : h(\mathbf{x}) = \lambda\}$  ha misura non nulla, allora  $\lambda$  è autovalore, e il sotto spazio corrispondente è  $L^2(B_\lambda)$  (prolungando a zero fuori di  $B_\lambda$ );
- c. se  $\lambda \in \omega(h)$  e non vale l'ipotesi del punto precedente, allora  $\lambda$  è nello spettro continuo (suggerimento, prova che l'eventuale inverso non può essere continuo, usando come termine noto  $\mathcal{X}\{\mathbf{x} \in A_\delta(\lambda)\}$  (eventualmente troncato su una palla abbastanza grande).

### **Teorema 10.3. Proprietà del risolvente**

- $\rho(T)$  è non vuoto ed è aperto.

Infatti, se  $|\lambda| > \|T\|$ , l'operatore  $\lambda\mathbf{I} - T$  è invertito dalla sua serie di Neumann:

$$(\lambda\mathbf{I} - T)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k \in \mathbb{N}} T^k / \lambda^k$$

che converge perché  $\|T/\lambda\| < 1$ . Il risolvente è aperto perché se  $\lambda_0$  è nel risolvente, posso scrivere

$$\lambda \mathbf{I} - T = \lambda_0 \mathbf{I} - T - (\lambda_0 - \lambda) \mathbf{I}$$

Poiché esiste  $R_{\lambda_0}(T)$ , posso scrivere

$$\lambda \mathbf{I} - T = \lambda_0 \mathbf{I} - T + (\lambda - \lambda_0) \mathbf{I} = (\lambda_0 \mathbf{I} - T)(\mathbf{I} - (\lambda_0 - \lambda)(R_{\lambda_0}(T)))$$

con

$$\mathbf{I} - (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}(T)$$

invertibile se  $\lambda_0 - \lambda$  è sufficientemente piccolo.

- La funzione  $\rho(T) \ni \lambda \rightarrow R_\lambda(T) \in \mathcal{L}(H)$  è **analitica**, nel senso che è sviluppabile in serie di potenze intorno a ogni  $\lambda_0 \in \rho(T)$ .

Infatti, segue dal punto precedente che

$$(\lambda \mathbf{I} - T)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}(T)^{k+1}$$

In particolare, date  $f, g \in H$ , la funzione

$$\rho(T) \ni \lambda \rightarrow (f, R_\lambda(T)g) \in \mathbb{C}$$

è una funzione olomorfa (cioè analitica complessa) da un aperto di  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$ , perché sviluppabile in serie di potenze intorno a ogni punto del dominio.

- Lo spettro è chiuso ed è contenuto in  $\{\lambda : |\lambda| \leq \|T\|\}$  come segue dal punto precedente.
- Lo spettro è non vuoto.

Infatti se  $\sigma(T) = \emptyset$ ,  $\rho(T) = \mathbb{C}$ , ma allora per ogni  $f, g \in H$  la funzione  $\lambda \rightarrow (f, R_\lambda(T)g)$  è una funzione **intera**, cioè analitica definita da  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$ . D'altra parte, per  $|\lambda| > \|T\|$ ,

$$\|R_\lambda(T)\| \leq |\lambda^{-1}| \sum_{k \in \mathbb{N}} (\|T\|/|\lambda|)^k = 1/(|\lambda| - \|T\|)$$

che tende a 0 per  $|\lambda| \rightarrow +\infty$  (non è strano: per  $|\lambda|$  grande  $\lambda \mathbf{I} - T$  è praticamente  $\lambda \mathbf{I}$ , il cui inverso è  $\mathbf{I}/\lambda$ ). Ma allora la funzione  $\lambda \rightarrow (f, R_\lambda(T)g)$  è intera e limitata, dunque per il teorema di Liouville è costante, e poiché tende a 0 all'infinito è proprio nulla. Ne segue che  $R_\lambda(T)$  dovrebbe essere l'operatore nullo, assurdo in quanto invertibile.

- Per ogni  $\lambda$  e  $\mu$ ,  $R_\lambda(T)$  e  $R_\mu(T)$  commutano, e vale l'**identità del risolvente**:

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu$$

Questa uguaglianza è la versione operatoriale dell'identità

$$\frac{1}{\lambda - t} - \frac{1}{\mu - t} = \frac{\mu - t - \lambda + t}{(\lambda - t)(\mu - t)} = \frac{\mu - \lambda}{(\lambda - t)(\mu - t)}$$

Infatti, essendo  $\mathbf{I} = R_\lambda(T)(\lambda \mathbf{I} - T) = (\mu \mathbf{I} - T)R_\mu(T)$ ,

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T)(\mu \mathbf{I} - T)R_\mu(T) - R_\lambda(T)(\lambda \mathbf{I} - T)R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T)$$

da cui segue la commutatività, infatti

$$(\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T) = -(R_\mu(T) - R_\lambda(T)) = -(\lambda - \mu)R_\mu(T)R_\lambda(T)$$

e dividendo per  $\lambda - \mu$  si ha la tesi.

Prima di discutere del caso di operatori compatti autoaggiunti, descrivo alcune proprietà particolari degli operatori autoaggiunti, indipendentemente dalla compattezza.

### 10.3 Spettro degli operatori autoaggiunti

#### Proposizione 10.2. Spettro di un operatore autoaggiunto

Se  $A$  è autoaggiunto

- gli autovalori sono reali;
- gli autospazi relativi a autovalori distinti sono ortogonali;
- lo spettro è reale
- lo spettro residuo è vuoto

*Dimostrazione.* Le prime due affermazioni si dimostrano esattamente come nel caso finito-dimensionale. Se  $u$  è un autovettore di autovalore  $\lambda$ , allora

$$\lambda \|u\|^2 = \lambda(u, u) = (u, \lambda u) = (u, Au) = (A^*u, u) = (Au, u) = (\lambda u, u) = \bar{\lambda} \|u\|^2$$

dunque  $\lambda$  è reale. Siano  $\mu$  e  $\lambda$  due autovalori (reali) distinti, e  $v$  e  $u$  due corrispondenti autovettori.

$$\lambda(v, u) = (v, Au) = (Av, u) = \mu(v, u)$$

dunque  $(v, u) = 0$ .

Resta da provare la realtà di tutto lo spettro. Dimostrerò che se  $A$  è autoaggiunto, allora  $A + i$  è invertibile. Questa affermazione implica che se  $A$  è autoaggiunto allora  $A + z$  è invertibile per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con parte immaginaria non nulla. Infatti, se  $A$  è autoaggiunto allora  $(A + \alpha)/\beta$  è autoaggiunto per  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  con  $\beta \neq 0$ , e dunque  $(A + \alpha)/\beta + i$  è invertibile, cioè  $(A + \alpha + \beta i)/\beta$  è invertibile e quindi  $A + \alpha + \beta i$  è invertibile

Mi concentro dunque su  $A + i$ . Poiché lo spettro puntuale di  $A$  è reale,  $\text{Ker}(A - i) = \{0\}$ , e dunque

$$H = \overline{\text{Range}(A + i)}$$

Quindi è sufficiente provare che il range è chiuso. L'osservazione chiave è la seguente:

$$\|(A + i)f\|^2 = (Af + if, Af + if) = \|Af\|^2 + \|f\|^2$$

(da cui si ottiene, tra l'altro,  $\|A + i\|^2 = \|A\|^2 + 1$ ). Affermare che l'immagine è chiusa equivale a dire che ogni successione convergente appartenente all'immagine ha il limite che è un elemento dell'immagine. Sia allora  $f_n$  una successione tale che

$$(A + i)f_n \rightarrow g$$

Voglio provare che esiste  $f$  tale che  $g = (A + i)f$ . Poiché converge,  $(A + i)f_n$  è di Cauchy, dunque dato  $\varepsilon > 0$ , per  $n, m$  sufficientemente grandi,

$$\varepsilon > \|(A + i(f_n - f_m))\|^2 = \|A(f_n - f_m)\|^2 + \|f_n - f_m\|^2 \geq \|f_n - f_m\|^2$$

Quindi  $f_n$  è di Cauchy; sia  $f$  il suo limite, per continuità  $(A + i)f = g$ , come volevamo dimostrare.

Infine, poiché per  $\lambda$  reale  $H = \text{Ker}(\lambda - A) \oplus \overline{\text{Range}(\lambda - A)}$ , se  $\lambda$  non è nel risolvente, o  $\lambda$  è autovalore, o il range è denso, e dunque  $\lambda$  è nello spettro continuo.  $\square$

Usando un procedimento analogo, studia lo spettro degli operatori autoaggiunti positivi.

### **Esercizio 29. Spettro di un operatore positivo**

Sia  $A$  autoaggiunto e positivo, cioè  $(v, Av) \geq 0$  per ogni  $v$ . Mostra che gli autovalori sono positivi e poi mostra che lo spettro è contenuto in  $\mathbb{R}^+$  (meglio nell'intervallo  $[0, \|A\|]$ ). Suggerimento: basta provare che se  $\lambda < 0$  allora  $\lambda$  è nel risolvente, e per provarlo è sufficiente mostrare che  $\text{Range}(A - \lambda \mathbf{I})$  è chiuso.

Mostra che se  $A$  è coercivo, cioè se esiste  $\alpha > 0$  tale che  $(v, Av) \geq \alpha\|v\|^2$ , allora lo spettro è nell'intervallo  $[\alpha, \|A\|]$ .

Un altro aspetto importante per l'analisi dello spettro di un operatore autoaggiunto è lo studio della forma quadratica associata. Ad ogni operatore lineare  $T$  si associa naturalmente la forma quadratica  $(f, Tf)$ . Questa relazione non è iniettiva, (si pensi al caso finito dimensionale, in cui è evidente che la forma quadratica associata non dipende dalla parte antisimmetrica della matrice). Nel caso di  $A$  autoaggiunto, invece, l'operatore e la forma quadratica contengono le stesse informazioni, ed è utile studiare questi operatori attraverso la forma quadratica associata.

### **Esercizio 30. Decomposizione polare di una forma quadratica**

Il prodotto hermitiano tra due vettori si può scrivere come combinazione di quadrati mediante l'identità di polarizzazione (6.1). Si dimostri che se  $A$  è autoaggiunto,

$$4(\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}, A(\mathbf{u} + \mathbf{v})) - (\mathbf{u} - \mathbf{v}, A(\mathbf{u} - \mathbf{v})) - i(\mathbf{u} + i\mathbf{v}, A(\mathbf{u} + i\mathbf{v})) + i(\mathbf{u} - i\mathbf{v}, A(\mathbf{u} - i\mathbf{v})) \quad (10.1)$$

### **Teorema 10.4. Forma quadratica associata ad un operatore autoaggiunto**

Se  $A$  è autoaggiunto, la sua norma operatoriale coincide con l'estremo superiore sulla sfera unitaria della forma quadratica associata, cioè

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=1} |(f, Af)|$$

*Dimostrazione.* Sia  $\gamma = \sup_{\|f\|=1} |(f, Af)|$ ; è immediato che  $\gamma \leq \|A\|$ . Dimostro il viceversa: per cominciare, usando l'autoaggiunzione di  $A$ ,

$$(f + g, A(f + g)) - (f - g, A(f - g)) = 2(g, Af) + 2(f, Ag) = 2(g, Af) + 2(Af, g)$$

Il membro di sinistra è stimato in modulo da

$$\gamma(\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2) = 2\gamma(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Sia ora  $\|f\| = 1$ , e sia  $g = Af/\|Af\|$ , che dunque è di modulo 1. Il membro di destra diventa

$$2\|Af\| + 2\|Af\|$$

Quindi:

$$4\|Af\| \leq 2\gamma(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 4\gamma$$

Passando al sup su  $f$  di modulo 1, si ottiene

$$A = \sup_{\|f\|=1} |(f, Af)|.$$

□

Se  $A$  è un operatore autoaggiunto e lo spazio è finito-dimensionale, i punti stazionari di  $(f, Af)$  sulla sfera unitaria  $\|f\|^2 = 1$  sono esattamente gli autovettori di  $f$  di norma 1. Infatti, consideriamo i punti stazionari della forma quadratica vincolata

$$f \rightarrow (f, Af) - \lambda((f, f) - 1)$$

dove  $\lambda$  è il moltiplicatore di Lagrange. Derivando in  $f$ , si ottiene la condizione di stazionarietà:

$$2Af - 2\lambda f = 0 \text{ cioè } Af = \lambda f$$

Dunque  $f$  è autovettore, e il moltiplicatore di Lagrange è un autovalore.

Questo fatto vale anche per operatori compatti autoaggiunti, come seguirà dal teorema spettrale. Qui dimostro il seguente caso particolare.

**Teorema 10.5.** *Se  $K$  è compatto autoaggiunto,  $\|K\|$  o  $-\|K\|$  è autovalore*

*Sia  $K$  autoaggiunto, e sia*

$$M = \sup_{\|f\|=1} (f, Kf), \quad e \quad m = \inf_{\|f\|=1} (f, Kf)$$

*Se  $M > 0$  allora  $M$  è autovalore, e il sup è raggiunto sui corrispondenti autovettori; se  $m < 0$  allora  $m$  è autovalore, e l'inf è raggiunto sui corrispondenti autovettori. In particolare, ricordando che se  $K$  è autoaggiunto allora  $\|K\| = \sup_{\|f\|=1} |(f, Kf)|$ , ne segue che o  $M = \|K\|$  o  $m = -\|K\|$ , dunque o  $\|K\|$  o  $-\|K\|$  è autovalore di  $K$ .*

*Dimostrazione.* Dimostro che se  $M > 0$  allora  $M$  è autovalore (il caso  $m < 0$  si dimostra con la stessa tecnica). Per definizione, esiste una sequenza  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  con  $\|f_k\| = 1$ , tale che

$$M = \lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k, Kf_k)$$

Per limitatezza,  $f_k \rightharpoonup f$  per sottosequenze, con  $\|f\| \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|f_k\| = 1$ . Poiché  $K$  è compatto,  $Kf_k \rightarrow Kf$  in norma, e dunque

$$(f, Kf) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k, Kf_k) = M.$$

La norma di  $\|f\|$  deve essere 1, in caso contrario:

$$(f/\|f\|, K(f/\|f\|)) = M/\|f\|^2 > M$$

e dunque  $M$  non sarebbe il sup. Sia ora  $\|g\| = 1$ , e consideriamo la funzione

$$\phi(\alpha) = (f + \alpha g, K(f + \alpha g)) - M\|f + \alpha g\|^2$$

Per definizione di  $M$ ,  $\phi(\alpha)$  è minore di zero per ogni  $\alpha$ . Risulta, per  $\alpha$  reale,

$$\phi(\alpha) = (f + \alpha g, (K - M)(f + \alpha g)) = (f, (K - M)f) + 2\alpha \Re(g, (K - M)f) + \alpha^2 (g, (K - M)g) \leq 0$$

D'altra parte, se  $\alpha = i\beta$  con  $\beta$  reale

$$\phi(i\beta) = (f, (K - M)f) - 2\beta \Im(g, (K - M)f) + \beta^2 (g, (K - M)g) \leq 0$$

Poiché in zero queste due funzioni hanno massimo, la derivata prima in zero deve essere nulla, dunque

$$\Re(g, (K - M)f) = 0 = \Im(g, (K - M)f) = 0, \text{ e dunque } (g, (K - M)f) = 0$$

Per l'arbitrarietà di  $g$ , ne segue che  $Kf = Mf$ . cioè  $M$  è autovalore.  $\square$

Sia dato un operatore  $T$ , si definisce **raggio spettrale** il numero

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Naturalmente se  $T$  è limitato  $r(T) \leq \|T\|$ , perché se  $|\lambda| > \|T\|$  allora  $\lambda \in \rho(T)$ . Se  $T$  è compatto e autoaggiunto, o  $\|T\|$  o  $-\|T\|$  è un autovalore di  $T$ , dunque  $r(T) = \|T\|$ .

## 10.4 Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti

Mi occupo prima delle proprietà spettrali degli operatori compatti, non necessariamente autoaggiunti.

### Teorema 10.6. Spettro di un operatore compatto

- Se  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \in \rho(K)$  o  $\lambda \in \sigma_p(K)$ .
- 0 è nello spettro (cioè  $K$  non è invertibile).
- Lo spettro puntuale è al più numerabile, e può accumulare solo in 0.

*Dimostrazione.* Il primo punto è una conseguenza immediata del teorema dell'alternativa. Il secondo punto si dimostra facilmente per assurdo. Supponiamo che  $K$  sia invertibile, allora

$$\forall v : \|K^{-1}v\| \leq c\|v\| \text{ e quindi } \forall v : \|v\| \leq c\|Kv\|$$

Consideriamo ora una sequenza ortonormale  $e_k$ , che tende debolmente a 0: per compattezza  $\|Ke_k\| \rightarrow 0$ , ma questo è impossibile perché  $\|Ke_k\| \geq \|e_k\|/c = 1/c$ .

Per l'ultimo punto, consideriamo una sequenza di autovettori  $v_k$  corrispondenti ad autovalori  $\lambda_k$  distinti e non nulli. In questo modo i  $v_k$  sono indipendenti. Sia  $V_n = \text{span}\{v_k\}_{k=0}^n$ . Sia  $e_n \in V_n$  di modulo 1 e ortogonale a  $V_{n-1}$ . Dunque per ogni  $v \in V_{n-1}$ :

$$\|v - e_n\| \geq 1.$$

Osserviamo inoltre che  $KV_n = V_n$ , ma

$$(\lambda_n \mathbf{I} - K)V_n = V_{n-1}$$

infatti ogni vettore di  $V_n$  ha la forma  $v = cv_n + w$ , con  $w \in V_{n-1}$  e dunque  $(\lambda_n \mathbf{I} - K)v = \lambda_n w - Kw \in V_{n-1}$ . Consideriamo ora, per  $m < n$

$$\left\| \frac{Ke_m}{\lambda_m} - \frac{Ke_n}{\lambda_n} \right\| = \left\| \frac{Ke_m - \lambda_m e_m}{\lambda_m} - \frac{Ke_n - \lambda_n e_n}{\lambda_n} + e_m - e_n \right\|$$

Ora  $(Ke_m - \lambda_m e_m)/\lambda_m \in V_{n-1}$  perché  $m < n$ , e lo stesso vale per  $e_m$ . Inoltre  $(Ke_n - \lambda_n e_n)/\lambda_n \in V_{n-1}$ , come mostrato sopra. Dunque

$$\left\| \frac{Ke_m}{\lambda_m} - \frac{Ke_n}{\lambda_n} \right\| \geq 1$$

e quindi la successione  $Ke_n/\lambda_n$  non può essere di Cauchy. Se esistesse una successione di autovalori distinti che tende a un valore  $\lambda \neq 0$ , si avrebbe  $e_n/\lambda_n \rightarrow 0$ , e dunque  $\|Ke_n/\lambda_n\| \rightarrow 0$ , in contraddizione con l'asserzione precedente. Il fatto che 0 sia l'unico possibile punto di accumulazione implica che, per ogni  $r > 0$ , il numero di autovalori con  $|\lambda| > r$  è finito (si ricordi che sopra  $\|K\|$  non ci sono punti dello spettro, e in particolare autovalori). Ne segue che il numero degli autovalori è al più numerabile.

### **Teorema 10.7. Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti**

*Se  $K$  è compatto e autoaggiunto,  $H$  ha una base di autovettori di  $K$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $M$  il sottospazio di  $H$  formato da combinazioni lineari finite di autovettori di  $K$ :

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(K)} \text{Ker}(\lambda \mathbf{I} - K)$$

Ricordo che è una somma al più numerabile di sottospazi finito dimensionali (a parte eventualmente  $\text{Ker} K$  che può essere infinito), e la somma è diretta perché i sottospazi sono a due a due ortogonali.

Mostriamo che  $M$  è denso in  $H$ . Supponiamo per assurdo che  $M^\perp$  sia un sottospazio (chiuso) non vuoto di  $H$ . L'operatore  $K$  ristretto a  $M^\perp$  ha immagine in  $M^\perp$ , in quanto autoaggiunto. Infatti, se  $f$  è ortogonale a  $\text{Ker}(\lambda \mathbf{I} - K)$ , allora

$$(f, g) = 0 \text{ per ogni } g : Kg = \lambda g$$

Ne segue

$$(Kf, g) = (f, Kg) = \lambda(f, g) = 0 \text{ per ogni } g \in \text{Ker}(\lambda \mathbf{I} - K)$$

cioè  $K$  mappa l'ortogonale al  $\text{Ker}(\lambda \mathbf{I} - K)$  in sé.

D'altra parte,  $K$  ristretto a  $M^\perp$  è autoaggiunto, dunque ha almeno un autovalore di modulo pari alla sua norma. Ma questo è assurdo perché  $M^\perp$  è ortogonale allo spazio di tutti gli autovettori.  $\square$

### **Esercizio 31. Dimensione finita del nucleo**

La dimostrazione dei teoremi dell'alternativa per  $\lambda \mathbf{I} - K$  con  $\lambda \neq 0$ , usa l'approssimazione con operatori di rango finito, e dunque si ottiene immediatamente che la dimensione  $\text{Ker}(\lambda \mathbf{I} - K)$  è finita.



D'altra parte è anche una facile conseguenza della definizione di operatore compatto. Sia dunque  $K$  compatto, e supponi che  $\text{Ker}(\lambda \mathbf{I} - K)$  è non banale per un qualche  $\lambda \neq 0$ , prova che ha dimensione finita.

**Esercizio 32. Punti di accumulazione per lo spettro**

Nel caso di un operatore compatto autoaggiunto, è particolarmente semplice mostrare che l'unico punto di accumulazione possibile dello spettro è lo zero. Siano infatti  $v_k$  autovettori di autovalori distinti...

**Esercizio 33. Autovettori e punti stazionari della forma quadratica vincolata**

Sia  $K$  compatto autoaggiunto, e sia  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una base ortonormale di autovettori per  $K$ . Allora

$$Kf = \sum_k \lambda_k f_k e_k$$

Prova 'a mano' che  $\|K\| = \max_k |\lambda_k|$  (questo fatto è già stato mostrato a proposito del raggio spettrale degli operatori compatti autoaggiunti).

Nella base,

$$(f, Kf) = \sum_k \lambda_k |f_k|^2$$

Prova che per ogni  $k$ ,  $e_k$  è un punto stazionario per la forma quadratica, vincolata a  $\|f\|^2 = 1$ .

Sia  $K$  compatto autoaggiunto, e sia  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  la base di autovettori in cui si decompone:

$$K = \sum_k \lambda_k |e_k\rangle\langle e_k|$$

(mostra che la serie converge in norma). Sia  $\lambda \in \rho(K)$ , e consideriamo l'equazione seguente, con  $b$  assegnato:

$$\lambda f - Kf = b$$

Moltiplicandola scalarmente per  $e_k$ , si ottiene

$$\lambda \hat{f}_k - \lambda_k \hat{f}_k = \hat{b}_k$$

che è risolta da

$$\hat{f}_k = \hat{b}_k / (\lambda - \lambda_k)$$

Poiché se  $\lambda \in \rho(K)$  allora  $\lambda$  ha distanza finita dallo spettro puntuale, il denominatore è in modulo maggiore di una costante, dunque si può scrivere

$$R_\lambda(K) = \sum_k \frac{1}{\lambda - \lambda_k} |e_k\rangle\langle e_k|$$

In questo caso la serie converge in senso forte, perchè  $|\lambda - \lambda_k| \geq \delta > 0$  per un qualche  $\delta$ , ma la convergenza non è in norma perchè  $1/|\lambda - \lambda_k|$  non va a 0 in  $k$ .

Osserva che se  $\phi : \sigma(K) \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, si può definire l'operatore

$$\phi(K) = \sum_k \phi(\lambda_k) |e_k\rangle\langle e_k|$$

(mostra che in effetti la serie converge in senso forte). Questa possibilità è uno degli scopi dell'analisi spettrale, che si estende agli operatori autoaggiunti (ma compare lo spettro continuo) e ad alcuni operatori illimitati (vedi [RS] capitoli VII e VIII).

**Esercizio 34. Operatori di Hilbert-Schmidt**

$T$  è un operatore di Hilbert-Schmidt se per una qualche base  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,

$$\text{tr } T^*T = \sum_k (T^*T e_k, e_k) = \sum_k \|T e_k\|^2 < +\infty$$

Nota che questo numero è la **traccia** della matrice infinita associata a  $T^*T$ .

Sia  $U$  un operatore unitario, mostra che  $\text{tr } U^*AU = \text{tr } A$ . Oppure, equivalentemente, mostra che la traccia di un operatore non dipende dalla base scelta.

Mostra che  $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$  è di Hilbert-Schmidt se e solo se è un operatore integrale con nucleo in  $L^2$ .

Mostra che  $T$  autoaggiunto è di Hilbert-Schmidt se e solo se

$$\sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} |\lambda_k|^2 < +\infty$$

**Esercizio 35. Operatori diagonali**

Sia  $T$  un operatore diagonale in una base  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , cioè

$$T e_k = \lambda_k e_k$$

e supponi che i  $\lambda_k$  siano reali (nota che  $T$  è dunque un operatore di moltiplicazione).

Mostra che  $T$  è limitato se e solo se  $\sup_k |\lambda_k|$  è finito, e che

$$\|T\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|$$

Mostra che  $T$  è autoaggiunto.

Mostra che se  $\dim \text{Ker } (\lambda_k \mathbf{I} - T)$  è finita per ogni  $k$  con  $\lambda_k \neq 0$ , e  $0$  è l'unico punto di accumulazione dei  $\lambda_k$  non nulli, allora  $T$  è compatto. Suggerimento: riscrivi  $T$  come

$$T = \sum_n \lambda_n P_n$$

dove i  $\lambda_n$  sono distinti, e  $P_n$  è il proiettore sul sottospazio finito dimensionale di autovalore  $\lambda_n$ . Concludi mostrando che se  $\lambda_n \rightarrow 0$  (o se sono in numero finito), allora  $T$  è limite di operatori di rango finito e dunque compatto.

Nota che non è necessaria nessuna ipotesi sulla sommabilità degli autovalori; in particolare esistono operatori compatti che non sono di Hilbert-Schmidt.

## 11 Lo spettro della trasformata di Fourier

In questo paragrafo determino lo spettro della trasformata di Fourier. Non è un argomento importante in sé, ma per un motivo che spiegherò questo spettro è lo stesso dell'operatore illimitato

$$-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}x^2$$

che è anche l'operatore hamiltoniano per un oscillatore armonico quantistico. Dunque il calcolo degli autovalori di  $\mathcal{F}$  ci permetterà di determinare i livelli di energia di un oscillatore armonico quantistico. Lo farò con una tecnica algebrica tipica dei problemi di meccanica quantistica.

### *Esercizio 36. Idempotenza della trasformata di Fourier*

La trasformata di Fourier  $\mathcal{F}$  è un operatore unitario. Mostra che  $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$ , e dunque che  $\mathcal{F}^4 = \mathbf{I}$ .

Deduci da questo fatto che i soli autovalori possibili sono  $\pm 1$  e  $\pm i$ .

Mostra che se  $\mathcal{F}f = \pm 1f$  allora  $f$  è pari, se  $\mathcal{F}f = \pm if$  allora  $f$  è dispari.

D'ora in poi, per evitare confusioni, racchiudo in parentesi quadre l'argomento della trasformata. Ricordo che la trasformata di Fourier trasforma derivate in moltiplicazioni e viceversa:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\partial_x f](\lambda) &= i\lambda\mathcal{F}[f](\lambda) \\ \mathcal{F}[xf](\lambda) &= i\partial_\lambda\mathcal{F}[f](\lambda)\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[(x + \partial_x)f](\lambda) &= i(\lambda + \partial_\lambda)\mathcal{F}[f](\lambda) \\ \mathcal{F}[(x - \partial_x)f](\lambda) &= -i(\lambda - \partial_\lambda)\mathcal{F}[f](\lambda)\end{aligned}$$

Inoltre

$$\mathcal{F}[(x^2 - \partial_x^2)f](\lambda) = (\lambda^2 - \partial_\lambda^2)\mathcal{F}[f](\lambda)$$

Definisco

$$\hat{H}f = -\frac{1}{2}\partial_x^2 f + \frac{1}{2}x^2 f$$

e noto che è un operatore simmetrico. Il suo commutatore con  $\mathcal{F}$  è nullo

$$[\mathcal{F}, \hat{H}] = \mathcal{F}\hat{H} - \hat{H}\mathcal{F} = 0$$

Come è noto dall'algebra lineare, se due operatori simmetrici commutano, hanno gli stessi autospazi. Dunque per trovare le autofunzioni di  $\mathcal{F}$  può essere utile cercare le autofunzioni di  $\hat{H}$ . Definisco altri due operatori che ci saranno utili.

$$af = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \partial_x)f \quad e \quad a^\dagger f = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \partial_x)f$$

Noto che, formalmente,  $a^\dagger f$  è l'aggiunto di  $a$ . Chiameremo  $a$  operatore di **creazione** e  $a^\dagger$  operatore di **distruzione**.

Valgono le seguenti semplici identità (verificarle per esercizio)

- $a^\dagger af = \hat{H}f + f/2$
- $aa^\dagger f = \hat{H}f - f/2$

- $[a^\dagger, a] = \mathbf{I}/2$

Dalla seconda relazione, si ottiene che  $\hat{H}f = \lambda f$  se e solo se  $aa^\dagger f = (\lambda - 1/2)f$ . Osserviamo che  $a^\dagger$  ha un nucleo non banale di facile determinazione. Infatti

$$a^\dagger f = 0 \iff f' = -fx \iff \partial_x \ln f = -x$$

e dunque, integrando e esponenziando, si ottiene che

$$\phi_0(x) = e^{-x^2/2}$$

è nel kernel di  $a^\dagger$ , dunque

$$\hat{H}\phi_0 = \frac{1}{2}\phi_0$$

Osserviamo anche che, sempre dalla seconda relazione

$$(f, \hat{H}f) = (f, aa^\dagger f) + (f, f)/2 = (a^\dagger f, a^\dagger f) + (f, f)/2$$

Dunque  $(f, \hat{H}f) \geq \frac{1}{2}(f, f)$ , e quindi  $1/2$  è il minimo autovalore, che è raggiunto proprio in  $\phi_0$  che è nel  $\ker a^\dagger$

Calcolo ora i commutatori di  $\hat{H}$  con  $a$  e  $a^\dagger$ :

$$[\hat{H}, a] = \hat{H}a - a\hat{H} = (aa^\dagger + 1/2)a - a(a^\dagger a - 1/2) = a$$

$$[\hat{H}, a^\dagger] = \hat{H}a^\dagger - a^\dagger\hat{H} = (a^\dagger a - 1/2)a^\dagger - a^\dagger(aa^\dagger + 1/2) = -a^\dagger$$

Dunque se  $\hat{H}f = \lambda f$  si ha

$$\hat{H}af = [\hat{H}, a]f + a\hat{H}f = af + \lambda af = (\lambda + 1)af$$

e

$$\hat{H}a^\dagger f = [\hat{H}, a^\dagger]f + a^\dagger\hat{H}f = -a^\dagger f + \lambda a^\dagger f = (\lambda - 1)a^\dagger f$$

Quindi, l'operatore di creazione porta un autofunzione di autovalore  $\lambda$  in una autofunzione di autovalore  $\lambda + 1$ . Al contrario, l'operatore di distruzione abbassa di uno l'autovalore. Sia allora

$$\phi_k = a^k \phi_0$$

Questa funzione, se non è nulla, è autofunzione di autovalore  $k + 1/2$ . Vediamo come è fatta. È evidente che è del tipo  $P_k(x)e^{-x^2/2}$ , dove  $P_k(x)$  è un polinomio in  $x$ . È facile notare che se  $Q(x)$  è polinomio di grado  $n$ , allora  $a(Q(x)e^{-x^2/2})$  è un polinomi di grado  $n + 1$ . Dunque  $P_k$  è un polinomio non nullo di grado  $k$ . Poichè  $\hat{H}$  è simmetrico,  $\phi_k$  è ortogonale a  $\phi_h$  se  $k \neq h$ , cioè

$$\int P_k(x)P_h(x)e^{-x^2} dx = 0$$

Ma da questa relazione segue che  $P_k$  sono, a meno di costanti moltiplicative, i polinomi di Hermite  $h_k$ .

Poichè  $h_k e^{-x^2/2}$  è un sistema ortogonale completo in  $L^2(\mathbb{R})$ , l'operatore  $H$  non ha altre autofunzioni. Restano da determinare gli autospazi di  $\mathcal{F}$ . Notando che  $\mathcal{F}\phi_0 = \phi_0$ , e che

$$\mathcal{F}a = -ia\mathcal{F}$$

si ottiene che  $\phi_k$  è autofunzione per  $\mathcal{F}$ , e l'autovalore è  $(-i)^k$ .

In questo esempio ho indentificato subito le autofunzioni con i polinomi di Hermite, e questo permette di ottenere che non esistono altri autovalori. È possibile ottenere questo risultato senza usare la completezza dei polinomi di Hermite, ma usando solo le relazioni algebriche verificate dagli operatori di creazione e distruzione. Per approfondimenti si veda il testo di Teta [T], capitolo 7.

Abbiamo ottenuto che lo spettro di  $\hat{H}$  è solo puntuale e gli autovalori divergono, esattamente come il caso degli autovalori del laplaciano in un dominio limitato con opportune condizioni al contorno. In quel caso, questo risultato si otteneva invertendo il laplaciano e dimostrando la compattezza dell'inverso. Anche in questo caso è così. Lo mostro con un esercizio che permetterà di capire il ruolo della trasformata di Fourier.

**Esercizio 37. Inverso di  $\hat{H}$**

Sia  $H_o = \{f \in L^2 : \|\partial_x f\|^2, \|xf\|^2 < +\infty\}$  Per le relazioni mostrate prima,

$$\|\partial_x f\|^2 = \|\lambda \hat{f}\|^2$$

e viceversa, dunque posso dotare  $H_o$  del prodotto scalare

$$(f, g)_o = \int x^2 \bar{f}g + \int \lambda^2 \bar{\hat{f}}\hat{g}$$

Equivalente a

$$(f, g)_o = (f', g')_{L^2} + (\partial_\lambda \hat{f}, \partial_\lambda g)_{L^2}$$

Si tratta quindi di uno spazio di Sobolev.

Si mostri la “disuguaglianza di Poincaré”

$$\|f\|^2 \leq c\|f\|_o$$

Suggerimento:

$$\int |f|^2 \leq \|f\|_\infty \|f\|_1$$

e

$$\|f\|_1 = \int |f| \frac{\sqrt{\gamma^2 + x^2}}{\sqrt{\gamma^2 + x^2}} \leq c/\sqrt{\gamma}(\gamma\|f\| + \|xf\|)$$

e

$$\|f\|_\infty \leq x\|\hat{f}\|_1 \leq c/\sqrt{\gamma}(\gamma\|f\| + \|\lambda\hat{f}\|)$$

Mettendo insieme le due stime si ottiene

$$\|f\|^2 \leq \frac{c}{\gamma}(\gamma^2\|f\|^2 + \|f\|_o^2)$$

e per  $\gamma$  abbastanza piccolo si ottiene la tesi.

Data  $f \in L^2$ , si mostri che esiste  $Tf = u \in H_o$  tale che, per ogni  $h \in H_o$ , sia ha

$$(h, u)_o = (h, f)$$

(si usi il teorema di Riesz e la disuguaglianza di Poincaré).

Si riconosca che si tratta dell'equazione

$$-\partial_x^2 u + x^2 u = f$$

in forma debole. Si mostri che l'operatore che associa  $u$  a  $f$ , pensato a valori in  $L^2$ , è autoaggiunto. Si mostri che  $H_o$  si immerge compatto in  $L^2$ .

Si noti infine che il prodotto in  $H_o$  è invariante per trasformata di Fourier. Dunque questa invarianza si deve estendere all'operatore  $T$ .

## 12 Introduzione agli operatori illimitati

Nei capitoli precedenti abbiamo mostrato che gli operatori compatti e autoaggiunti sono diagonalizzabili. È possibile dimostrare un teorema di decomposizione spettrale per operatori autoaggiunti, anche illimitati. È una teoria più “sottile” di quella discussa fino ad ora, e in questo capitolo mi limiterò ad alcune considerazioni introduttive sugli operatori illimitati.

### 12.1 Dominio, estensioni, aggiunto

Ricordo come prima cosa che per definire un operatore illimitato  $A$  è necessario definire il sottospazio lineare su cui è definito, che indicherò con  $\mathcal{D}(A)$ , che pretenderemo sia denso in  $H$ . Uno “stesso” operatore può avere domini differenti. Per esempio, se  $\Omega$  è un dominio di  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\Delta_D &: C_0^\infty \rightarrow L^2(\Omega) \\ \Delta_N &: \{f \in C^\infty : \int_\Omega f = 0, \partial_n f = 0 \text{ su } \partial\Omega\} \rightarrow L^2(\Omega) \\ \Delta_\infty &: C^\infty \rightarrow L^2(\Omega)\end{aligned}$$

sono tre operatori differenti perché i tre domini sono differenti. Questa differenza non è solo formale: nei capitoli precedenti abbiamo invertito  $\Delta_D$  (cioè il laplaciano con condizioni di Dirichlet omogenee) e  $\Delta_N$  (cioè il laplaciano con condizioni di Neumann omogenee), ottenendo degli operatori compatti con due sistemi di autofunzioni e autovalori differenti (si pensi al caso unidimensionale).

#### Definizione

$A$  su  $\mathcal{D}(A)$  è **simmetrico** se

$$\forall f, g \in \mathcal{D}(A) \quad (g, Af) = (Ag, f)$$

Poiché per funzioni  $C^\infty$  su  $\Omega$  con bordo regolare vale

$$\int_\Omega g \Delta f = \int_\Omega \operatorname{div}(g \nabla f) - \int_\Omega \nabla g \cdot \nabla f = \int_{\partial\Omega} g \partial_n f - \int_\Omega \nabla g \cdot \nabla f$$

risulta che  $\Delta_D$  e  $\Delta_N$  sono operatori simmetrici,  $\Delta_\infty$  no!

#### Definizione

$B$  su  $\mathcal{D}(B)$  è una **estensione**  $A$  su  $\mathcal{D}(A)$  se  $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$  e

$$B|_{\mathcal{D}(A)} = A$$

Risulta che  $\Delta_\infty$  estende  $\Delta_D$  e  $\Delta_N$ , e  $\Delta_D$  e  $\Delta_N$  non sono l'uno un'estensione dell'altro.

#### Esempio 12.1. Operatori di moltiplicazione illimitati

Sia  $h$  una funzione non limitata e sia  $M_h$  l'operatore di moltiplicazione per  $h$ . Un ragionevole dominio di definizione di  $M_h$  è

$$\mathcal{D}(M_h) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |f|^2 |h| < +\infty\}$$

Analogamente, sia  $\{\lambda_k\}$  una successione non limitata, definisco  $M_z$  l'operatore di moltiplicazione su  $\ell_2(\mathbb{N})$  dato da

$$(M\hat{x})_k = \lambda_k x_k$$

con dominio

$$\mathcal{D}(M) = \{\hat{x} : \sum_k |x_k|^2 |\lambda_k| < +\infty\}$$

Evidentemente  $\lambda_k$  sono autovettori di  $M$

L'aggiunto di un operatore limitato  $T$  si definisce attraverso il teorema di rappresentazione di Riesz, notando che

$$g \rightarrow (g, Tf)$$

è un funzionale lineare continuo in  $g$ , dunque esiste  $T^*g$  tale che

$$(T^*g, f) = (g, Tf)$$

Nel caso illimitato c'è qualche complicazione.

### Definizione

Dato  $T$ ,  $\mathcal{D}(T)$ , il dominio dell'operatore aggiunto è

$$\mathcal{D}(T^*) = \{g \in H : g \rightarrow (g, Tf) \text{ è un funzionale limitato per ogni } f \in \mathcal{D}(T)\}$$

Se  $g \in \mathcal{D}(T^*)$ , poiché  $\mathcal{D}(T)$  è denso in  $H$ , il funzionale lineare limitato  $(g, Tf)$  si estende a  $f \in H$ , e dunque, sempre per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste  $T^*g$  tale che, per ogni  $f \in \mathcal{D}(T)$  si ha

$$(T^*g, f) = (g, Tf)$$

### Osservazioni

1. Mentre c'è "libertà" di scelta per il dominio di un operatore illimitato, a seconda delle necessità, il dominio dell'operatore aggiunto è e determinato dal dominio dell'operatore.
2. Se  $A$  è simmetrico,  $A^*$  è una estensione di  $A$ , infatti, per ogni  $g \in \mathcal{D}(A)$  risulta

$$(g, Af) = (Ag, f)$$

e dunque  $g \rightarrow (g, Af)$  è limitato perché  $|(g, Af)| \leq \|A^*g\| \|f\|$ . Inoltre  $A^*$  ristretto a  $\mathcal{D}(A)$  coincide evidentemente con  $A$ .

### Definizione

$A$  è autoaggiunto se è simmetrico e  $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$ .

### Esercizio 38. Operatori di moltiplicazione autoaggiunti

Provare che gli operatori  $M_h$  e  $M$ , definiti con  $h$  funzione reale e  $\alpha_k$  successione reale, sono autoaggiunti.

## 12.2 Operatori chiusi

In questo paragrafo descrivo alcuni aspetti topologici degli operatori illimitati. Osservo innanzi tutto che la non limitatezza ha complicazioni di difficile gestione. Per esempio, se  $f_k \rightarrow 0$ , non è detto che  $Af_k \rightarrow 0$ . In particolare  $\ker A$  potrebbe non essere chiuso, e lo stesso vale per  $\ker(A - \lambda)$ , con gravi conseguenze sulla possibilità di analizzare le equazioni lineari.



### Esercizio 39. La $\delta$

Si consideri in  $L^2([-1, 1])$  il funzionale lineare  $\delta$  definito sulle funzioni continue, che a  $f$  assegna la funzione costante  $f(0)$ .

Si determini il suo  $\ker$  e si mostri che non è chiuso.

### Definizione

Un operatore  $T$  è **chiuso** se il suo grafico

$$\mathcal{G} = \{(f; Tf) : f \in \mathcal{D}(T)\}$$

è chiuso nella metrica di  $H \times H$ , cioè se  $f_k \rightarrow f$  e  $Tf_k \rightarrow g$ , allora  $f \in \mathcal{D}(T)$  e  $Tf = g$ .

### Teorema 12.1. Operatori chiusi

Se  $T$  è chiuso,  $\ker(T - \lambda)$  è chiuso per ogni  $\lambda$

*Dimostrazione.* Noto preliminarmente che se  $T$  è chiuso lo è anche  $T - \lambda$ . Infatti il dominio di questo operatore è lo stesso di  $T$ , e se  $f_k \rightarrow f$  e  $(T - \lambda)f_k \rightarrow g$ , allora  $Tf_k \rightarrow \lambda f + g$ , dunque per la chiusura di  $T$  segue che  $f \in \mathcal{D}(T)$ , e che  $Tf = \lambda f + g$ , cioè  $Tf - \lambda f = g$ . È dunque sufficiente dimostrare che il  $\ker$  di  $T$  è chiuso.

Sia ora  $f_k$  una successione convergente a  $f$  tale che  $Tf_k = 0$ . Allora, per la chiusura di  $T$ ,  $f$  è nel dominio e  $Tf = 0$ , cioè  $f \in \ker T$ .  $\square$

### Teorema 12.2. Chiusura dell'aggiunto

$T^*$  è chiuso

*Dimostrazione.* Sia  $f_k \in \mathcal{D}(T^*)$  e  $f_k \rightarrow f$ , e sia  $T^*f_k \rightarrow g$ . Sia  $h \in \mathcal{D}(T)$ . Per definizione di aggiunto

$$(T^*f_k, h) = (f_k, Th)$$

Il primo membro tende a  $(g, h)$ , il secondo a  $(f, Th)$ , dunque

$$(g, h) = (f, Th)$$

da cui segue che il funzionale lineare che a  $h$  assegna  $(f, Th)$  è limitato in  $h$  (da  $\|g\|$ ), dunque  $f \in \mathcal{D}(T^*)$ . Quindi  $(f, Th) = (T^*f, h)$  e dunque, per densità di  $\mathcal{D}(T)$ ,  $g = Tf$ .  $\square$

Una conseguenza facile di questo teorema è che gli operatori autoaggiunti sono chiusi. Dunque è possibile definire senza problemi risolvente e spettro, come nel caso degli operatori limitati.

### Teorema 12.3. Operatori autoaggiunti

$A$  simmetrico è autoaggiunto se e solo se

$$\text{Range}(A + i) = H = \text{Range}(A - i)$$

*Dimostrazione.* Se  $A$  è autoaggiunto, è chiuso, dunque  $\ker(A \pm i)$  è chiuso, e dunque vale

$$\ker(A + i) \oplus \overline{\text{Range}(A - i)} = H = \ker(A - i) \oplus \overline{\text{Range}(A + i)}$$

(lo si verifichi per esercizio). Inoltre si prova facilmente che  $A$  può solo avere autovalori reali. Resta dunque da provare che  $\text{Range}(A \pm i)$  sono chiusi. Come nel caso limitato,

$$\|(A + i)(f_n - f_m)\|^2 = \|A(f_n - f_m)\|^2 + \|f_n - f_m\|^2$$

e tende a zero per ipotesi, dunque  $f_n$  converge a una  $f$  perché è di Cauchy. Inoltre,  $A + i$  è chiuso, dunque  $f$  è nel dominio e  $A + if = g$ , cioè  $g \in \text{Range}(A + i)$ .

Per dimostrare l'implicazione inversa, noto che se  $A$  è simmetrico,  $A^*$  è una sua estensione. Dunque si tratta di mostrare solo che  $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$ . Sia  $f \in \mathcal{D}(A^*)$ . Esiste  $g \in \mathcal{D}(A)$  tale che

$$(A^* + i)f = (A + i)g$$

Infatti, il membro di destra è ben definito perché  $f \in \text{CalD}(A^*)$  e dunque è un elemento di  $H$ , e  $g$  esiste perché  $A + i$  ha per immagine tutto  $H$ . Sia ora  $h \in \mathcal{D}(A)$ . Moltiplico per  $h$  e ottengo

$$(h, (A^* + i)f) = (h, (A + i)g)$$

Il primo membro è uguale a  $((A - i)h, f)$  per definizione di aggiunto, il secondo è uguale a  $((A - i)h, f)$  per simmetria di  $A$ . Dunque, raccogliendo

$$((A - i)h, f - g) = 0$$

Poiché  $\text{Range}(A - i) = H$ , al variare di  $h \in \mathcal{D}(A)$  il primo termine ricopre tutti gli elementi di  $H$ , e dunque  $f = g$ , cioè  $f \in \mathcal{D}(A)$ .  $\square$

Questo risultato è un primo passo nella direzione del teorema spettrale per operatori autoaggiunti. A differenza del caso limitato, però, l'operatore può avere spettro continuo e la decomposizione spettrale ne tiene conto. Si veda [RS], [T] per una teoria completa.

### Esempio 12.2. Operatori di moltiplicazione autoaggiunti

Sia  $h(x)$  reale, continua e non limitata, sia  $M_h$  l'operatore di moltiplicazione per  $h$ . Come nel caso limitato, è facile provare che  $M_h$  non ha spettro puntuale a meno che  $h$  non abbia tratti costanti, e lo spettro di  $M_h$  è solo continuo ed è l'immagine di  $h$ .

Nei testi di fisica teorica non troppo matematizzati, si osserva che definendo  $g(x) = \delta(x - x_0)$ , si ha

$$(M_h g)(x) = h(x)\delta(x - x_0) = h(x_0)\delta(x - x_0) = h(x_0)g(x)$$

In questo senso  $\delta(x - x_0)$  è autofunzione di autovalore  $h(x_0)$ . Però evidentemente non è in  $L^2$  e se ne conclude che  $h(x_0)$  è nello spettro continuo.

### Esempio 12.3. Il laplaciano in $\mathbb{R}$

Consideriamo l'operatore  $\Delta$ , definito su un qualche sottospazio denso di  $L^2(\mathbb{R})$ . In trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F}(\Delta f) = -\lambda^2 \mathcal{F}(f)$$

dunque è un operatore di moltiplicazione. Il suo naturale dominio di definizione è

$$\{f \in L^2 : \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 \lambda^4 d\lambda < +\infty\}$$

(che è lo spazio  $H^2$ ), e in questo dominio è simmetrico, e dunque autoaggiunto.

Nei testi elementari di fisica teorica, si nota che

$$\Delta e^{i\lambda_0 x} = -\lambda_0^2 e^{i\lambda_0 x}$$

e questa identità viene interpretata dicendo che  $-\lambda_0^2$  appartiene allo spettro continuo, perché l'autofunzione  $e^{i\lambda_0 x}$  non appartiene a  $L^2$ .

Si tratta della stessa osservazione che abbiamo fatto a proposito degli operatori di moltiplicazione, riletta in termini di laplaciano usando la trasformata di Fourier, infatti l'antitrasformata di  $\delta(\lambda - \lambda_0)$  è proprio  $e^{ix\lambda_0}$ , a meno di costanti.

Nei due esempi precedenti ho mostrato come i valori dello spettro continuo siano legati a soluzioni dell'equazione agli autovalori, ma con soluzioni che non sono funzioni  $L^2$ . Si può dare un quadro rigoroso in cui rileggere questi esempi, in termini di "quasi autovettori", dette successioni di Weyl.

**Teorema 12.4.** *Successioni di Weyl*

Dato  $A$  autoaggiunto,  $\lambda \in \mathbb{R}$  è nello spettro se e solo se esiste una successione di Weyl, cioè una successione  $f_n$ , con  $\|f_n\| = 1$ , tale che

$$\|(A - \lambda)f_n\| \rightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che esista una successione di Weyl per il valore  $\lambda$ . Se  $\lambda$  non fosse un valore dello spettro, allora sarebbe un punto del risolvente, dunque  $(A - \lambda)^{-1}$  è un operatore continuo da  $H$  nel dominio di  $A$ . Quindi

$$1 = \|f_n\| = \|(A - \lambda)^{-1}(A - \lambda)f_n\| \leq \|(A - \lambda)^{-1}\| \|(A - \lambda)f_n\| \rightarrow 0$$

ma ciò è impossibile.

Mostro il viceversa. Sia  $\lambda \in \sigma(A)$ . Poiché  $A$  è autoaggiunto,  $\lambda + i/n \in \rho(A)$ . D'altra parte, la norma di  $R_{\lambda+i/n}(A)$  deve divergere per  $n \rightarrow +\infty$ , infatti

$$A - \lambda = A - \left(\lambda + \frac{i}{n}\right) + \frac{i}{n} = \left(A - \left(\lambda + \frac{i}{n}\right)\right) \left(\mathbf{I} + \frac{i}{n}R_{\lambda+i/n}\right)$$

dunque se  $\|R_{\lambda+i/n}(A)\| \leq c$ , per  $n$  piccolo il secondo fattore sarebbe invertibile in serie di Neumann, mentre il primo è invertibile per ogni  $n$ .

Passando eventualmente a sottosequenze, esiste  $g_n$  con  $\|g_n\| = 1$  tale che

$$\|R_{\lambda+i/n}(A)g_n\| = m_n n$$

divergente in  $n$ . Sia  $f_n = R_{\lambda+i/n}(A)g_n / \|R_{\lambda+i/n}(A)g_n\|$ , che ha norma 1. Valutiamo come agisce  $A - \lambda$  su questi vettori:

$$(A - \lambda)f_n = \left(A - \lambda - \frac{i}{n}\right) f_n + \frac{i}{n} f_n = \frac{1}{\|R_{\lambda+i/n}(A)g_n\|} g_n + \frac{i}{n} f_n$$

In primo addendo tende a zero in norma perchè il numeratore diverge mentre  $\|g_n\| = 1$ , il secondo tende evidentemente a zero. □

**Esercizio 40.** *Successioni di Weyl per operatori di moltiplicazione*

Sia  $h$  continua e reale, costruire una successione di Weyl per l'operatore  $M_h$ , per il punto dello spettro  $h(x_0)$ .

Suggerimento: usare le approssimazioni della  $\delta(x - x_0)$ .

## 13 Il problema di Poisson

La teoria svolta nella parte iniziale di questo capitolo ha scopi puramente didattici, ed è rivolta a chi non conosce gli spazi di Sobolev e il loro uso per la ricerca della soluzione dell'equazione di Poisson.

In particolare, per il problema in un intervallo limitato, sia la serie di Fourier che il metodo della funzione di Green ci dicono tutto sulle soluzioni di  $u'' = -f$  in un intervallo  $[a, b]$ . D'altra parte la semplicità di questo caso rende possibile introdurre facilmente gli strumenti più sofisticati che saranno necessari per il caso in dimensioni più alte. Darò comunque le definizioni principali direttamente in  $\mathbb{R}^n$ .

Richiamo alcune definizioni che riguardano gli spazi di Sobolev. Come già fatto introducendo le distribuzioni, allarghiamo la nozione di derivata definendola attraverso l'**effetto** che ha sulle funzioni test. Indicherò con  $\mathcal{D}(\Omega)$  le funzioni  $C^\infty(\Omega)$  a supporto compatto in  $\Omega$  (ricordo che  $\Omega$  è aperto, dunque il supporto non tocca il bordo). Sia  $f$  una funzione regolare definita su  $\Omega$ , e sia  $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)$  un campo vettoriale. Per il teorema della divergenza

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \mathbf{w} = - \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{w}$$

Si noti che il termine di bordo è zero perché  $\mathbf{w}$  ha supporto compatto in  $\Omega$ . Se  $\nabla f$  è in  $L^2(\Omega)$  allora

$$\left| \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{w} \right| \leq \|\nabla f\| \|\mathbf{w}\|$$

Dunque l'esistenza del gradiente di  $f$  permette di integrare il prodotto tra  $f$  e la divergenza di un campo regolare, stimando il risultato con la norma del campo. Usando questa osservazione, diamo la definizione di gradiente debole. Sia  $f \in L^2(\Omega)$ . Diremo che  $f$  ha **gradiente debole** in  $L^2(\Omega)$  se esiste una funzione vettoriale  $\mathbf{u}$  tale che, per ogni campo vettoriale  $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)$  vale

$$- \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{w} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

Se esiste, il gradiente debole di  $f$  è unico, e, se  $f$  è regolare, ovviamente  $\mathbf{u} = \nabla f$ .

Si chiama **spazio di Sobolev**  $H^1$  lo spazio delle funzioni  $u \in L^2(\Omega)$  con gradiente debole  $\nabla u \in L^2(\Omega)$ . Il prodotto scalare su  $H^1$  è

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

dove, naturalmente

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

Si dimostra che  $H^1$  è effettivamente uno spazio di Hilbert, e che

$$\overline{C^\infty(\Omega)}^{H^1} = H^1$$

cioè  $H^1$  coincide con la chiusura topologica delle funzioni  $C^\infty(\Omega)$  rispetto alla norma  $H^1$ .

### 13.1 Il problema di Poisson-Neumann in $[a, b]$

#### Definizione di $H^1(a, b)$

Lo spazio  $H^1(a, b)$  è lo spazio delle funzioni quadro sommabili con derivata debole quadro sommabile. Dimostro che avere la derivata in  $L^2$  dà anche regolarità puntuale alla funzione. Sia  $f \in C^\infty(a, b)$  e  $\|f\| + H^1 < +\infty$ . Indico con  $L$  la lunghezza dell'intervallo  $L = b - a$ .

1.

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y |f'| \leq \sqrt{|x - y|} \|f'\|$$

e dunque  $f$  si estende per continuità agli estremi dell'intervallo e la stima vale anche per  $a$  e  $b$

2. Sia  $m_f = 1/L \int_a^b f$  la media di  $f$ .

$$|m_f| \leq \frac{1}{L} \int_a^b |f| \leq \frac{1}{\sqrt{L}} \|f\|$$

3. Poiché  $f$  è continua in  $[a, b]$ , esiste un punto  $\bar{x}$  tale che  $m_f = \bar{x}$ . Dunque,

$$|f(x) - m_f| \leq \sqrt{L} \|f'\|$$

4. Usando i punti precedenti

$$|f(x)| \leq |f(x) - m_f| + |m_f| \leq \sqrt{L} \|f'\| + \|f\|/\sqrt{L}$$

Queste affermazioni valgono anche per  $f \in H^1$ , per densità. Infatti, se  $f \in H^1$  esiste  $f_n \in C^\infty(a, b)$  che converge a  $f$  in norma  $H^1$ , dunque  $\|f_n\|_{H^1} \leq c$ . Dalle stime precedenti segue che  $f_n$  sono equilimitate e equi-hölderiane, dunque per Ascoli-Arzelà ogni sottosequenza di  $f_n$  ha una sottosequenza convergente nella norma del sup. Ma  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2$ , dunque tutte le sottosequenze convergono uniformemente a  $f$ . A questo punto si può passare al limite ottenendo la tesi.

Si provi per esercizio, senza invocare il teorema di Ascoli-Arzelà, che  $f_n$  è di Cauchy nella norma del sup.

Procedendo come sopra, è immediato dimostrare che i chiusi e limitati di  $H^1$  sono compatti rispetto alla convergenza uniforme. Infatti la limitatezza della norma garantisce equilimitatezza e equicontinuità, e dunque si può invocare il teorema di Ascoli-Arzelà. Poiché la convergenza in norma  $L^\infty$  implica quella in norma  $L^2$ , ne segue che i limitati di  $H^1$  sono precompatti in  $L^2$ . Si dice dunque che  $H^1$  si **immerge compatto** il  $L^2$ .

La disuguaglianza

$$|f(x) - m_f| \leq \sqrt{L} \|f'\|$$

rientra nella classe delle disuguaglianze di Poincaré-Wirtinger e questo tipo di disuguaglianza ha un ruolo chiave nelle applicazioni degli spazi di Sobolev. Prima di mostrarne una, diamone la sua versione in  $L^2$ , che si ottiene integrando in  $x$ .

**Teorema 13.1.** *Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger in dimensione 1*

$$\|f - m_f\|_2^2 \leq \int_a^b dx \leq L\|f'\|_2^2 = L^2\|f'\|_2^2$$

e dunque

$$\|f - m_f\|_2 \leq L\|f'\|_{L^2} \quad (13.1)$$

Consideriamo di nuovo il problema di Poisson  $u'' = -f$  con condizioni di Neumann omogenee. Sappiamo che  $f$  deve essere a media nulla, e che possiamo cercare la soluzione tra le funzioni a media nulla perché  $u$  è definita a meno di una costante.

Integrando contro una funzione test  $\phi \in C^\infty(a, b)$ , l'equazione data diventa

$$\int_a^b u' \phi' = \int_a^b f \phi$$

(il termine di bordo si annulla perché  $u'$  è 0 al bordo). Poiché ogni funzione  $g \in H^1$  è limite di funzioni regolari nella norma  $H^1$ , l'uguaglianza precedente deve valere anche se  $\phi \in H^1$ . Chiamerò **soluzione debole** in  $H^1$  una funzione  $u$  in  $H^1$  per cui valga l'uguaglianza precedente per ogni  $\phi \in H^1$ . Noto che se  $\phi = 1$ , l'uguaglianza è soddisfatta per qualunque  $u$ , dunque la formulazione debole ha senso per funzioni  $\phi$  ortogonali alle costanti. Mostriamo che  $u$  esiste unica se  $f$  è a media nulla, nel sottospazio  $H_m^1 = \{g \in H^1 : \int_a^b g = 0\}$ , che è proprio il sottospazio ortogonale alle costanti.

Il passaggio chiave è la disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger, che assicura che se  $f \in H_m^1$ , allora

$$\|f\|_2 \leq L\|f'\|_2$$

Da questa disuguaglianza, infatti, segue che

$$\|f\|_{H_m^1} = \sqrt{\|f\|_2 + \|f'\|_2} \text{ e } \|f'\|_2$$

sono **norme equivalenti** in  $H_m^1$ , su cui dunque posso considerare come prodotto scalare la forma

$$(f, g)_m = \int_a^b f' g'$$

Allora, assegnata  $f$  in  $L_m^2$  (lo spazio delle funzioni  $L^2$  a media nulla) il funzionale

$$\phi \rightarrow \int_a^b f g$$

è lineare continuo su  $H_m^1$  perchè

$$\left| \int_a^b f \phi \right| \leq \|f\|_2 \|\phi\|_2 \leq \sqrt{L} \|\phi\|_{H_m^1}$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste unica  $u \in H_m^1$  tale che, per ogni  $g \in H_m^1$ :

$$\int_a^b f g = (u, g)_m = \int_a^b u' g'$$

In questo modo abbiamo trovato  $u \in H_m^1$ , e abbiamo anche l'unicità.

Una osservazione sulla regolarità: dalla definizione stessa di soluzione debole, scegliendo  $\phi \in \mathcal{D}(a, b)$ , si ottiene che  $f$  è la derivata debole di  $u'$ , ed è in  $L^2$ . Dunque  $u \in H^2$ , che è lo spazio delle funzioni con derivata prima e seconda in  $L^2$ . Dal fatto che le funzioni di  $H^1$  sono Hölder continue, segue facilmente che le funzioni di  $H^2$  hanno derivata prima Hölder continua. Quindi se  $u$  è soluzione debole con  $f \in L_m^2$ , allora  $u \in C^{1,1/2}$ . Inoltre, la derivata di  $u$  si estende fino al bordo perché è hölderiana.

Se  $f$  è continua,  $u \in C^2((a, b)) \cap C^1([a, b])$  e la soluzione è forte.

**Teorema 13.2.** *Sia  $T$  l'operatore che a  $f \in L_m^2$  associa  $u \in H_m^1$  soluzione dell'equazione di Poisson in forma debole. Considerandolo come operatore da  $L_m^2$  a  $L_m^2$ ,  $T$  è autoaggiunto e compatto.*

*Dimostrazione.* Per ogni  $v \in H_m^1$ ,

$$\int_a^b (Tf)'v' = \int_a^b f v$$

Scegliendo  $g \in L_m^2$  e  $v = Tg \in H_m^1$  si ha

$$\int_a^b (Tf)'(Tg)' = \int_a^b f Tg$$

Dunque  $T$  è autoaggiunto. La compattezza di  $T$  segue dal fatto che l'immagine di un limitato è un limitato in  $H^1$ , che si immerge compatto in  $L^2$ .  $\square$

Posso applicare la teoria degli operatori compatti autoaggiunti, e dedurre che  $T$  ammette una base di autofunzioni  $\phi_k$ , con autovalori  $\mu_k$  positivi che tendono a zero (sono positivi perché  $-\partial_x^2$  è un operatore positivo). Ricordo che  $Tf = u$  con  $f \in L_m^2$  e  $u \in H_m^1$  è equivalente al fatto che  $u$  è soluzione debole del problema di Poisson. Dunque  $\phi_k$  è soluzione debole del problema di Poisson con  $f = \lambda_k \phi_k$ , con  $\lambda_k = 1/\mu_k$ . Poiché  $\phi_k \in L^2$ , per l'analisi della regolarità che abbiamo fatto al punto precedente, si ottiene che  $\phi_k \in H^2$  e dunque è  $C^{1,1/2}$ . Usando di nuovo l'equazione, si ottiene che  $\phi_k \in C^2$  quindi vale

$$\phi_k'' = -\lambda_k \phi_k$$

da cui segue che  $\phi_k$  sono funzioni  $C^\infty([a, b])$

## 13.2 Il problema di Poisson-Dirichlet in $[a, b]$

Lo scopo di questa sezione è adattare la teoria svolta per le condizioni di Neumann al caso di condizioni di Dirichlet. Darò però le definizioni e alcuni teoremi direttamente per  $\Omega$  dominio limitato di  $\mathbb{R}^n$ , anche se la teoria per questo caso è svolta nel paragrafo successivo.

Per trattare il caso di condizioni di Dirichlet omogenee, bisogna ambientare il problema in uno spazio che tenga conto delle condizioni al contorno. In una dimensione è particolarmente semplice, perché

$$H_0^1(a, b) = \{f \in H_1(a, b) : f(a) = 0 = f(b)\}$$

è un sottospazio chiuso di  $H^1$  (ricordo che le funzioni di  $H^1$  sono  $C^{1/2}$ ). D'altra parte in dimensione maggiore le funzioni di  $H^1$  non sono necessariamente continue, dunque è necessario operare un modo differente.

**Definizione.**

Si indica con  $H_0^1$  il sottospazio chiuso di  $H^1$  che si ottiene come

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1} = H_0^1.$$

La definizione di questo spazio include in qualche senso la condizione al contorno omogenea di Dirichlet, infatti se  $f \in H_0^1$  è regolare, allora è nulla al bordo. D'altra parte non è evidente cosa vuol dire "valore al bordo" per una funzione non regolare (per approfondimenti, vedi i teoremi di traccia su [S] par 7.7).

In questo spazio si ambienta perfettamente il problema di Poisson-Dirichlet. Ma prima bisogna premettere un'importante disuguaglianza.

**Teorema 13.3.** *Disuguaglianza di Poincaré in  $H_0^1((a, b))$*

Sia  $f(x) \in H_0^1$ . Allora

$$\|f\|_2 \leq 2(b-a)\|f'\|_2$$

*Dimostrazione.* Lo dimostro prima per  $f \in C_0^\infty([a, b])$ . Poiché  $f(a) = 0$

$$f^2(x) = \int_0^x \frac{d}{dy} f^2(y) dy = 2 \int_a^x f(y) f'(y) dy \leq 2 \left( \int_a^b f^2 \right)^{1/2} \left( \int_a^b f'^2 \right)^{1/2}$$

per Cauchy-Schwartz. Integrando in  $x$ :

$$\|f\|_2^2 \leq 2(b-a)\|f\|_2 \|f'\|_2$$

da cui

$$\|f\|_2 \leq 2L\|f'\|_2$$

Questa conclusione si estende facilmente a  $f \in H_0^1$  per densità delle funzioni  $C_0^\infty$  in  $H_0^1$ .  $\square$

**Teorema 13.4.** *Disuguaglianza di Poincaré in  $H_0^1(\Omega)$*

Se  $f \in H_0^1(\Omega)$  vale la disuguaglianza di Poincaré

$$\|f\|_2^2 \leq c\|\nabla f\|_2^2 \tag{13.2}$$

*Dimostrazione.* Sia  $f \in C_0^\infty(\Omega)$ , Prolungando  $f$  a zero in un dominio rettangolare di spigoli di lunghezza  $L$  opportuna, e usando il caso unidimensionale, è facile mostrare che Usando la densità di  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $H_0^1$  si mostra che la disuguaglianza di Poincaré (13.2) vale per ogni  $f$  in  $H_0^1$  (lo lascio per esercizio: sia  $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$  con  $f_n \rightarrow f$  nella norma  $H^1$ ; ne segue che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2$  e  $\nabla f_n \rightarrow \nabla f$  in  $L^2 \dots$ ).

Si osservi infine che la disuguaglianza di Poincaré non è verificata da  $f = 1$  (e della costanti in generale). Questo fatto prova che  $H_0^1$  è un sottospazio proprio di  $H_1$ .  $\square$

**Esercizio 41.** \* *L'ortogonale di  $H_0^1$*

Trova l'ortogonale di  $H_0^1(-1, 1)$  in  $H^1(-1, 1)$ .

**Esercizio 42.** \*  *$\delta$  su funzioni  $H^1(a, b)$*

Sia  $x_0 \in [a, b]$  e sia  $Tf(x) = f(x_0)$ . Prova che  $T$  è un funzionale lineare e continuo in  $H^1$ . Dunque per il teorema di Riesz esiste  $\delta \in H^1$  tale che  $(\delta, f)_{H^1} = f(x_0)$ . Trova l'espressione esplicita di  $\delta$ .

Risolvi lo stesso problema in  $H_0^1$  e  $H_{m,1}^1$ , con il prodotto scalare dato dal prodotto  $L^2$  delle derivate.



**Esercizio 43. Poisson-Dirichlet nel caso unidimensionale**

Consideriamo di nuovo il problema di Poisson  $u'' = -f$ , ma stavolta con condizioni di Dirichlet omogenee. Integrando contro una funzione test  $\phi \in \mathcal{D}(a, b)$ , l'equazione data diventa

$$\int_a^b u' \phi' = \int_a^b f \phi$$

Questa volta il termine di bordo si annulla perché  $\phi$  è nulla al bordo. Per densità delle funzioni di  $\mathcal{D}(a, b)$  in  $H_0^1$ , l'uguaglianza precedente deve valere anche se  $\phi \in H_0^1$ . Chiamerò soluzione debole in  $H_0^1$  una funzione  $u$  in  $H_0^1$  per cui valga l'uguaglianza precedente per ogni  $\phi \in H_0^1$ .

Il fatto che in  $H_0^1$  valga la disuguaglianza di Poincaré permette di trattare questo problema nello stesso modo del caso delle condizioni di Neumann. Dalla disuguaglianza segue infatti che

$$\sqrt{\|f\|_2 + \|f'\|_2} \text{ e } \|f'\|_2$$

sono **norme equivalenti** in  $H_0^1$ , su cui dunque posso considerare come prodotto scalare la forma bilineare

$$(f, g)_m = \int_a^b f' g'$$

Allora, assegnata  $f \in L^2$ , il funzionale

$$\phi \rightarrow \int_a^b f g$$

è lineare continuo su  $H_0^1$  perchè

$$\left| \int_a^b f \phi \right| \leq \|\phi\|_2 \|f\|_2 \leq \sqrt{L} \|\phi\|_{H_0^1}$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste unica  $u \in H_0^1$  tale che, per ogni  $g \in H_0^1$ :

$$\int_a^b f g = (u, g)_m = \int_a^b u' g'.$$

In questo modo abbiamo trovato  $u \in H_0^1$ , e abbiamo anche l'unicità.

L'analisi della regolarità è identica al caso delle condizioni di Neumann omogenee.

**Esercizio 44. La base per  $\partial_x^2$  con condizioni di Dirichlet omogenee**

Per esercizio, mimando il caso di condizioni di Neumann omogenee, provare che  $L^2(a, b)$  ha una base di autofunzioni della derivata seconda, che sono  $C^\infty[a, b]$ , e gli autovalori sono una sequenza positiva che tende a infinito.

**Esercizio 45. \***

Provare ad adattare questa teoria all'equazione

$$((1 - x^2)u')' = -f$$

Possibile traccia:  $f$  deve essere a media nulla, lo spazio da considerare deve essere quello delle funzioni a media nulla con  $\int_{-1}^1 (1 - x^2)u'^2$  limitato. Serve però una disuguaglianza di Poincaré che assicuri la continuità in questa norma del funzionale  $g \rightarrow \int g f$  con  $f$  in  $L^2$ .

### 13.3 Il Problema di Poisson in $\Omega$

Per il problema di Poisson con condizioni di Dirichlet omogenee abbiamo già tutti gli strumenti per ottenere un'unica soluzione debole. Resta però da discutere la regolarità, su cui richiamerò qualche teorema. Per il problema di Poisson-Neumann manca invece l'opportuna disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger, che si dimostra sotto opportune condizioni di regolarità del bordo di  $\Omega$ .

Sia  $\Omega$  un dominio di  $\mathbb{R}^n$  (cioè un aperto connesso e limitato). L'equazione di Poisson con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo è

$$\begin{cases} \Delta u = -f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (13.3)$$

e può essere vista come il problema della determinazione del potenziale elettrostatico  $u$  data la densità di carica  $f$ , assumendo  $u$  nullo al bordo. La stessa equazione si ottiene se si cercano le soluzioni di equilibrio per l'equazione delle onde (o del calore) con forzante  $f$ , con condizioni di Dirichlet nulle al bordo.

Poiché l'equazione delle onde con forzante viene da una lagrangiana (*vedi* il capitolo 1.1), l'equazione dell'equilibrio sarà anche l'equazione per la determinazione dei minimi dell'energia potenziale. Sia dunque  $E[u]$  il funzionale che esprime l'energia

$$E[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u - \int_{\Omega} f u$$

La variazione prima di  $E$  si ottiene come al solito da

$$\delta E = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} E[u + \varepsilon v] = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f v)$$

Imponendo che  $v$  sia nulla al bordo (in accordo con le condizioni al contorno assunte su  $u$ ), si ottiene che i punti  $u$  stazionari per  $E[u]$  (e in particolare il punto di minimo), devono soddisfare l'equazione

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f)v = 0 \quad \forall v \text{ regolare e nulla al bordo}$$

Infatti

$$\nabla u \cdot \nabla v = \nabla \cdot (v \nabla u) - \Delta u v$$

e, usando il teorema della divergenza e il fatto che  $v$  è nulla al bordo,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) = \int_{\partial\Omega} v \partial_n u = 0.$$

**Definizione**  $u \in H_0^1$  è una **soluzione debole** del problema di Poisson-Dirichlet (13.3) se per ogni  $v \in H_0^1$  vale

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v f$$

La disuguaglianza di Poincaré permette di risolvere immediatamente il problema dell'esistenza di  $u$ . Infatti, come nel caso unidimensionale, la norma di  $H^1$  è equivalente, in  $H_0^1$ , alla norma data dal prodotto scalare

$$(u, v)_1 := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

Data  $f \in L^2$ , per ogni  $v \in H_0^1$  vale

$$\left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \|f\| \|v\| \leq c \|f\| \|v\|_{H_0^1}.$$

Questa disuguaglianza implica che  $v \rightarrow \int_{\Omega} f v$  è lineare continuo in  $H_0^1$  e dunque per il teorema di Riesz esiste  $u$  che lo rappresenta mediante prodotto scalare, cioè  $u$  è soluzione debole dell'equazione di Poisson.

Risulta così definito

$$T : L^2 \rightarrow H_0^1 : T f = u \iff \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1$$

### **Esercizio 46.**

Mostra che 0 non è un autovalore per  $T$ .

### **Teorema 13.5. $T$ è autoaggiunto**

$T$  è autoaggiunto.

*Dimostrazione.* Data  $f \in L^2(\Omega)$ , per ogni  $v \in H_0^1$  si ha che

$$(T f, v)_1 = (f, v)$$

Sia  $g \in L^2(\Omega)$ , scegliamo  $v = T g \in H_0^1$ . Si ottiene

$$(T f, T g)_1 = (f, T g)$$

Scambiando  $f$  con  $g$  nei vari passaggi, si ottiene infine

$$(f, T g) = (T f, T g)_1 = (g, T f)$$

□

### **Teorema 13.6. Compattezza di $T$**

$H_0^1(\Omega)$  si immerge compatto in  $L^2(\Omega)$ . Dunque  $T$  è compatto.

*Dimostrazione.* In dimensione 1 è stato molto semplice mostrare la compattezza in  $L^2$  dei chiusi limitati di  $H^1$ . In dimensione maggiore è necessario qualche sforzo e qualche cautela in più.

Sia  $L$  tale che  $\Omega \subset J^n$ , con  $J = [-L/2, L/2]^n$ . Poichè se  $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ , allora la funzione che si ottiene prolungandola in tutto  $J^n$  con 0 è in  $\mathcal{D}(J^n)$ , si può identificare ogni funzione di  $H_0^1(\Omega)$  con una funzione di  $H^1(J^n)$  periodica.

Ricordo che i coefficienti di Fourier sono definiti da

$$\hat{f}_k = \frac{1}{(2L)^{n/2}} \int_J e^{-ik\pi x/L} f(x) dx$$

e che se  $f$  è regolare

$$\widehat{\nabla f}_k = ik \frac{\pi}{L}.$$

Dunque la chiusura in  $H^1$  delle funzioni  $C^\infty$  periodiche sono date in Fourier da  $\hat{f}_k$  tali che

$$\|f\|_{H^1}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( (1 + |k|^2 \frac{\pi^2}{L^2}) |\hat{f}_k|^2 \right) < +\infty$$

Come dimostrato nel punto 10.1, i limitati in questa norma sono compatti in  $\ell_2(\mathbb{Z})$ , e dunque compatti in  $L^2(J^n)$ . Ne segue che  $H_0^1(\Omega)$  si immerge compatto in  $L^2(\Omega)$ .  $\square$

La simmetria e la compattezza di  $T$  garantiscono che esiste una base di autofunzioni  $\phi_k$  con autovalori  $\mu_k$  decrescenti che tendono a 0 (0 non è autovalore dunque, essendo  $T$  compatto, gli autovalori sono infiniti e accumulano in 0). Dunque

$$T\phi_k = \mu_k \phi_k$$

Si noti che si può dimostrare che le autofunzioni sono  $C^\infty(\Omega)$ .

Rimane da considerare il problema di Poisson-Neumann in  $\Omega$ , per il quale enuncerò i risultati, senza le dimostrazioni (che avete fatto nel corso di Istituzioni di Analisi Superiore). Per trattarlo sarà necessario discutere della regolarità del bordo di un dominio.

### 13.4 Il problema di Poisson-Neumann in $\Omega$

**Definizione** Un dominio  $\Omega$  è di classe  $C^k$  se  $\partial\Omega$  è, in ogni suo punto, localmente grafico di una funzione di classe  $C^k$ .

La definizione rigorosa è la seguente. Si richiede che per ogni  $x \in \partial\Omega$ , esista una palla  $B$  di centro  $x$ , un sistema di coordinate cartesiane  $(z, y)$ , con  $z \in \mathbb{R}^{n-1}$  e  $y \in \mathbb{R}$ , con origine in  $x$ , un intorno  $U$  di 0 in  $\mathbb{R}^{n-1}$  ed una funzione  $\Phi \in C^k(U, \mathbb{R})$  tali che

- $\partial\Omega \cap B = \{(z, \Phi(z)) \mid z \in U\}$
- $\Omega \cap B = \{(z, y) \in B \mid z \in U, y < \Phi(z)\}$

Si dice che  $\Omega$  è lipschitziano se  $\Phi$  è lipschitziana. Noto che per il teorema di Rademacher, una funzione lipschitziana ha gradiente quasi ovunque, e dunque per quasi ogni  $x \in \partial\Omega$ , esiste l'iperpiano tangente a  $\partial\Omega$  in  $x$  e quindi la derivata normale esterna (per questo serve la seconda condizione data sopra, che afferma che distinguo localmente interno ed esterno).

Noto infine che se  $\Omega$  è limitato,  $\Omega$  è unione finita di grafici di funzioni lipschitziane (uso la compattezza).

La condizione di lipschitzianità è quella minima che permette di dimostrare il teorema della divergenza, e permette anche di costruire un operatore di prolungamento per  $H^1$

**Teorema 13.7. Teorema di prolungamento** Sia  $\Omega$  limitato e lipschitziano. Esiste un dominio limitato  $\Omega_0$  che contiene compatteamente  $\Omega$  e un operatore lineare  $E$  da  $H^1(\Omega)$  a  $H_0^1(\Omega_0)$ , tale che.

$$\|Ef\| \leq c\|f\| \quad e \quad Ef|_\Omega = f$$

Per la dimostrazione vedi [S] o [G]. Questo teorema asserisce che ogni funzione di  $H^1(\Omega)$  è prolungabile a una funzione a supporto compatto in un dominio più grande.

Abbiamo già usato un caso facile di teorema di prolungamento: sia  $\Omega_0$  un dominio che contiene  $\Omega$ , e sia

$$Ef(x) = f(x) \text{ per } x \in \Omega, \quad 0 \text{ altrimenti}$$

$E$  è un'isometria (non suriettiva) da  $H_0^1(\Omega)$  a  $H_0^1(\Omega_0)$ . Nel caso di funzioni solo  $H^1(\Omega)$  non si può invece prolungare ponendo  $f = 0$  fuori da  $\Omega$ , perchè la funzione che si ottiene non è in  $H^1$ .

Il teorema di prolungamento è alla base di due importanti risultati.

**Teorema 13.8.** *Immersione compatta di  $H^1(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$*

*Se  $\Omega$  è lipschitziano,  $H^1(\Omega)$  si immerge compattamente in  $L^2(\Omega)$ .*

La dimostrazione la lascio per esercizio, perchè è identica al caso di  $H^1$ , a parte la necessità di usare le estensioni delle funzioni di  $H^1$ .

**Teorema 13.9.** *Teorema di Poincaré-Wirtinger*

*Se  $\Omega$  è lipschitziano, esiste una costante  $c$  tale che per ogni  $u \in H^1$*

$$\|u - u_m\| \leq c \|\nabla u\|$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione si può fare facilmente per assurdo: sia  $u_n$  a media nulla e normalizzata

$$\|u_n\|_{H^1}^2 = \|u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^2 = 1$$

tale che

$$\|u_n\| \geq n \|\nabla u_n\|.$$

Per la limitatezza di  $\|u_n\|$  segue che  $\|\nabla u_n\| \rightarrow 0$ , e dunque, usando la normalizzazione,  $\|u_n\| \rightarrow 1$ . Poiché  $\|u_n\|_{H^1}$  è limitata,  $u_n$  converge debolmente in  $H^1$  a  $u \in H^1$ , e dunque  $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ , e  $u_n \rightarrow u$  in  $L^2$ , per la compattezza dell'immersione di  $H^1$  in  $L^2$ . Quindi

$$\|\nabla u\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla u_n\| = 0$$

Ma allora  $u$  è una costante (ha gradiente nullo), di media nulla, e dunque è nulla, invece, poiché  $u_n$  converge a  $u$  in  $L^2$ ,  $\|u\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| = 1$ , che è assurdo.  $\square$

### **Esercizio 47. Il problema di Poisson-Neumann**

Come facile esercizio, si provi l'esistenza e unicità di una soluzione debole in  $H_m^1(\Omega)$  (lo spazio delle funzioni  $H^1$  a media nulla) dell'equazione

$$\Delta u = -f$$

con condizioni di Neumann omogenee, secondo le seguenti linee.

- a. Mostra che può esistere una soluzione regolare del problema solo se vale la condizione di compatibilità

$$\int_{\Omega} f = 0$$

(usa il teorema della divergenza, o, se preferisci, la prima identità di Green)

- b. Mostra che se  $u$  è soluzione, allora  $u + c$  è soluzione per ogni costante  $c$ .
- c. Mostra che se  $u$  è una soluzione regolare, per ogni  $v$  in  $H^1(\Omega)$  vale

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad (13.4)$$

(dimostralo prima per  $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$  e concludi per densità).

- d. Nota che poiché  $f$  è a media nulla, questa identità vale se e solo se vale per  $v \in H_m^1$ , il sottospazio di  $H^1(\Omega)$  delle funzioni a media nulla.
- e. Dimostra che  $H_m^1$  è un sottospazio chiuso di  $H^1$  e che il suo ortogonale in  $H^1$  è il sottospazio delle funzioni costanti.
- f. Usando la disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger, mostra che in  $H_m^1$ ,  $\|\nabla u\|$  è una norma equivalente a quella di  $H^1$ , che dunque puoi considerare dotato del prodotto scalare

$$(u, v)_m = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

- g. Usa il teorema di Riesz per dimostrare l'esistenza e unicità di una soluzione debole in  $H_m^1$ .
- h. Mostra che l'operatore  $T : L_m^2 \rightarrow H_m^1$  che dà la soluzione è autoaggiunto e compatto.

### 13.5 Le costanti ottimali per le disuguaglianze di Poincaré

Considero di nuovo il problema di Poisson-Dirichlet, in  $H_0^1(\Omega)$ , con  $T : L(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ , dato da

$$Tf = u \iff \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$$

Siano  $\phi_k$  le autofunzioni di  $T$ , e siano  $\mu_k$  gli autovalori. Dal fatto che

$$T\phi_k = \mu_k \phi_k$$

segue che  $\phi_k \in H_0^1$  (se  $\mu_k \neq 0$ , ma 0 non è autovalore, perché?).

Per definizione di  $T$  segue che

$$(\phi_k, v) = (T\phi_k, v)_1 = \mu_k (\phi_k, v)_1.$$

Scegliendo  $v = T\phi_h$  ho

$$\mu_k (\phi_k, \phi_h)_1 = (\phi_k, \phi_h) = \|\phi_k\|^2 \delta_{kh}$$

Scegliendo  $\phi_k$  normalizzate in  $L^2$ , si ottiene dunque

$$(\phi_k, \phi_h)_1 = \delta_{kh} / \mu_k$$

Quindi  $\phi_k$  è un sistema ortogonale anche nella norma  $H_0^1$ . È facile provare che è completo. Infatti, se  $v \in H_0^1$  è tale che  $(\phi_k, v)_1 = 0$ , si ottiene  $(\phi_k, v) = 0$  anche in  $L^2$  (sempre perché  $\mu_k \neq 0$  per ogni  $k$ ), e dunque  $v = 0$  in  $L^2$ , e quindi è nulla. Dunque  $\{\sqrt{\mu_k} \phi_k\}_k$  è una base di  $H_0^1$ .

Usando la base di autovettori dell'inverso del laplaciano possiamo analizzare meglio la disuguaglianza di Poincaré. Infatti, data  $u \in H_0^1(\Omega)$ , poiché  $\{\phi_k\}_k$  è una base in  $L^2$

$$u = \sum_k \hat{u}_k \phi_k \quad \text{da cui } \|u\|^2 = \sum_k |\hat{u}_k|^2.$$

Inoltre, usando che  $\{\sqrt{\mu_k} \phi_k\}$  è una base in  $H_0^1$  posso scrivere

$$u = \sum_k \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \hat{u}_k \sqrt{\mu_k} \phi_k \quad \text{da cui } \|u\|_{H_0^1}^2 = \sum_k \frac{1}{\mu_k} |\hat{u}_k|^2$$

Dunque la migliore costante  $\gamma$  per la disuguaglianza di Poincaré deve soddisfare

$$\sum_k |\hat{u}_k|^2 \leq \gamma^2 \sum_k \frac{1}{\mu_k} |\hat{u}_k|^2$$

Dunque  $\gamma^2 = \sup_k \mu_k$ , ma i  $\mu_k$  sono decrescenti, quindi  $\gamma^2 = \mu_0$ . cioè  $\gamma$  è la radice del reciproco del più piccolo autovalore del laplaciano.

Lo stessa conclusione, naturalmente, vale per il caso delle condizioni di Neumann omogenee.

## 14 Il problema di Laplace

Ci sono vari metodi per trovare una funzione armonica in un dominio, con condizioni di Dirichlet o Neumann al bordo. In particolare per il problema di Laplace-Dirichlet si può usare il teorema di Lax-Milgram, introducendo lo spazio  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  delle tracce delle funzioni  $H^1(\Omega)$  per domini con bordi lipschitziani (vedi per esempio il Salsa); oppure si può invocare il metodo di Perron, che costruisce elegantemente la soluzione mediante funzioni sub e super armoniche (sul Salsa non trovate questo risultato ma l'analogo per il caso discreto, molto semplice e istruttivo). In dimensione due si possono anche usare le mappe conformi per ridursi al caso del cerchio.

In questo capitolo invece utilizzerò il metodo dei potenziali di singolo e doppio strato, di maggior interesse fisico-matematico, che permette di trasformare il problema di Laplace in un'equazione integrale per un operatore compatto, la cui soluzione sarà determinata mediante i teoremi dell'alternativa.

In ogni caso tutti questi approcci sono piuttosto sottili, perché devono comunque affrontare il problema della regolarità al bordo, che è fortemente dipendente dalla regolarità del bordo (la teoria più si sviluppa attraverso il metodo di Perron).

Per questo argomento seguirò parzialmente il testo

[DL] R. Dautray, J.-L. Lions: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology - Physical Origins and Classical Methods - Volume 1* - Springer-Verlag

### 14.1 La funzione di Green e il potenziale di volume

Ricordo che la funzione di Green per il problema di Poisson in  $\mathbb{R}^d$  è data da

$$G_d(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x}| & d = 2 \\ \frac{1}{(d-2)|\partial S^d|} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}} & d \geq 3 \end{array} \right\}$$

dove  $|\partial S^d|$  è la misura del bordo della sfera unitaria in  $\mathbb{R}^d$ . In particolare  $G_3 = 1/(4\pi|\mathbf{x}|)$ . La funzione di Green verifica, nel senso delle distribuzioni,

$$\Delta G = -\delta$$

Fisicamente questa affermazione vuol dire che  $G$  è il potenziale generato da una carica puntiforme nell'origine (ricordo che il laplaciano del potenziale elettrostatico è proporzionale alla densità di carica elettrica, e la stessa relazione vale tra il potenziale gravitazionale e la densità di massa).

Assegnata una distribuzione di carica  $f$ , il potenziale generato da  $f$ , che d'ora in poi chiamerò **potenziale di volume**), è

$$Vf(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} G_d(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

#### Proposizione 14.1. Sommabilità di $G$ e delle sue derivate

La funzione  $G_d(\mathbf{x})$  è divergente in  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , ma è sommabile in un intorno di  $\mathbf{0}$  in qualunque dimensione.

$G_d$  tende 0 per  $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$  in dimensione  $d \geq 3$ , diverge logicamente se  $d = 2$ .



$$\nabla G_d(\mathbf{x}) = -\frac{1}{|\partial S^d|} \frac{\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^{d-1}}$$

ed è sommabile in un intorno di 0 (ma non all'infinito).

Le derivate seconde sono date da

$$\partial_{ij}^2 G_d(\mathbf{x}) = -\frac{1}{|\partial S^d|} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d+2}} (\delta_{ij} |\mathbf{x}|^2 - dx_i x_j) \quad (14.1)$$

e, divergendo come  $1/|\mathbf{x}|^d$ , non sono sommabili intorno a 0.

Vale però per ogni  $r > 0$

$$\int_{|\mathbf{x}|=r} \partial_{ij} G_d(\mathbf{x}) \sigma(d\mathbf{x}) = 0 \quad (14.2)$$

La prova si fa per ispezione diretta. Per l'ultimo punto basta notare che se  $i \neq j$  il primo termine è nullo, mentre l'integrale del secondo, con  $x_i x_j$ , è nullo perché il cambiamento di variabile  $x_i \rightarrow -x_i$  deve lasciare inalterato l'integrale. Invece, poiché

$$\int_{|\mathbf{x}|=r} x_i^2 \sigma(d\mathbf{x}) = \frac{1}{d} \int_{|\mathbf{x}|=r} |\mathbf{x}|^2 \sigma(d\mathbf{x})$$

questo contributo cancella l'integrale del primo termine nel caso di  $i = j$ .

Presento ora qualche risultato di regolarità classica del potenziale di volume. Comincio con il provare la buona definizione, nel caso di  $f \in L^1 \cap L^\infty$ . Rimando per esempio al Lieb e Loss [LL] capitolo 10, per le stime di  $Vf$  nella sola ipotesi  $f \in L^p$  con  $p < +\infty$ .

#### **Teorema 14.1. Esistenza e limitatezza del potenziale di volume**

Sia  $f \in L^1 \cap L^\infty$ , e, nel caso di dimensione 2, sia anche a supporto compatto. Allora  $Vf$  è ben definita, ed è una funzione limitata se  $d \geq 3$ . In particolare

$$\|Vf\|_\infty \leq c \|f\|_\infty^{1-2/d} \|f\|_1^{2/d}$$

Nel caso  $d = 2$ , usando che  $f$  è limitata e che  $G_2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  è sommabile sul supporto (limitato) di  $f$ , si ottiene che  $Vf$  è definito e localmente limitato. Per  $d \geq 3$  stimo il campo separando l'integrale in due regioni:

$$Vf = \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<r} G_d(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\geq r} G_d(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Il secondo integrale è stimato da

$$\frac{1}{(n-2)|\partial S^d| r^{d-2}} \|f\|_1.$$

Il primo è stimato da

$$\frac{1}{(n-2)|\partial S^d|} \|f\|_\infty \int_{|\mathbf{z}|<r} \frac{1}{|\mathbf{z}|^{d-2}} d\mathbf{z} = \frac{1}{(n-2)} \|f\|_\infty \int_0^r \rho d\rho = \frac{r^2}{2(n-2)} \|f\|_\infty$$

Queste due stime provano che il potenziale è limitato. La somma dei due termini si può ottimizzare cercando il minimo in  $r$ , o semplicemente cercando il valore di  $r$  tale che i due termini siano uguali (la differenza sarà solo nella costante moltiplicativa davanti alla stima

finale). Indicando con  $c$  qualunque costante che dipende solo dalla dimensione, scelgo  $r$  tale che

$$r^2 \|f\|_\infty = c \frac{1}{r^{d-2}} \|f\|_1$$

Si ottiene

$$\|Vf\|_\infty \leq c \|f\|_\infty^{1-2/d} \|f\|_1^{2/d}$$

Per provare la regolarità del potenziale di volume sarà necessario passare la derivata sotto segno di integrale, passaggio tutt'altro che ovvio vista la di singolarità di  $G_d$ . Uno dei modi per farlo potrebbe essere di considerare il caso di  $f$  regolare a sufficienza, che permette di mostrare che  $\nabla(G * f) = G * \nabla f$ , per poi spostare la derivata su  $G_d$ , con qualche cautela. Infine, si chiude la prova per densità delle funzioni regolari. Poiché questo approccio è comunque complicato nel caso delle derivate seconde, userò un'altra strada, che ovviamente non può evitare i punti tecnici fondamentali (cioè la procedura di isolamento della singolarità), ma rende le dimostrazioni un po' più concise.

Userò il seguente risultato di teoria delle distribuzioni.

**Teorema 14.2. Derivate distribuzionali regolari**

*Se  $\alpha$  è una distribuzione il cui gradiente distribuzionale  $\nabla\alpha$  è una distribuzione regolare continua, allora  $\alpha$  è una funzione  $C^1$ .*

La dimostrazione di questo teorema (di cui può sfuggire a prima vista il senso se non ci si riflette un po') è semplice in dimensione 1, più complessa in dimensione maggiore. La trovate su LL, capitolo 6.

D'ora in poi ometterò l'indice  $d$  in  $G_d$ .

**Teorema 14.3.  $Vf \in C^1$**

*Sia  $f \in L^1 \cap L^\infty$ . Allora  $\nabla G * f \in C^0(\mathbb{R}^d)$  ed è uniformemente limitato.*

*Per  $d \geq 3$ ,  $Vf \in C^1$  e  $\nabla Vf = \nabla G * f$ .*

*Lo stesso risultato vale in dimensione 2 se  $f$  è a supporto compatto.*

Prima della dimostrazione faccio un commento sull'enunciato. Questo teorema asserisce la continuità e la limitatezza del campo (cioè del gradiente del potenziale). Per poter dire che  $Vf$  è di classe  $C^1$  serve però che il potenziale esista, e questo fatto in dimensione due si ottiene aggiungendo l'ipotesi di supporto compatto per  $f$ .

*Dimostrazione.* Inizio con il provare la regolarità di  $\nabla G * f$ , poi mostrerò che è il gradiente debole di  $Vf$ , e invocando il teorema 14.2 chiuderò la prova.

Notando che  $\nabla G$  è stimato da  $1/|\mathbf{x}|^{d-1}$ , sommabile intorno alla singolarità, e procedendo come nel teorema 14.1, cioè separando l'integrale nelle due regioni  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r$  e  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq r$ , si ha

$$\|\nabla G * f\|_\infty \leq c \|f\|_\infty r + c \frac{1}{r^{d-1}} \|f\|_1$$

e ottimizzando su  $r$  si ottiene

$$\|\nabla G * f\|_\infty \leq \|f\|_\infty^{1-1/d} \|f\|_1^{1/d}$$

Discuto ora della continuità. Osservo che

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \varepsilon} \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

è una funzione continua per convergenza dominata, infatti  $f \in L^1$ ,

$$\lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \nabla G(\mathbf{x}' - \mathbf{y}) | \mathcal{X}\{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|\} = \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) | \mathcal{X}\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\}$$

quasi ovunque in  $\mathbf{y}$  (la convergenza non c'è se  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \varepsilon$ ) e

$$|\nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) | \mathcal{X}\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \varepsilon\} \leq c/\varepsilon^{d-1}.$$

Inoltre

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\varepsilon} |\nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y})| |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \leq c\varepsilon \|f\|_\infty$$

cioè è uniformemente piccolo in  $\varepsilon$ . Dunque  $\nabla G * f$  è limite uniforme di funzioni continue, e dunque è continuo.

Provo ora che  $\nabla G * f$  è il gradiente debole di  $Vf$ . Poiché  $|\nabla\varphi(\mathbf{y})| |G(\mathbf{x} - \mathbf{y})| |f(\mathbf{y})|$  è sommabile in  $d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}$ , per Fubini si ha

$$-\int d\mathbf{x} \nabla\varphi(\mathbf{x}) Vf = -\int d\mathbf{y} f(\mathbf{y}) \int G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Ora si deve spostare il gradiente da  $\varphi$  a  $G$ , mediante il teorema della divergenza.

Ricordo che se  $g$  è una funzione regolare, e  $\Omega$  è un dominio limitato con frontiera regolare, allora

$$\int_{\Omega} \nabla g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \sigma(d\mathbf{x})$$

dove  $\mathbf{n}$  è al normale esterna a  $\Omega$ .

Nel nostro caso  $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  non è regolare, dunque bisogna isolare la singolarità:

$$\begin{aligned} \int G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|>\varepsilon} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=\varepsilon} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \sigma(d\mathbf{x}) - \int \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Nel termine di bordo uso  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  normale esterna alla palla (e dunque interna al dominio, per c'è un segno meno davanti), nel secondo termine sono già passato a limite, che esiste perché l'integrando è sommabile. Rimane da valutare il limite del termine di bordo: in dimensione  $d \geq 3$ , è l'integrale sul bordo della palla, che misura  $|\partial S^d| \varepsilon^{d-1}$  di una funzione che è  $c/|\varepsilon^{d-2}|$  e dunque va a 0 in  $\varepsilon$ . In dimensione due, è l'integrale su una circonferenza di misura  $2\pi\varepsilon$  di una funzione che è  $c \log(\varepsilon)$ , dunque anche in questo caso il termine di bordo tende a 0.

Abbiamo quindi provato che

$$\int \varphi(\mathbf{x}) \nabla Vf(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = -\int f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \int \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Un'ultima applicazione del teorema di Fubini permette di concludere che

$$\int \varphi \nabla Vf = \int \varphi \nabla G * f$$

da cui la tesi, usando il teorema 14.2.

**Teorema 14.4. Ulteriore regolarità di  $\nabla G * f$** 

Se  $f \in L^1 \cap L^\infty$  allora  $\nabla G * f$  è “quasi lipschitziano”, cioè

$$|(\nabla G * f)(\mathbf{x}) - (\nabla G * f)(\mathbf{y})| \leq c\varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$$

dove

$$\varphi(r) = \begin{cases} r |\ln(r/e)| & \text{se } r \in [0, 1] \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È facile mostrare che questa condizione implica l'hölderianità di  $\nabla G * f$  per qualunque  $\alpha$ . Non dimostro questo risultato più sottile, ma rimando al testo: Carlo Marchioro, Mario Pulvirenti **Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids** ISBN 978-1-4612-4284-0, Springer per la dimostrazione nel caso bidimensionale. Questa proprietà è essenziale per dimostrare l'esistenza e unicità delle soluzioni dell'equazione di Eulero per i fluidi incomprimibili non viscosi in dimensione 2, attraverso il fatto che la condizione di quasi-lipschitzianità di un campo vettoriale, pur essendo più debole della lipschitzianità, garantisce l'unicità delle linee di flusso (che invece non è garantita dalla sola hölderianità).

Nonostante  $Vf$  risolva, come ricorderemo, il problema di Laplace  $\Delta Vf = -f$ , la sola continuità di  $f$  non garantisce la regolarità  $C^2$  del potenziale generato, ma per ottenerla è sufficiente un po' di regolarità in più di  $f$ .

**Teorema 14.5. Regolarità hölderiana di  $\nabla G * f$** 

Sia  $f$  sommabile, limitata, e in  $C^\alpha$ , con  $\alpha \in (0, 1)$ , cioè esista  $c < 0$  tale che per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  con  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq 1$  si abbia

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| \leq c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^\alpha$$

Allora  $\nabla G * f$  è una funzione  $C^{1+\alpha'}$ ,  $\forall \alpha' < \alpha$ .

Nel caso  $d \geq 3$  questo teorema afferma che  $Vf \in C^{2+\alpha'}$ . Nel caso  $d = 2$  se si assume  $f$  è a supporto compatto si ottiene che  $Vf$  è ben definita e dunque è in  $C^{2+\alpha'}$ . Dimostro il teorema per  $d = 3$ , ma i passaggi sono gli stessi anche per gli altri valori di  $d$ .

In notazione matriciale

$$\partial^2 G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{I}|\mathbf{x}|^2 - 3|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|^5}$$

Si osservi che  $\partial^2 G$  ha traccia nulla, cioè  $\Delta G = 0$  per  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

Calcolo le derivate distribuzionali di  $\nabla G * f$ . Sia  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  (cioè sia in  $C_0^\infty$ ). Isolando la singolarità e usando Fubini

$$\int \partial_i \phi(\mathbf{x}) (\partial_j G * f)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d\mathbf{y} f(\mathbf{y}) \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|>\varepsilon} \partial_j G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_i \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

L'integrale in  $d\mathbf{x}$  può essere riscritto come

$$\begin{aligned} & \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|>\varepsilon} \partial_j G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_i \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ & - \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=\varepsilon} \partial_j (G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x})) n_i(\mathbf{x}) \sigma(d\mathbf{x}) - \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|>\varepsilon} \partial_{ij} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (14.3)$$

dove  $n_i = (x_i - y_i)/\varepsilon$  è l'i-esima componente della normale esterna alla sfera. Valuto il primo integrale, usando l'espressione delle derivate di  $G$ :

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=\varepsilon} \partial_j (G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x})) n_i(\mathbf{x}) \sigma(d\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|\mathbf{z}|=\varepsilon} z_j n_i \phi(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \sigma(d\mathbf{z})$$

Poiché  $\mathbf{z} = \varepsilon \mathbf{n}$  questo integrale è pari a

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{n}|=1} n_j n_i \phi(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}) \sigma(d\mathbf{n})$$

che tende, per convergenza dominata, a

$$-\frac{1}{4\pi} \varphi(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{n}|=1} n_j n_i \sigma(d\mathbf{n}) = -\frac{1}{3} \varphi(\mathbf{x}) \delta_{ij}$$

L'integrando del secondo termine della 14.3 diverge come  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3$ , dunque non è evidente che esista il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Questo limite esiste perché vale la (14.2), infatti vale

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \varepsilon} \partial_{ij} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq 1} \partial_{ij} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| < 1} \partial_{ij} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Per ottenere questo risultato ho sottratto  $\partial_{ij} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y})$  nella regione  $\{\varepsilon < |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 1\}$  perché ha integrale nullo in  $d\mathbf{x}$ . Posso infine passare al limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  perché l'integrando del secondo termine è stimato da

$$|\partial_{ij} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}))| \leq \frac{c \|\nabla \varphi\|_\infty}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}$$

che è sommabile. Quindi se  $\varphi$  è regolare, esiste come valore principale

$$\int \partial_{ij} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \varepsilon} \partial_{ij} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Mettendo insieme i vari termini, abbiamo ottenuto

$$\int |\nabla \varphi\rangle \langle (\nabla G * f)| = \frac{\mathbf{I}}{3} \int \varphi(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int d\mathbf{y} f(\mathbf{y}) \int d\mathbf{x} \partial^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y})$$

dove l'ultimo integrale va inteso nel senso del suo valore principale.

Mostriamo ora come possiamo invertire l'ordine di integrazione nell'ultimo termine, nonostante sia definito come valore principale, se  $f \in C^\alpha$ :

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{y} f(\mathbf{y}) \int d\mathbf{x} \partial^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| > \varepsilon} \partial^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \\ & \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| > 1} \partial^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| < 1} \partial^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Il secondo integrale in  $d\mathbf{y}$  esiste perché, usando la regolarità di  $f$ , l'integrando è limitato da

$$c \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}$$

che è sommabile intorno a 0. Dunque le derivate distribuzionali di  $\nabla G * f$  si identificano con le funzioni

$$\partial^2(G * f) := -\frac{1}{3} \mathbf{I} f(\mathbf{x}) + \int \partial^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})$$

dove l'integrale va inteso nel senso del valore principale. (cioè del limite su  $|x - y| > \varepsilon$ ).

Mostro la regolarità hölderiana in  $\mathbf{x}$ . Il primo termine è proporzionale a  $f(\mathbf{x})$  che per ipotesi è in  $C^\alpha$ . Spezzo l'integrale su  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq 1$  e su  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 1$ . Riscrivo il primo come

$$\int_{|\mathbf{z}|>1} \partial^2 G(\mathbf{z}) f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

e stimo

$$\int_{|\mathbf{z}|>1} |\partial^2 G(\mathbf{z})| |f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - f(\mathbf{x}' + \mathbf{z})| d\mathbf{z} \leq c \int_{|\mathbf{z}|>1} \frac{1}{|\mathbf{z}|^3} |f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - f(\mathbf{x}' + \mathbf{z})| d\mathbf{z}$$

Purtroppo  $1/|\mathbf{z}|^3$  non è sommabile a infinito, dunque bisogna fare una doppia stima, spezzando ulteriormente l'integrale in  $|\mathbf{z}| < R$  e  $|\mathbf{z}| \geq R$ :

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{z}| \geq R} |\partial^2 G(\mathbf{z})| |f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - f(\mathbf{x}' + \mathbf{z})| d\mathbf{z} &\leq \frac{c}{R^3} \|f\|_1 \\ \int_{1 < |\mathbf{z}| < R} |\partial^2 G(\mathbf{z})| |f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - f(\mathbf{x}' + \mathbf{z})| d\mathbf{z} &\leq c \log R |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^\alpha \end{aligned}$$

dove  $c$  non dipende da  $R$ . Scegliendo di far divergere  $R$  come  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  si ottiene l'hölderianità di esponente  $\alpha'$  per ogni  $\alpha' < \alpha$ .

Resta da provare la regolarità del termine con  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 1$ . Questo integrale è

$$\int_{|\mathbf{z}|<1} \partial^2 G(\mathbf{z}) (f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - f(\mathbf{x})) d\mathbf{z}$$

La differenza tra il valore in  $\mathbf{x}$  e in  $\mathbf{x}'$  di questo integrale è stimata da

$$c \int_{|\mathbf{z}| \leq 1} \frac{1}{|\mathbf{z}|^3} |\delta f|$$

dove

$$\delta f = f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) - (f(\mathbf{x}' + \mathbf{z}) - f(\mathbf{x}'))$$

Per hölderianità:

$$|\delta f| \leq c|\mathbf{z}|^\alpha \quad \text{e} \quad |\delta f| \leq c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^\alpha$$

Ma allora, scelto  $\gamma \in (0, 1)$

$$|\delta f| = |\delta f|^\gamma |\delta f|^{1-\gamma} \leq c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{\alpha(1-\gamma)} |\mathbf{z}|^{\alpha\gamma}$$

Quindi l'integrale è stimato da

$$\left| \int_{|\mathbf{z}| \leq 1} \partial^2 G(\mathbf{z}) \delta f \right| d\mathbf{z} \leq c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{\alpha(1-\gamma)} \int_{|\mathbf{z}| \leq 1} |\mathbf{z}|^{-(3-\alpha\gamma)} d\mathbf{z} \leq c_\gamma |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{\alpha(1-\gamma)}$$

con  $c_\gamma$  limitata ma divergente per  $\gamma \rightarrow 0$ . Poiché vale per ogni  $\gamma \in (0, 1)$ , si ha l'hölderianità per ogni  $\alpha' < \alpha$ .

Noto, infine, che il laplaciano di  $G * f$  è la traccia della matrice delle derivate seconde, e, poiché  $\partial^2 G$  ha traccia nulla, si ottiene

$$\Delta(G * f) = -\frac{1}{3} 3f(\mathbf{x}) = -f(x)$$

□

**Esercizio 48. Andamento asintotico del campo - parte I**

Sia  $f$  a supporto compatto. Mostra che esiste finito il limite

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}|^{d-1} (\nabla G * f)(\mathbf{x})$$

Per la precisione,  $\nabla G * f$  è asintoticamente uguale a

$$\nabla G(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

**Esercizio 49. \* Andamento asintotico di  $Vf$  - parte II**

Anche se  $f$  non è a supporto compatto il campo tende a 0 (ma può farlo in modo arbitrariamente lento in  $|\mathbf{x}|$ ). Suggerimento. Definisci

$$M_r = \int_{|\mathbf{y}| > R} |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y}$$

e mostra che va a 0 per  $r \rightarrow +\infty$ . Decomponi il campo in quello generato da  $f(\mathbf{y})\mathcal{X}\{|\mathbf{y}| < r\}$  e  $f(\mathbf{y})\mathcal{X}\{|\mathbf{y}| \geq r\}$ , notando che il secondo tende a 0 per  $r \rightarrow +\infty$  uniformemente in  $\mathbf{x}$ .

Prova a costruire un esempio di  $f$  con  $\nabla G * f$  che tende a 0 con lentezza fissata.

**14.2 Dipoli**

In questo paragrafo determineremo l'andamento asintotico per  $\mathbf{x}$  divergente della funzione di Green, sia perché è una questione interessante in sé, sia perché sarà utile per discutere alcune importanti questioni di unicità. Per questo scopo è però importante descrivere il potenziale generato da un **dipolo**.

Fisicamente, un dipolo è una coppia di cariche di segno opposto, vicine. Sia  $\mathbf{n}$  un versore, sia  $\varepsilon > 0$  una lunghezza, e consideriamo la seguente distribuzione formata da due cariche opposte a distanza  $\varepsilon$  lungo  $\mathbf{n}$  (la carica positiva è in  $\varepsilon\mathbf{n}/2$ , quella negativa nel punto opposto)

$$\mu_\varepsilon = \delta(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{n}/2) - \delta(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{n}/2)$$

Nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , va a zero nel senso delle distribuzioni. Se invece dividiamo per la distanza e passiamo al limite, nel senso delle distribuzioni si ottiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mu_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\delta(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{n}/2) - \delta(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{n}/2)) = -\mathbf{n} \cdot \nabla \delta$$

che è l'espressione matematica del dipolo. In questo contesto,  $\mathbf{n}$  è il **momento di dipolo**. Il potenziale generato da  $\mu_\varepsilon/\varepsilon$  è

$$\frac{1}{\varepsilon} (G(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{n}/2) - G(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{n}/2))$$

che tende a

$$-\mathbf{n} \cdot \nabla G(\mathbf{x})$$

che dunque è il potenziale generato dal dipolo di momento di dipolo  $\mathbf{n}$ . In generale, il momento di dipolo di due cariche di segno opposte  $C$ , poste in  $\mathbf{b}^+$  e  $\mathbf{b}^-$  è il vettore

$$\mathbf{d} = C(\mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^-)$$

(nel caso precedente si ottiene esattamente  $\mathbf{n}$ ). Per una distribuzione non atomica  $f(\mathbf{x})$ , complessivamente neutra, cioè tale che

$$\int f = 0$$

il momento di dipolo è dato da

$$\mathbf{d} = \int \mathbf{x}f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Infatti, siano  $f^+$  e  $f^-$  le distribuzioni della carica positiva e di quella negativa, cioè

$$f^+ = \max(f, 0) \quad f^- = \max(-f, 0)$$

e quindi  $f = f^+ - f^-$ . Sia  $C = \int f^+ = \int f^-$ . Si ha

$$\int \mathbf{x}f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = C \left( \frac{1}{C} \int \mathbf{x}f^+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{C} \int \mathbf{x}f^-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) = C(\mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^-)$$

dove

$$\mathbf{b}^\pm = \frac{1}{C} \int \mathbf{x}f^\pm(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

sono i baricentri della parte positiva e negativa.

#### **Teorema 14.6. Andamento asintotico del potenziale**

*Sia  $f$  limitata e a supporto compatto. Per  $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$ :*

$$V(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \nabla G(\mathbf{x}) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{y}f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + O(|\mathbf{x}|^{-d})$$

Dunque al primo ordine significativo il potenziale è pari a quello generato da tutta la carica concentrata nell'origine e il termine successivo è un dipolo. Se la carica totale è nulla il primo termine significativo è quello di dipolo.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è semplice, la faccio nel caso tridimensionale, e si ottiene mediante uno sviluppo con Taylor. Sia  $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$ ; allora

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{1}{|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}/|\mathbf{x}||} \\ &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}/|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|^2/|\mathbf{x}|^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \left( 1 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{x}|} + O\left(\frac{|\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x}|^2}\right) \right) \\ &= G(\mathbf{x}) - \nabla G(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} + O\left(\frac{|\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x}|^3}\right) \end{aligned}$$

Poiché  $f$  è a supporto compatto, per  $|\mathbf{x}|$  abbastanza grande questo sviluppo è verificato per ogni  $\mathbf{y}$  nel supporto di  $f$ . Inserendolo nell'espressione di  $V$  si ottiene la tesi.  $\square$



**Esercizio 50. Andamento asintotico nel caso di momento secondo finito**

Dimostra la validità dell'andamento asintotico anche se  $f$  non ha supporto compatto, ma nell'ipotesi che il momento secondo di  $f$  sia limitato, cioè che

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathbf{y}|^2 |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} < +\infty$$

**Esercizio 51. Multipoli**

Nell'integrale che definisce il potenziale di volume compare  $\frac{1}{\rho} G(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}/\rho)$  dove  $\rho = |\mathbf{x}|$ . Lo sviluppo a ordine  $n$  dà il termine di multipolo di ordine  $n$  del potenziale:

$$(-1)^n \frac{1}{\rho^{n+1}} \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} G}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\hat{\mathbf{x}}) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{y}^\alpha f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

dove  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , e

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_n \\ \alpha! &= \alpha_1! \dots \alpha_n! \\ \mathbf{y}^\alpha &= y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n} \\ \partial \mathbf{x}^\alpha &= \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Si noti che si tratta di una funzione armonica in  $\mathbf{x}$  di grado  $-(n+1)$ . Si dimostri che per  $\rho = 1$  si ottengono armoniche sferiche di autovalore  $-n(n+1)$ .

**14.3 I potenziali di singolo e doppio strato**

In questo paragrafo rileggo la III identità di Green, introducendo i potenziali di singolo e doppio strato. In quello che segue assumerò, per semplicità, che  $\Omega$  sia un dominio limitato con bordo regolare quanto serve.

**Teorema 14.7. II identità di Green**

Siano  $u$  e  $v$  due funzioni  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ . Allora

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial\Omega} (u \partial_n v - v \partial_n u)$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è una conseguenza del teorema della divergenza, infatti

$$\begin{aligned} u\Delta v &= \text{div}(u\nabla v) - \nabla u \cdot \nabla v \\ v\Delta u &= \text{div}(v\nabla u) - \nabla v \cdot \nabla u \end{aligned}$$

dunque

$$u\Delta v - v\Delta u = \text{div}(u\nabla v) - \text{div}(v\nabla u)$$

Integrando in  $\Omega$  e usando il teorema della divergenza si ottiene la tesi. □

La III identità di Green si ottiene considerando  $u(\mathbf{y})$  e la funzione di Green  $G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ , e mette in relazione  $u$ , con il potenziale generato da  $\Delta u$  e due funzioni di bordo. Formalmente, poiché  $\Delta G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ , se  $\mathbf{x} \in \Omega$  si ottiene

$$-u(\mathbf{x}) - V_\Omega \Delta u(\mathbf{x}) = D_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) - S_{\partial\Omega} \partial_n u(\mathbf{x})$$

dove

$$V_{\Omega}f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})$$

è il potenziale di volume generato da

$$f(\mathbf{y})\mathcal{X}\{\mathbf{y} \in \Omega\},$$

mentre

$$S_{\partial\Omega}\mu(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{y})\sigma(d\mathbf{y})$$

prende il nome di **potenziale di singolo strato** generato dalla densità di carica  $\mu$ , e

$$D_{\partial\Omega}\mu(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mu(\mathbf{y})\sigma(d\mathbf{y})$$

prende il nome di **potenziale di doppio strato** generato da  $\mu$ .

Il motivo di questi nomi è che  $S\mu$  è il potenziale generato dalla distribuzione di carica  $\mu$  sulla superficie  $\partial\Omega$ , mentre  $D\mu$  è il potenziale generato dalla distribuzione di dipolo  $\mathbf{n}\mu$ , dove  $\mathbf{n}$  è la normale esterna alla superficie. Poiché il dipolo si ottiene da due cariche uguali e opposte vicine, il potenziale di dipolo è quello generato da due distribuzioni opposte su due “strati” vicini alla superficie.

Per un motivo che sarà chiaro in seguito, do un nome diverso ai due potenziali nel caso in cui  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ .

$$\begin{aligned}\Sigma_{\partial\Omega}\mu &= S_{\partial\Omega}\mu|_{\partial\Omega} \\ K_{\partial\Omega}\mu &= D_{\partial\Omega}\mu|_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

In questo modo  $\Sigma$  e  $K$  portano funzioni su  $\partial\Omega$  in funzioni su  $\partial\Omega$ .

Infine, se non ci saranno ambiguità, ometterò di indicare  $\partial\Omega$ .

Nel paragrafo precedente abbiamo studiato le proprietà del potenziale di volume, ora cominciamo a studiare le proprietà dei potenziali di singolo e doppio strato.

Per  $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$ ,  $S\mu$  e  $D\mu$  sono funzioni  $C^{\infty}$  e hanno laplaciano nullo (cioè sono armoniche). Infatti  $G$  è infinitamente derivabile fuori dalla singolarità, dunque, se  $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$ , si possono derivare  $S\mu$  e  $D\mu$  scambiando l'ordine tra le derivate e l'integrale. Dall'armonicità di  $G$  segue l'armonicità di  $S\mu$  e  $D\mu$  fuori da  $\partial\Omega$ .

### Proposizione 14.2. Prime proprietà degli operatori $\Sigma$ e $K$

*Il nucleo di  $\Sigma$  è  $G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ , ed è sommabile in  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ , e l'integrale del modulo è uniformemente limitato in  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , Inoltre il nucleo è simmetrico nello scambio  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , dunque  $\Sigma$  è simmetrico. Il nucleo di  $K$  è*

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_{n_y} G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{n}_y \cdot \nabla_y G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\mathbf{n}_y \cdot \nabla G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} \mathbf{n}_y \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad (14.4)$$

*ed è sommabile in  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ , e l'integrale è uniformemente limitato in  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ . Sia  $k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ , e sia  $K^*$  il corrispondente operatore integrale (che sarà proprio l'aggiunto di  $K$ ).*

$$k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} \mathbf{n}_x \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{n}_x \cdot \nabla G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \partial_{n_x} G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad (14.5)$$

*ed è sommabile in  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ , e l'integrale del modulo è uniformemente limitato in  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ .*

*Infine  $\Sigma$ ,  $K$  e  $K^*$  sono continui da  $\mathbf{L}^{\infty}(\partial\Omega)$  in sé e da  $L^2(\partial\Omega)$  in sé. Inoltre  $\Sigma$  è autoaggiunto, e  $K^*$  è l'aggiunto di  $K$ .*

Do solo un'idea della dimostrazione, perché dovrò successivamente, mostrare in dettaglio un risultato più sottile. L'idea è che integrare su un bordo regolare è localmente come integrare su un piano, cioè in dimensione 2. La prima asserzione segue facilmente del fatto che il nucleo  $G(\mathbf{x})$  diverge come  $1/|\mathbf{x}|$  che è sommabile anche in due dimensioni, per questo  $\Sigma$  ha nucleo sommabile, e la limitatezza dell'integrale del modulo in  $\mathbf{x}$  segue dalla limitatezza di  $\partial\Omega$ . Il nucleo di  $K$  apparentemente diverge come  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$  che non è sommabile in dimensione 2. Però quando  $\mathbf{y}$  si avvicina a  $\mathbf{x}$ , il vettore  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  tende a un vettore tangente in  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{n}_y$  tende a  $\mathbf{n}_x$  che è normale. Mostriamo che il numeratore si annulla non come  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  ma come  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$ , rendendo sommabile il nucleo. Lo stesso accade per il nucleo di  $K^*$ .

Il fatto che  $\Sigma$ ,  $K$  e  $K^*$  mappino funzioni limitate in funzioni limitate è conseguenza del fatto che l'integrale del modulo dei nuclei è limitato uniformemente in  $\mathbf{x}$ , dunque,  $|\Sigma\mu(\mathbf{x})| \leq c\|\mu\|_\infty$  e lo stesso vale per  $K$  e  $K^*$ . Il fatto che siano continui in  $L^2(\partial\Omega)$  segue dalla stima della norma di un operatore integrale che ho fatto nell'esempio 6.10: la norma si stima integrando il modulo del nucleo in una delle due variabili e considerando il sup nell'altra, e poi prendendo il massimo tra questi due numeri. Consideriamo il caso di  $K$  (gli altri sono analoghi). Ho asserito che

$$\int_{\partial\Omega} |k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \sigma(d\mathbf{y}) \leq c$$

Inoltre

$$\int_{\partial\Omega} |k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \sigma(d\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} |k(\mathbf{y}, \mathbf{x})| \sigma(d\mathbf{y}) \leq c$$

per quanto affermato sul nucleo di  $K^*$ . Dunque  $K$  è limitato in  $L^2(\partial\Omega)$ . La prova per  $\Sigma$  è analoga ma più semplice perché il nucleo è simmetrico.

Scrivo ora due semplici identità nel caso di bordi sferici, che serviranno successivamente. Sia  $B_\varepsilon = B_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon\}$

$$\int_{\partial B_\varepsilon} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sigma(d\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \sigma(d\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 = \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon} \partial_{n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sigma(d\mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sigma(d\mathbf{y}) \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 = -1 \end{aligned}$$

dove ho usato che la normale esterna a  $\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})$  in  $\mathbf{y}$  è  $(\mathbf{y} - \mathbf{x})/|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ . Si noti inoltre che sia  $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  che  $\partial_{n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  hanno segno costante su  $\partial B_\varepsilon$ . Come immediata conseguenza di questi conti espliciti si ottiene il seguente lemma

**Lemma 14.1.** *Sia  $u$  una funzione continua, sia  $\mathbf{x}$  fissato e sia  $B_\varepsilon(\mathbf{x})$  la palla di centro  $\mathbf{x}$  e raggio  $\varepsilon$ . Allora*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_{\partial B_\varepsilon} u(\mathbf{x}) = 0 \tag{14.6}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_{\partial B_\varepsilon} u(\mathbf{x}) = -u(\mathbf{x}) \tag{14.7}$$

Infine, se  $\Omega$  è un dominio con bordo regolare,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_{\partial\Omega \cap \partial B_\varepsilon} u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} u(\mathbf{x}) \tag{14.8}$$

La prima affermazione è immediata (e vale anche in generale per  $u$  limitata). Per la seconda osservo che

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B_\varepsilon} \partial_{n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \sigma(d\mathbf{y}) = \\ & \int_{\partial B_\varepsilon} \partial_{n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \sigma(d\mathbf{y}) + u(\mathbf{x}) \int_{\partial B_\varepsilon} \partial_{n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sigma(d\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Il secondo termine è  $-u(\mathbf{x})$ , mentre il primo tende a zero perché è stimato da

$$\sup_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} |u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| \int_{\partial B_\varepsilon} |k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \sigma(d\mathbf{y}) = \sup_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} |u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})|$$

che tende a 0 in  $\varepsilon$  perché  $u$  è continua (ho usato che il segno del nucleo integrale è costante). Infine, se  $\partial\Omega$  è regolare, non è difficile mostrare che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega \cap \partial B_\varepsilon} \partial_{n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sigma(d\mathbf{y}) = -\frac{1}{2}$$

e procedendo come sopra si ottiene la (14.8)

### **Esercizio 52. Caso bidimensionale e frontiera regolare a tratti**

Mostra che le asserzioni precedenti valgono anche nel caso bidimensionale (anzi sono più semplici perché il nucleo del potenziale di doppio strato è limitato).

Considera  $\Omega$  dominio di  $\mathbb{R}^2$ , con frontiera regolare a tratti. Quanto vale il limite (14.8) se il bordo  $\partial\Omega$  ha un punto angoloso in  $\mathbf{x}$ ? E nel caso di una cuspidè?

## 14.4 Discontinuità dei potenziali singolari

Torniamo ora alla relazione tra potenziali di volume e potenziali di superficie. Definisco

$$V_\Omega f = \int_\Omega G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

potenziale di volume generato da  $f$  ristretta a  $\Omega$ . Come mostrato nel 14.3, si tratta di una funzione  $C^1(\mathbb{R}^3)$  se  $f$  è limitata.

Sia  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ , e sia  $B_\varepsilon$  la palla di centro  $\mathbf{x}$  e raggio  $\varepsilon$ , con  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo per quello che segue, e sia

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon$$

Sia  $u$  una funzione di classe  $C^1(\overline{\Omega})$ . Applico il teorema della divergenza (cioè la I identità di Green) per  $\Delta G(\mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{y})$ : ricordando che il laplaciano di  $G$  è nullo in  $\Omega_\varepsilon$  si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta_y G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \partial_{n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_y G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \nabla u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Il termine di volume ha integrando sommabile ovunque ed è

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla G_y(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \nabla u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_\Omega \nabla G_y(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \nabla u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\Omega \cap B_\varepsilon} \nabla G_y(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \nabla u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

e quindi per  $\varepsilon \rightarrow 0$  tende alla funzione

$$F_u(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \nabla u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

Per il teorema 14.3, si tratta di una funzione in  $C(\mathbb{R}^3)$ .

Per calcolare il limite del termine di bordo devo distinguere i tre casi.

**Caso**  $x \in \Omega$ . Scelgo  $\varepsilon$  piccolo in modo che  $\overline{B_\varepsilon}$  sia dentro  $\Omega$ . In tal modo, il bordo di  $\partial\Omega_\varepsilon$  è fatto dei due bordi disgiunti  $\partial\Omega$  e  $\partial B_\varepsilon$ . Il termine di bordo è dunque

$$D_{\partial\Omega}u(\mathbf{x}) - D_{\partial B_\varepsilon}(\mathbf{x})$$

dove il segno  $-$  è dovuto al fatto che la normale esterna a  $\Omega_\varepsilon$  su  $\partial B_\varepsilon$  è opposta alla normale esterna a  $\partial B_\varepsilon$ . Usando la (14.7) ho che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_{\partial B_\varepsilon}(\mathbf{x}) = -u(\mathbf{x})$$

**Caso**  $\mathbf{x} \notin \overline{\Omega}$ . In questo caso  $\Omega = \Omega_\varepsilon$ , e dunque

$$D_{\Omega_\varepsilon}u = D_{\Omega}u$$

**Caso**  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ . Si ha  $\partial\Omega_\varepsilon = (\partial\Omega \cap B_\varepsilon^c) \cup (\partial B_\varepsilon \cap \Omega)$ . Dunque

$$D_{\partial\Omega_\varepsilon}u = D_{\partial\Omega \cap B_\varepsilon^c}u - D_{\partial B_\varepsilon \cap \Omega}u$$

dove di nuovo il segno meno è dovuto al fatto che nel secondo termine uso la normale esterna a  $B_\varepsilon$ . Per sommabilità del nucleo, il primo termine tende a  $Ku(\mathbf{x})$ . Usando la (14.8) ho che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_{\partial B_\varepsilon \cap \Omega}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}u(\mathbf{x})$$

Mettendo insieme i tre casi abbiamo ottenuto che

$$\begin{cases} Du(\mathbf{x}) = -u(\mathbf{x}) + F_u(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \\ Ku(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}u(\mathbf{x}) + F_u(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ Du(\mathbf{x}) = F_u(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

Come immediata conseguenza si ottiene

**Teorema 14.8. Discontinuità di  $D$  - caso  $C^1$**

Sia  $\mu \in C^1(\partial\Omega)$ , e sia  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ . Allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0^\pm} D\mu(\mathbf{x}) = \pm \frac{1}{2}u(\mathbf{x}_0) + K\mu(\mathbf{x}_0)$$

dove con  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0^-$  intendo il limite con  $\mathbf{x} \in \Omega$ , con  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0^+$  intendo il limite con  $\mathbf{x} \notin \overline{\Omega}$ .

D'ora in poi chiamerò  $D^\pm$  gli operatori  $D^\pm u = \pm u/2 + K\mu$ .

*Dimostrazione.* Se  $\partial\Omega$  ha bordo regolare, la funzione  $\mu \in C^1(\partial\Omega)$  si prolunga a una funzione  $u_\mu \in C^1(\bar{\Omega})$ . Poiché  $Du$  dipende solo dal valore di  $u$  al bordo,  $Du = D\mu$ . Usando il teorema precedente, si ha

$$\begin{cases} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0^-} D\mu(\mathbf{x}_0) = -\mu(\mathbf{x}_0) + F_{u_\mu}(\mathbf{x}_0) \\ K\mu(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}_0) + F_{u_\mu}(\mathbf{x}_0) \\ D^+\mu(\mathbf{x}) = F_{u_\mu}(\mathbf{x}_0) \end{cases}$$

La tesi si ottiene ricavando  $F_{u_\mu}(\mathbf{x}_0)$  dalla seconda uguaglianza e inserendo il valore trovato nelle altre due. Noto che da queste espressioni si ottiene anche che  $D^\pm\mu$  sono funzioni continue su  $\partial\Omega$ , dunque  $K\mu$  è continua su  $\partial\Omega$  perché  $\mu$  è continua.

Completo la prova della III identità di Green. Sia ora  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ . Integro per parti (cioè con il teorema della divergenza)  $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})$

$$\begin{aligned} V_\Omega \Delta u(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega_\varepsilon} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_n u(\mathbf{y}) \sigma(d\mathbf{y}) - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \nabla u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Questa volta i termini di bordo sono potenziali di singolo strato con densità superficiale di carica data da  $\partial_n u$ . Per passare al limite si procede ora esattamente come abbiamo già fatto, ma tutti gli integrali su  $\partial B_\varepsilon \cap \Omega$  questa volta vanno a zero, come segue dalla (14.6). Dunque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_n u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = S\mu(\mathbf{x})$$

Quindi

$$V_\Omega \Delta u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = S \partial_n u(\mathbf{x}) + F_u(\mathbf{x})$$

dove  $F_u(\mathbf{x})$  è esattamente la funzione che abbiamo definito prima. Ricavando  $F_u(\mathbf{x})$  da questa identità e inserendo il suo valore nelle identità precedenti otteniamo il seguente teorema.

### **Teorema 14.9. III identità di Green**

Sia  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ . Si ha

$$\begin{cases} -u(\mathbf{x}) - V_\Omega \Delta u(\mathbf{x}) = Du(\mathbf{x}) - S \partial_n u(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \\ -\frac{1}{2}u(\mathbf{x}) - V_\Omega \Delta u(\mathbf{x}) = Ku(\mathbf{x}) - \Sigma \partial_n u(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -V_\Omega \Delta u(\mathbf{x}) = Du(\mathbf{x}) - S \partial_n u(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \notin \bar{\Omega} \end{cases}$$

Un caso particolare di questo teorema si ottiene scegliendo  $u \equiv 1$ ,

### **Teorema 14.10. Lemma di Gauss**

Sia  $\partial\Omega$  regolare. Allora

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sigma(d\mathbf{y}) = \begin{cases} -1 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \\ -\frac{1}{2} & \text{se } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin \bar{\Omega} \end{cases}$$

**Teorema 14.11. Discontinuità di  $\partial_n S$  - caso  $C^1$**

Sia  $\mu \in C^1(\partial\Omega)$ . Allora  $S\mu(\mathbf{x})$  è una funzione continua su  $\mathbb{R}^3$ . Inoltre  $\nabla S\mu \in C^1(\overline{\Omega})$  nel senso che  $\nabla S\mu$  si prolunga con continuità fino al bordo. Nello stesso senso  $\nabla S\mu \in C^1(\Omega^c)$  è prolungabile con continuità fino al bordo<sup>4</sup>

Sia  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ , indicando con  $\nabla^\pm S$  i prolungamenti da dentro e da fuori, e indicando in particolare con  $\partial_n^\pm S$  le componenti normali, si ha

$$\partial_n^\pm S\mu(\mathbf{x}_0) = \mp \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}_0) + K^*\mu(\mathbf{x}_0)$$

dove  $K^*$  è l'aggiunto dell'operatore  $K$ . Invece le componenti tangenti di  $\nabla^\pm S\mu$  sono uguali.

*Dimostrazione.* Per prima cosa dimostro la regolarità di  $S\mu$ . Poiché  $\mu \in C^1(\partial\Omega)$ , ed assumendo  $\partial\Omega$  regolare, si può costruire una funzione  $u_\mu$  di classe  $C^2(\mathbb{R}^3)$  tale che  $\partial_n u_\mu = \mu$  sul bordo di  $\Omega$ , e  $u_\mu$  sia nulla sul bordo di  $\Omega^c$ . Con questa scelta di  $u_\mu$ , nella III formula di Green sparisce il termine di doppio strato. Ricordando che  $V_\Omega \Delta u_\mu$  è di classe  $C^1(\mathbb{R}^3)$  e che  $u$  è nulla al bordo, ottengo immediatamente che  $S\mu$  è una funzione continua ovunque. Inoltre posso calcolare il gradiente per  $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$ :

$$\begin{cases} -\nabla u_\mu(\mathbf{x}) - \nabla V_\Omega \Delta u_\mu(\mathbf{x}) = -\nabla S \partial_n u_\mu(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \\ -\nabla V_\Omega \Delta u_\mu(\mathbf{x}) = -\nabla S \partial_n u_\mu(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

I membri di sinistra sono funzioni continue fino al bordo, e dunque  $\nabla S\mu$  è ben definito e continuo fino al bordo, sia da dentro sia da fuori. Sia ora  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  e  $\tau$  un vettore tangente a  $\partial\Omega$  in  $\mathbf{x}_0$ . Poiché  $u_\mu$  è costante sul bordo (vale zero), si ha che

$$\tau \cdot \nabla u_\mu(\mathbf{x}_0) = 0$$

Dunque le componenti tangenti da dentro e da fuori sono uguali. Se invece  $\mathbf{n}$  è la normale esterna in  $\mathbf{x}_0$ , moltiplicando per  $\mathbf{n}$  e sottraendo le due identità si ottiene

$$\partial_n^+ S\mu - \partial_n^- S\mu = -\partial_n u(\mathbf{x}_0) = -\mu(\mathbf{x}_0)$$

che prova la discontinuità della derivata normale.

Rimane da trovare il valore di queste derivate normali. Sia  $\varphi$  una qualunque funzione  $C^2$ . Calcoliamo il valore di  $\int_\Omega \Delta \varphi S\mu$ . Poiché  $S\mu$  è armonica in  $\Omega$  ed è  $C^1$  fino al bordo, posso applicare la II formula di Green

$$\int_\Omega \Delta \varphi S\mu = \int_\Omega (\Delta \varphi S\mu - \varphi \Delta S\mu) = \int_{\partial\Omega} \partial_n \varphi S\mu - \int_{\partial\Omega} \varphi \partial_n S^- \mu$$

(ho scritto  $\partial_n S^-$  perché, integrando su  $\Omega$ , sto usando il prolungamento  $C^1$  interno di  $S\mu$ ). D'altra parte

$$\int_\Omega \Delta \varphi S\mu = \int_\Omega d\mathbf{y} \Delta \varphi(\mathbf{y}) \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mu(\mathbf{x}) \sigma(d\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \sigma(d\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) \int_\Omega \Delta \varphi(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

<sup>4</sup>Ricordo che la chiusura del complementare di  $\overline{\Omega}$  è esattamente  $\Omega^c$ .

<sup>5</sup>Per dare un'idea considero il caso piano con bordo piatto, in cui  $\Omega = \{(x, y) | y > 0\}$ , e  $\mu(x)$  è una funzione  $C^1(\mathbb{R})$ . La scelta  $u(x, y) = y\mu(x)$  soddisfa le due condizioni al bordo, ma ha la stessa regolarità di  $\mu$ . Per guadagnare la regolarità  $C^2$  si deve regolarizzare in  $x$ , appena  $y > 0$ . Una possibile scelta è  $u(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} u(z) dz/2$ . Dettagli al lettore.

dove ho usato che  $G$  è pari e è sommabile sul bordo, dunque posso scambiare gli ordini di integrazione. L'ultimo integrale in  $dy$  è  $V_\Omega \Delta \varphi$  calcolato su  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ . Usando la III identità di Green per i punti sul bordo ho che

$$-\frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x}) - V_\Omega \Delta \varphi(\mathbf{x}) = K\varphi(\mathbf{x}) - \Sigma \partial_n \varphi(\mathbf{x})$$

Indico con  $(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega}$  il prodotto  $L^2$  su  $\partial\Omega$ . Mettendo insieme le uguaglianze precedenti si ottiene

$$(\partial_n \varphi, \Sigma \mu)_{\partial\Omega} - (\varphi, \partial_n S^- \mu)_{\partial\Omega} = -(\mu, K\varphi)_{\partial\Omega} + (\mu, \Sigma \partial_n \varphi)_{\partial\Omega} - \frac{1}{2}(\mu, \varphi)_{\partial\Omega}$$

Ma  $\Sigma$  è autoaggiunto, e l'aggiunto di  $K$  è  $K^*$ , dunque per ogni  $\varphi$

$$(\varphi, \partial_n S^- \mu)_{\partial\Omega} = \frac{1}{2}(\mu, \varphi)_{\partial\Omega} + (K^* \mu, \varphi)_{\partial\Omega}$$

Siccome le funzioni di classe  $C^2$  sul bordo sono dense in  $L^2(\partial\Omega)$  e sono prolungabili a funzioni  $C^2(\mathbb{R}^3)$ , ne segue che

$$\partial_n S^- \mu = \frac{1}{2}\mu + K^* \mu$$

quasi ovunque su  $\partial\Omega$ . Ma poiché  $\partial_n S^-$  e  $\mu$  sono continue,  $K^* \mu$  coincide quasi ovunque con una funzione continua (mostreremo successivamente che  $K^* \mu$  è continua).

Usando l'uguaglianza appena trovata e l'espressione del salto tra  $\partial_n S^+$  e  $\partial_n S^-$  si ottiene anche che

$$\partial_n S^+ \mu = -\frac{1}{2}\mu + K^* \mu$$

□

Infine, analizzo la regolarità del potenziale di doppio strato.

**Teorema 14.12. Continuità di  $\partial_n D$  - caso  $C^2$**

Sia  $\mu \in C^1(\partial\Omega)$ . Allora  $D$  è di classe  $C^1(\bar{\Omega})$  ed è di classe  $C^1(\Omega^c)$ , nel senso che  $\nabla D$  si prolunga al bordo con continuità sia da dentro che da fuori.

Sia  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ . Si ha

$$\partial_n D^+ \mu(\mathbf{x}_0) = \partial_n D^- \mu(\mathbf{x}_0)$$

*Dimostrazione.* Sia  $\mu \in C^1(\partial\Omega)$ . Se  $\partial\Omega$  è regolare,  $\mu$  si prolunga a una funzione  $u_\mu$  di classe  $C^2(\mathbb{R}^3)$  tale che  $\partial_n u_\mu = 0$  su  $\partial\Omega$ <sup>6</sup>. In questo caso nella III identità di Green il termine di singolo strato  $S \partial_n u_\mu$  è nullo. Dunque, calcolando i gradienti si ha

$$\begin{cases} -\nabla u_\mu(\mathbf{x}) - \nabla V_\Omega \Delta u_\mu(\mathbf{x}) = \nabla D\mu(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \\ -\nabla V_\Omega \Delta u_\mu(\mathbf{x}) = \nabla D\mu(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \notin \bar{\Omega} \end{cases}$$

Da queste uguaglianze segue immediatamente la prolungabilità con continuità da dentro e da fuori di  $\nabla D$ . Inoltre, poiché  $\partial_n u_\mu$  è zero, è immediata anche la continuità delle derivate normali di  $D\mu$ . In generale, invece, le componenti tangenti di  $\nabla D^\pm$  saranno differenti.

<sup>6</sup>Per dare un'idea, nel caso bidimensionale, se  $\mu(x)$  è  $C^1(\mathbb{R})$ , si provi che  $u(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \mu(z) dz / (2y)$  è in  $C^2(\mathbb{R}^2)$ , vale  $\mu$  per  $x = 0$ , e ha derivata in  $y$  nulla per  $x = 0$ .



## 14.5 L'operatore $K$

Nel paragrafo precedente, abbiamo analizzato le discontinuità di  $\partial_n S\mu$  e  $D\mu$  sotto l'ipotesi  $\mu \in C^1$ . Dobbiamo estendere questi risultati al caso  $\mu \in C^0$ , e analizzare con maggiore dettaglio gli operatori  $K$  e  $K^*$ .

Per questi scopi è necessario essere più specifici sulla regolarità del bordo  $\Omega$ . Si possono dare varie definizioni, più o meno equivalenti di frontiera regolare. Quella che userò qui mi permetterà usare coordinate locali intorno ai punti della frontiera.

Comincio con il definire l'intorno cilindrico dell'origine. Considero come coordinate in  $\mathbb{R}^3$  la coppia  $(\mathbf{w}, z)$ , con  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ . Considero il cilindro di raggio  $\delta$  e altezza  $2\delta$

$$C_\delta = \{(\mathbf{w}, z) \mid |\mathbf{w}| \leq \delta, |z| \leq \delta\} = B_\delta^2 \times [-\delta, \delta]$$

dove  $B_\delta^2$  è la palla bidimensionale di centro  $\mathbf{0}$  e raggio  $\delta$ . L'ipotesi di regolarità per  $\partial\Omega$  che assumo è la seguente: esiste  $\delta_0 > 0$  tale che per ogni  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , esiste una funzione  $\Phi : B_{\delta_0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ , e un sistema di coordinate ortogonali  $(\mathbf{w}, z)$  centrato in  $\mathbf{x}$  tali che

$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap C_{\delta_0}(\mathbf{x}) &= \{(\mathbf{w}, \Phi(\mathbf{w})) : |\mathbf{w}| \leq \delta_0\} \\ \Omega \cap C_{\delta_0}(\mathbf{x}) &= \{(\mathbf{w}, z) : |\mathbf{w}| \leq \delta_0, z < \Phi(\mathbf{w})\} \end{aligned}$$

dove  $C_{\delta_0}(\mathbf{x})$  è l'intorno cilindrico traslato in  $\mathbf{x}$  e ruotato in modo che la normale esterna sia l'asse del cilindro, con questa scelta  $\nabla\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Questa lunga ipotesi vuol dire che dato  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  in un intorno di  $\mathbf{x}$  la frontiera  $\partial\Omega$  è il grafico di una funzione definita sul piano tangente a  $\partial\Omega$  in  $\mathbf{x}$ . Inoltre  $\mathbf{w}$  è la coordinata sul piano tangente e  $z$  la coordinata normale.

La funzione  $\Phi(\mathbf{w})$  andrebbe scritta come  $\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{w})$  perché ovviamente dipende da  $\mathbf{x}$ , ma userò il sottoindice solo se necessario. Per l'ipotesi che l'asse  $z$  sia la normale esterna, la funzione  $\Psi$  deve avere gradiente nullo in  $\mathbf{w} = 0$ , dunque

$$\begin{aligned} |\nabla\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{w})| &\leq c|\mathbf{w}| \\ |\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{w})| &\leq c|\mathbf{w}|^2 \end{aligned}$$

Assumo inoltre che le costanti possono essere scelte indipendentemente da  $\mathbf{x}$ .

Come conseguenza delle ipotesi fatte, se la distanza di  $\mathbf{x}$  da  $\partial\Omega$  è minore o uguale a  $\delta_0/2$ , allora esiste un solo  $\mathbf{x}_p \in \partial\Omega$  tale che

$$\min_{\mathbf{z} \in \partial\Omega} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|$$

Chiamerò  $\mathbf{x}_p$  "proiezione" di  $\mathbf{x}$  su  $\partial\Omega$ , e se necessario ricorderà che  $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p(\mathbf{x})$ .

Studio ora gli operatori  $\Sigma$  e  $K$ . Fisso alcune notazioni. Dato  $\mathbf{x}$  a distanza inferiore a  $\delta_0/2$  da  $\partial\Omega$  e  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ :

$$\begin{aligned} G_\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x}_p(\mathbf{x}))\} \\ G_\delta^c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathcal{X}\{\mathbf{y} \notin C_\delta(\mathbf{x}_p(\mathbf{x}))\} \end{aligned}$$

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_{n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \mathbf{n}_y \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

$$k_\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x}_p(\mathbf{x}))\}$$

$$k_\delta^c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{X}\{\mathbf{y} \notin C_\delta(\mathbf{x}_p(\mathbf{x}))\}$$

Naturalmente  $G = G_\delta + G_\delta^c$  e  $k = k_\delta + k_\delta^c$ . Noto che se  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ,  $\mathbf{x}_p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . In accordo con queste decomposizioni dei nuclei, definisco gli operatori lineari  $\Sigma_\delta, \Sigma_\delta^c, K_\delta, K_\delta^c$ , con

$$\begin{aligned}\Sigma\mu &= \Sigma_\delta\mu + \Sigma_\delta^c\mu \\ K\mu &= K_\delta\mu + K_\delta^c\mu\end{aligned}$$

Nello stesso modo definirò le decomposizioni del nucleo  $k^*$  e dunque dell'operatore  $K^*$  (si noti però che mentre  $k^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,  $k_\delta^*$  non è  $k_\delta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ , perché la funzione caratteristica non è invariante nello scambio  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ).

**Proposizione 14.3. Proprietà di  $k$**

Se  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$

$$k_\delta^c \leq \frac{c}{\delta^2} \quad (14.9)$$

$$\int_{\partial\Omega} |k_\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \sigma(d\mathbf{y}) \leq c\delta \quad (14.10)$$

Le stesse stime valgono per  $k_\delta^*$  e  $k_\delta^{*c}$ .

La prima asserzione è una semplice conseguenza del fatto che  $|k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq c/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$  e del fatto che se  $\mathbf{y} \notin C_\delta(\mathbf{x})$  allora  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq 1/\delta$ . Per dimostrare la seconda faccio l'integrale in coordinate locali, per cui è necessario calcolare  $\sigma(d\mathbf{y})$ . A questo scopo, derivando  $\Phi$  si ottengono i vettori tangenti alla superficie

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \partial_{w_1} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \Phi(\mathbf{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 \Phi \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \partial_{w_2} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \Phi(\mathbf{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 \Phi \end{pmatrix}$$

Il prodotto vettoriale tra i due vettori tangenti è

$$\boldsymbol{\xi}_1 \wedge \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -\partial_{w_1} \Phi \\ -\partial_{w_2} \Phi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\sigma(d\mathbf{y}) = |\boldsymbol{\xi}_1 \wedge \boldsymbol{\xi}_2| d\mathbf{w} = \sqrt{1 + |\nabla\Phi|^2} d\mathbf{w}$$

e la normale esterna in  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \Phi(\mathbf{w}))$  è

$$\mathbf{n}_y = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\Phi|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla\Phi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Infine noto che in coordinate locali  $\mathbf{x}$  è il vettore nullo, dunque

$$\mathbf{n}_y \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sigma(d\mathbf{y}) = (\mathbf{w} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{w}) - \Phi(\mathbf{w})) d\mathbf{w}$$

Poiché la normale in  $\mathbf{x}$  è il versore dell'asse  $z$ ,

$$\mathbf{n}_x \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sigma(d\mathbf{y}) = -\Phi(\mathbf{w}) \sqrt{1 + |\nabla\Phi(\mathbf{w})|^2} d\mathbf{w}$$

Per le ipotesi che abbiamo fatto su  $\Phi$ , si ottiene facilmente che

$$|\mathbf{w} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{w}) - \Phi(\mathbf{w})| \leq c|\mathbf{w}|^2$$

Ora posso procedere nella stima dell'integrale

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |k_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \sigma(d\mathbf{y}) &\leq c \int_{B_\delta^2} \frac{|\mathbf{w}|^2}{(|\mathbf{w}|^2 + |\Phi^2(\mathbf{w})|)^{3/2}} d\mathbf{w} \\ &\leq c \int_{B_\delta^2} \frac{1}{|\mathbf{w}|} d\mathbf{w} = c\delta \end{aligned} \quad (14.11)$$

dove nella seconda disuguaglianza ho usato che  $|\mathbf{w}|^2 + \Phi(\mathbf{w})^2 \geq |\mathbf{w}|^2$  e l'ultima uguaglianza si ottiene calcolando l'integrale in  $B_\delta^2$  in coordinate polari.

La proposizione appena dimostrata permette di analizzare l'operatore  $K$ . Metto insieme tutti i risultati nel prossimo teorema, che in pratica è un lungo esercizio sugli operatori integrali.

**Teorema 14.13. Proprietà dell'operatore  $K$**

1.  $\|K_\delta\mu\|_\infty \leq c\delta\|\mu\|_\infty$ ,  $\|K_\delta^c\mu\|_\infty \leq c\|\mu\|_\infty/\delta^2$ ,
2.  $K$  è un operatore lineare continuo su  $L^\infty(\partial\Omega)$ .
3. Se  $\mu$  è limitata allora  $K\mu(\mathbf{x})$  è continua in  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ .
4.  $\|K_\delta\mu\|_2 \leq c\delta\|\mu\|_2$ ,  $\|K_\delta^c\mu\|_2 \leq c\|\mu\|_2/\delta^2$
5.  $K$  è un operatore compatto da  $L^2(\partial\Omega)$  in sé.
6. Sia  $f \in C^0(\partial\Omega)$ , Se  $\mu \in L^2(\partial\Omega)$  risolve

$$\lambda\mu - K\mu = f$$

per  $\lambda$  non nullo, allora  $\mu$  è continua.

7. Gli stessi risultati valgono per l'operatore  $K^*$ .

*Dimostrazione di (1) e (2)*

La (1) segue immediatamente dalle stime su  $k_\delta$  e  $k_\delta^c$  in (14.10) e (14.9), e della limitatezza della misura della superficie  $\partial\Omega$ . La (2) è immediata conseguenza della (1).

*Dimostrazione di (3)*

Per provare la continuità della funzione  $K\mu(\mathbf{x})$  mostro prima che se  $\mu$  è limitata allora  $K_\delta^c\mu(\mathbf{x})$  è una funzione continua. Infatti  $k_\delta^c$  è limitata e se  $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}$

$$\mathcal{X}\{y \in C_\delta(\mathbf{x}')\} \rightarrow \mathcal{X}\{y \in C_\delta(\mathbf{x})\}$$

per ogni  $\mathbf{y}$  tranne quelli al bordo di  $C_\delta(\mathbf{x})$  che ha però misura nulla in  $\partial\Omega$ . Dunque se  $\mu$  è limitata, per convergenza dominata

$$K_\delta^c\mu(\mathbf{x}') \rightarrow K_\delta^c\mu(\mathbf{x})$$

Poiché  $K_\delta^c\mu$  è continua e la differenza tra  $K\mu$  e  $K_\delta^c\mu$  è stimata da  $c\delta\|\mu\|_\infty$ ,  $K\mu$  è limite uniforme di funzioni continue, dunque è continuo, e in questo modo abbiamo provato la (3).

*Dimostrazione di (4)*

La stima di  $|k_\delta^c|$  segue immediatamente dalla (14.9) e dal fatto che  $\partial\Omega$  ha misura limitata.

Per stimare la norma  $L^2$  di  $K_\delta$  uso come sempre la stima degli integrali del nucleo nelle due variabili (vedi l'esempio 6.10), cioè

$$\sup_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x})\} \sigma(d\mathbf{y}) \quad \text{e} \quad \sup_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x})\} \sigma(d\mathbf{x})$$

Abbiamo stimato il primo termine nella (14.10). Il secondo integrale è nella variabile  $\mathbf{x}$ , e non in  $\mathbf{y}$ , dunque serve un minimo di lavoro. È abbastanza facile convincersi che esiste una costante  $c$  che si può scegliere  $c$  indipendente da  $\delta$  tale che<sup>7</sup>

$$\mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x})\} \leq \mathcal{X}\{\mathbf{x} \in C_{c\delta}(\mathbf{y})\}$$

Dunque, a patto di prendere  $\delta$  tale che  $c\delta < \delta_0$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x})\} \sigma(d\mathbf{x}) &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \mathcal{X}\{\mathbf{x} \in C_{c\delta}(\mathbf{y})\} \sigma(d\mathbf{x}) \\ &= \sup_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |k(\mathbf{y}, \mathbf{x})| \mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_{c\delta}(\mathbf{x})\} \sigma(d\mathbf{y}) \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza ho scambiato i nomi di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . L'ultimo integrale si stima con  $c\delta$ , in modo analogo alla prova della (14.10).

*Dimostrazione di (5)*

Per il punto (4), il nucleo degli operatori  $K_\delta^c$  è limitato, dunque è in  $L^2$  nella coppia di variabili, quindi  $K_\delta^c$  sono operatori compatti. Sempre per il punto (4),  $K$  è limite in norma degli operatori  $K_\delta^c$  e dunque è compatto.

*Dimostrazione di (6)*

Sia  $\lambda \neq 0$ , sia  $f$  continua su  $\partial\Omega$ , e sia  $\mu \in L^2(\partial\Omega)$  tale che

$$\lambda\mu - K\mu = (\lambda\mu - K_\delta\mu) - K_\delta^c\mu = f$$

Comincio con il provare che  $\mu$  è limitata. Sia  $\delta$  sufficientemente piccolo tale che

$$\|K_\delta\|_2/|\lambda|, \|K_\delta\|_\infty/|\lambda| \leq \eta < 1$$

L'operatore  $\mathbf{I} - K_\delta/\lambda$  si inverte dunque in serie di Neumann sia in  $L^2$  che in  $L^\infty$ , dunque

$$\lambda\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{1}{\lambda} K_\delta \mu \right)^n (f + K_\delta^c \mu)$$

<sup>7</sup>Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \partial\Omega$ , e a distanza inferiore a  $\delta < \delta_0$ . Allora  $\mathbf{x} \in C_\delta(\mathbf{y})$  e  $\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x})$ . Nelle coordinate locali intorno a  $\mathbf{x}$  si ha  $\mathbf{y} = (\mathbf{w}_y, \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{w}_y))$ , e in quelle locali intorno a  $\mathbf{y}$  si ha  $\mathbf{x} = (\mathbf{w}_x, \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{w}_x))$ , per opportuni  $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y \in C_\delta$ . Per il teorema di Pitagora:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{w}_y|^2 + |\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{w}_y)|^2 = |\mathbf{w}_x|^2 + |\Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{w}_x)|^2$$

Poiché  $|\Phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})| \leq c|\mathbf{w}|^2 \leq c\delta|\mathbf{w}|$  uniformemente in  $\mathbf{z} \in \partial\Omega$ , si ha

$$|\mathbf{w}_x|^2 \leq |\mathbf{w}_y|^2 \frac{1 + c\delta}{1 - c\delta}$$

Dunque scegliendo  $c_\delta^2 = (1 + c\delta)/(1 - c\delta)$ . e scegliendo  $\delta$  piccolo in modo che  $c_\delta \delta < \delta_0$ , si ha

$$\mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x})\} = \mathcal{X}\{|\mathbf{w}_y| < \delta\} \leq \mathcal{X}\{|\mathbf{w}_x| < c_\delta \delta\} = \mathcal{X}\{\mathbf{x} \in C_{c_\delta \delta}(\mathbf{y})\}$$

Si noti che  $c_\delta$  tende a 1 per  $\delta \rightarrow 0$ .

Inoltre, poiché il nucleo di  $K_\delta^c$  è limitato da  $1/\delta^2$ , usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si ha

$$\|K_\delta^c \mu\|_\infty \leq \frac{c}{\delta^2} \int_{\partial\Omega} |\mu(\mathbf{y})| \sigma(d\mathbf{y}) \leq \frac{c}{\delta^2} \|\mu\|_2$$

e quindi la funzione  $f + K_\delta^c \mu$  è limitata. Poiché la serie di Neumann converge anche in norma  $L^\infty$  si ottiene che  $\lambda\mu$  è una funzione limitata. La prova si conclude usando il fatto che, per il punto (3), poiché  $\mu$  è limitata,  $K\mu$  è continua e dunque  $\lambda\mu$  è continua perché è somma di funzioni continue.

*Dimostrazione del punto (7)*

Esercizio.

Procedendo come nella dimostrazione precedente, è facile studiare  $S$  e  $\Sigma$ .

**Proposizione 14.4. Proprietà di  $S$  e  $\Sigma$**

1. Sia  $\mathbf{x}$  a distanza inferiore a  $\delta_0/2$  da  $\partial\Omega$ , allora

$$\int_{\partial\Omega} |G_\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \sigma(d\mathbf{y}) \leq c\delta$$

2. Se  $\mu$  è limitata, la funzione  $S\mu$  è continua su tutto  $\mathbb{R}^3$ , e  $\|S\mu\|_\infty \leq c\|\mu\|_\infty$

3.  $\Sigma$  è compatto da  $L^2(\partial\Omega)$  in sé

Rispetto all'analogo conto fatto per  $k_\delta$ , poiché  $\mathbf{x}$  può non essere sulla frontiera, in coordinate locali,  $x = (0, z)$ . Dunque

$$\int_{\partial\Omega} |G_\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \sigma(d\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_\delta^2} \sqrt{1 + |\nabla\Psi(\mathbf{w})|^2} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{w}^2 + (z - \Psi(\mathbf{w}))^2}} d\mathbf{w}$$

L'integrando si stima con  $c/|\mathbf{w}|$ , che sommato in  $d\mathbf{w}$  dà  $c\delta$ . Lascio al lettore il resto della dimostrazione.

È importante però notare una differenza con il teorema precedente: la stima del nucleo integrale  $G_\delta$  vale anche se  $\mathbf{x}$  non è su  $\partial\Omega$ . Sottolineo invece che la stima integrale per  $k_\delta$  che abbiamo fatto vale solo per  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , e non può valere per  $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$ , altrimenti potremmo provare che  $D\mu$  è continuo, mentre sappiamo che non lo è. L'ultima stima necessaria è proprio quella del nucleo integrale  $k_\delta$  per  $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$ . ed è la più delicata.

**Proposizione 14.5. Limitatezza integrale del nucleo  $k$**

Sia  $\mathbf{x}$  a a distanza  $z$  da  $\partial\Omega$ , con  $|z| \leq \delta_0$  e sia  $\mathbf{x}_p(\mathbf{x}) \in \partial\Omega$  il punto di minima distanza. Allora esiste una costante  $\bar{c}$  indipendente da  $\mathbf{x}$  e da  $\delta$  tale che

$$\int_{\partial\Omega} |k_\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \sigma(d\mathbf{y}) \leq \bar{c}$$

La stessa proprietà vale per  $k_\delta^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

*Dimostrazione.* Passo in coordinate locali, notando che questa volta  $\mathbf{x}$  è il vettore  $(\mathbf{0}, z)$ , dove  $|z|$  è la distanza di  $\mathbf{x}$  dal bordo. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |k_\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \sigma(y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{B_\delta^2} \frac{|(z - \Phi(\mathbf{w})) + \mathbf{w} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{w})|}{(|\mathbf{w}|^2 + |z - \Phi(\mathbf{w})|^2)^{3/2}} d\mathbf{w} \\ &\leq c \int_{B_\delta^2} \frac{|z|}{(|\mathbf{w}|^2 + |z - \Phi(\mathbf{w})|^2)^{3/2}} d\mathbf{w} + c \int_{B_\delta^2} \frac{|-\Phi(\mathbf{w})| + \mathbf{w} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{w})|}{(|\mathbf{w}|^2 + |z - \Phi(\mathbf{w})|^2)^{3/2}} d\mathbf{w} \end{aligned}$$

Il secondo termine si stima, come abbiamo già fatto, usando che  $|\Phi(\mathbf{w})| \leq c|\mathbf{w}|^2$ ,  $|\nabla\Phi(\mathbf{w})| \leq c|\mathbf{w}|$  e stimando il denominatore dal basso con  $|\mathbf{w}|^3$ :

$$\frac{|-\Phi(\mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{w})|}{(|\mathbf{w}|^2 + |z - \Phi(\mathbf{w})|^2)^{3/2}} \leq c \frac{|\mathbf{w}|^2}{|\mathbf{w}|^3} = c \frac{1}{|\mathbf{w}|}$$

che integrato su  $B_\delta^2$  dà  $c\delta$ .

L'altro termine è un po' più delicato. Distinguo due casi:

$|z| \leq 2|\Phi(\mathbf{w})|$ : in questo caso procedo esattamente come prima perché ho  $|z| \leq c|\mathbf{w}|^2$ , e dunque ottengo un ulteriore contributo  $c\delta$ .

$|z| \geq 2|\Phi(\mathbf{w})|$ : in questo caso

$$|z - \Phi(\mathbf{w})| \geq |z| - |\Phi(\mathbf{w})| \geq |z| - |z|/2 = |z|/2$$

Dunque il termine è stimato da

$$\int_{B_\delta^2} \frac{|z|}{(|\mathbf{w}|^2 + z^2/4)^{3/2}} d\mathbf{w} = 2\pi|z| \int_0^\delta \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2/4)^{3/2}} = \frac{2}{3}\pi|z| \left( \frac{2}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + z^2/4}} \right) \leq \frac{4}{3}\pi$$

□

Concludo con una osservazione sul termine in  $|z|$  che è stimato, a meno di costanti, da

$$1 - \frac{|z|}{\sqrt{4\delta^2 + z^2}}$$

Si noti che questa funzione tende a zero in  $\delta$ , a  $z$  fissato, ma tende a 1 in  $z$  a  $\delta$  fissato. Dunque l'integrale non va a 0 in  $\delta$  uniformemente in  $\mathbf{x}$  (come invece accade per il nucleo di singolo strato). Questa differenza è dovuta al fatto che quando  $\mathbf{x} \rightarrow x_0^- \in \partial\Omega$  l'operatore  $D$  "tende" a  $K - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/2$  il cui integrale su  $C_\delta(\mathbf{x}_0)$  non può essere infinitesimo in  $\delta$ .

**Teorema 14.14. Discontinuità di  $D\mu$  - caso  $C^0(\partial\Omega)$**

Sia  $\mu \in C^0(\partial\Omega)$  e sia  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ . Allora

$$D^\pm\mu(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}_0) + K\mu(\mathbf{x}_0)$$

Inoltre  $D\mu$  prolungata in questo modo da dentro e da fuori è continua su  $\bar{\Omega}$  e su  $\Omega^c$  rispettivamente.

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$  a distanza inferiore a  $\delta_0$ , e sia  $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p(\mathbf{x})$  la sua proiezione su  $\partial\Omega$ . Sommando e sottraendo  $k(\mathbf{x}_p, \mathbf{y})$  si ha

$$D\mu(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} (k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - k(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}))\mu(\mathbf{y})\sigma(d\mathbf{y}) + K\mu(\mathbf{x}_p)$$

Ora sommo e sottraggo  $\mu(\mathbf{x}_p)$  nell'integrale:

$$D\mu(\mathbf{x}) - K\mu(\mathbf{x}_p) = \int_{\partial\Omega} (k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - k(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}))(\mu(\mathbf{y}) - \mu(\mathbf{x}_p))\sigma(d\mathbf{y}) + \mu(\mathbf{x}_p) \int_{\partial\Omega} (k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - k(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}))\sigma(d\mathbf{y})$$

Per il calcolo dell'ultimo integrale uso il lemma di Gauss: il termine in  $k(\mathbf{x}_p, \mathbf{y})$  dà  $-1/2$ , l'altro da  $-1$  se  $\mathbf{x} \in \Omega$ , e  $0$  se  $\mathbf{x} \notin \bar{\Omega}$ . Ricordando la definizione degli operatori

$$D^\pm \mu = \pm \frac{1}{2} \mu + K \mu$$

l'identità precedente si riscrive come

$$D\mu(\mathbf{x}) - D^\pm \mu(\mathbf{x}_p) = \int_{\partial\Omega} (k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - k(\mathbf{x}_p, \mathbf{y})) (\mu(\mathbf{y}) - \mu(\mathbf{x}_p)) \sigma(d\mathbf{y})$$

Stimiamo ora questa differenza con

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - k(\mathbf{x}_p, \mathbf{y})| |\mu(\mathbf{y}) - \mu(\mathbf{x}_p)| \sigma(d\mathbf{y}) &= \\ &= \int_{\partial\Omega} |k_\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - k_\delta(\mathbf{x}_p, \mathbf{y})| |\mu(\mathbf{y}) - \mu(\mathbf{x}_p)| \sigma(d\mathbf{y}) + \\ &+ \int_{\partial\Omega} |k_\delta^c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - k_\delta^c(\mathbf{x}_p, \mathbf{y})| |\mu(\mathbf{y}) - \mu(\mathbf{x}_p)| \sigma(d\mathbf{y}) \end{aligned}$$

A  $\delta$  fissato il secondo integrando è stimato da  $c|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|/\delta^3$  (usando Lagrange per stimare la differenza in  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_p$  bisogna derivare ulteriormente e dunque la divergenza in  $\delta$  aumenta di un ordine). Il primo termine si stima immediatamente usando il teorema di limitatezza integrale con

$$2\bar{c} \sup_{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x}_p)} |\mu(\mathbf{y}) - \mu(\mathbf{x}_p)|$$

Dunque, detta  $|z|$  la distanza di  $\mathbf{x}$  dal bordo (cioè da  $\mathbf{x}_p$ )

$$|D\mu(\mathbf{x}) - D^\pm \mu(\mathbf{x}_p)| \leq \frac{c}{\delta^3} |z| + 2\bar{c} \sup_{\mathbf{y}', \mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{y}')} |\mu(\mathbf{y}) - \mu(\mathbf{y}')|$$

Ora faccio tendere  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}_p$ , tenendo  $\mathbf{x}_p$  fisso, cioè mando  $z$  a  $0$ . Il primo termine tende a zero e il secondo è indipendente da  $z$  e tende a zero per  $\delta \rightarrow 0$  perché  $\mu$  è continua. Dunque abbiamo provato che se  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  lungo la normale in  $\mathbf{x}_0$ , allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0^\pm} D\mu(\mathbf{x}) = D^\pm \mu(\mathbf{x}_0)$$

Poiché questa convergenza è uniforme in  $\mathbf{x}$  e le funzioni  $D^\pm \mu$  sono continue, è immediato ottenere che la tesi vale in generale per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  uniformemente in  $\mathbf{x}_0$ , e questo assicura che  $D\mu$  da dentro e da fuori si prolunga con continuità.

Termino questa sezione enunciando due risultati che non dimostro ma che trovate in versione generale, e con le ipotesi minimali sulla regolarità di  $\partial\Omega$  in [DL] capitolo II, sezione 3, paragrafo 3.

**Teorema 14.15.** Regolarità di  $S\mu$  se  $\mu$  è  $C^\alpha$   
 Se  $\mu \in C^\alpha(\partial\Omega)$ , con  $\alpha > 0$ , allora allora  $\nabla S\mu \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$  e  $\nabla S\mu \in C^{1+\alpha}(\Omega^c)$

**Teorema 14.16.** Regolarità di  $D\mu$  se  $\mu$  è  $C^{1+\alpha}$   
 Se  $\mu \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$ , allora allora  $D\mu \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$  e  $D\mu \in C^{1+\alpha}(\Omega^c)$

Si noti che non basta  $\mu$  continua per provare la regolarità  $C^1$ , del potenziale di singolo strato, e si noti anche che la condizione  $\mu$  in  $C^\alpha$  è sufficiente a per provare che

$$\partial_n^\pm S\mu = \mp\mu/2 + K^*\mu$$

infatti nella dimostrazione del teorema 14.11 per individuare il valore delle derivate normali abbiamo usato solo  $S\mu$  che è  $C^1$  fino al bordo.

**Proposizione 14.6.** *Ulteriori regolarità di  $K$ .*

*Se  $\mu$  è limitata, allora  $K\mu$  e  $K^*\mu$  sono in  $C^\alpha$ , per  $\alpha \leq 1/4$ .*

*Se  $\mu \in C^\alpha$  è hölderiana, allora  $K\mu \in C^{1+\alpha'}$  con  $\alpha' < \alpha$ .*

*Come conseguenza, del primo punto, le autofunzioni di  $K$  e  $K^*$  di autovalore non nullo sono hölderiane, e come conseguenza del secondo hanno derivate hölderiane, per opportuni esponenti.*

*Dimostrazione.* Do l'idea della dimostrazione del primo punto senza troppi dettagli. Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  su  $\partial\Omega$ , a distanza inferiore a  $\eta\delta$ , con  $\eta$  abbastanza piccolo, indipendente da  $\delta < \delta_0/2$  in modo che

$$\mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x}')\} \leq \mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_{2\delta}(\mathbf{x})\}$$

e che se  $\mathbf{y} \notin C_\delta(\mathbf{x})$  allora

$$|k(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - k(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq c|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|/\delta^3$$

Allora

$$|K\mu(\mathbf{x}) - K\mu(\mathbf{x}')| \leq \|\mu\|_\infty \left( \int_{\partial\Omega} |k_\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})| + \int_{\partial\Omega} |k_{2\delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| + c|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|/\delta^3 \right)$$

I primi due termini sono stimati da  $c\delta$ . Scegliendo  $\delta^4 = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$  si ha che la condizione  $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| < \eta\delta$  è verificata, e sostituendo a  $\delta$  il suo valore nella stima si ottiene l'hölderianità di esponente  $1/4$ .

**Esercizio 53.** *Non regolarità della derivata tangente del potenziale di singolo strato*

Considera in  $\mathbb{R}^2$  il potenziale di singolo strato generato da  $\mu$  sull'asse delle ascisse:  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{y} = (t, 0)$

$$u(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mu(t) \ln \sqrt{(x_1 - t)^2 + x_2^2} dt$$

Per  $x_2 \neq 0$ , la derivata in  $x_1$  è

$$\partial_1 u(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt \mu(t) \frac{x_1 - t}{(x_1 - t)^2 + x_2^2}$$

Sono interessato al limite per  $x_2 \rightarrow 0$ , dunque scelgo  $x_1 = 0$  e  $x_2 = \varepsilon$

$$\partial_1 u(0, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt \mu(t) \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2}$$

Nota che come valore principale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2} dt = 0$$

Dunque

$$\partial_1 u(0, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\mu(t) - \mu(0)) \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2} dt$$



Supponi  $\mu$  a supporto compatto e hölderiana in 0. Usando che  $\frac{|t|}{t^2 + \varepsilon^2} \leq \frac{1}{|t|}$ , mostra, per convergenza dominata, che  $\partial_1 u(0, \varepsilon)$  tende a 0 per  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Considera invece

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \\ \operatorname{sgn}(t)(1 - 1/\ln|t|) & \text{se } 0 < |t| < 1/e \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nota che  $\mu$  è dispari e non è hölderiana in 0. Vale

$$\partial_1 u(0, \varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^{1/e} \frac{1}{|\ln t|} \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2} dt.$$

Usando che se  $|\varepsilon| < t$  allora  $t^2 + \varepsilon^2 \leq 2t^2$  ottieni

$$|\partial_1 u(0, \varepsilon)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_{|\varepsilon|}^{1/e} \frac{1}{t|\ln t|} dt$$

L'integrale è esplicitamente computabile, e diverge come  $|\ln|\ln\varepsilon||$  per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Dunque il potenziale di singolo strato ha una derivata tangente che può divergere se  $\mu$  non è almeno hölderiana.

#### **Esercizio 54. Non regolarità della derivata normale del potenziale di doppio strato**

Come nell'esercizio precedente, considero il caso piano, con  $\partial\Omega$  uguale all'asse orizzontale. Il potenziale di doppio strato generato da  $\mu$  è

$$u(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mu(t) \frac{x_2}{(x_1 - t)^2 + x_2^2}$$

La sua derivata in  $x_2$ , calcolata in  $(x_1, x_2) = (0, \varepsilon)$  è

$$\partial_2 u(0, \varepsilon) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mu(t) \frac{t^2 - \varepsilon^2}{t^2 + \varepsilon^2}$$

Si noti che

$$-\partial_t \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2} = \frac{t^2 - \varepsilon^2}{t^2 + \varepsilon^2}$$

Dunque se  $\mu \in C^1$ , integrando per parti si ha

$$\partial_2 u(0, \varepsilon) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mu'(t) \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2} dt$$

Procedendo come nell'esercizio precedente, mostra che se  $\mu'$  è hölderiana in 0 allora il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  esiste finito e non dipende dal segno di  $\varepsilon$ , mentre se  $\mu'$  non è hölderiana, il limite può divergere.

## **14.6 Il problema di Laplace - Dirichlet interno**

Riassumo le informazioni sulle discontinuità, trascurando per ora le ipotesi di regolarità su  $\mu$  necessarie.

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \partial\Omega^\pm} S\mu &= \Sigma\mu \\ \partial_n^\pm S\mu &= \mp \frac{1}{2}\mu + K^*\mu \\ \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \partial\Omega^\pm} D\mu &= D^\pm\mu = \pm \frac{1}{2}\mu + K\mu \end{aligned}$$

Inoltre ricordo che  $S\mu$  e  $D\mu$  hanno laplaciano nullo fuori da  $\partial\Omega$ .

Voglio risolvere l'equazione di Laplace per un dominio  $\Omega$  con condizioni di Dirichlet non omogenee.

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{per } x \in \Omega \\ u(x) = f(x) & \text{per } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Questo problema si può trasformare nella ricerca di una densità per un potenziale di doppio strato. Infatti, se cerco la soluzione di nella forma  $u = D\mu$ , la condizione al contorno diventa

$$f = D^-\mu = -\frac{1}{2}\mu + K\mu \quad (14.12)$$

Quindi posso trovare una soluzione se trovo  $\mu$  che risolve questa equazione di Fredholm. Se  $\mu$  esiste, allora è continua (vedi il teorema 14.13) e dunque  $D\mu$  è continua in  $\bar{\Omega}$  (per il teorema 14.14), e quindi  $D\mu$  risolve il problema di Laplace-Dirichlet. Ricordo inoltre che attraverso il principio del massimo si prova l'unicità delle soluzioni del problema di Laplace-Dirichlet nella classe delle soluzioni  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  (non è necessario  $C^1$  fino al bordo).

Rimane dunque da provare che il Ker  $(-\mathbf{I}/2 + K)$  è banale. Se  $\Omega$  è strettamente convesso, questo risultato si ottiene con una certa semplicità ed eleganza. Nel caso generale dovremmo ricorrere ai risultati di regolarità più sottili che ho enunciato alla fine del paragrafo precedente.

**Teorema 14.17. Banalità del Ker  $(K - \mathbf{I}/2)$  nel caso  $\Omega$  strettamente convesso**

*Se  $\Omega$  è un dominio strettamente convesso, allora*

$$K\mu = \frac{1}{2}\mu$$

*non ha soluzione in  $L^2(\partial\Omega)$ .*

*Dimostrazione.* Ricordo che il nucleo dei potenziale di doppio strato è

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \mathbf{n}_y \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Se il dominio è strettamente convesso, questo nucleo è negativo per  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  (non ci sono  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  in cui  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  è ortogonale a  $\mathbf{n}_y$ ). Inoltre, per il Lemma di Gauss,  $\int_{\partial\Omega} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(d\mathbf{y}) = -\frac{1}{2}$ . Per economia di notazioni, definisco  $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Questo nucleo è positivo e integrato in  $\mathbf{y}$  dà 1, qualunque sia  $\mathbf{x}$ . Sia  $H$  il corrispondente operatore integrale, e sia

$$H\mu = \lambda\mu$$

per un qualche  $\lambda$  reale non nullo. Abbiamo già mostrato che in tal caso  $\mu$  è continua nel teorema 14.13. Poiché

$$|\lambda\mu(\mathbf{x})| \leq H|\mu| \leq \|\mu\|_\infty H1 = \|\mu\|_\infty$$

si ha che  $|\lambda| \leq 1$ . Consideriamo il caso  $|\lambda| = 1$ , e sia  $\mathbf{x}_0$  il punto di massimo di  $|\mu(\mathbf{x})|$ .

$$M \leq H|\mu| \leq M$$

Ma allora

$$M = H|\mu|$$

e questa uguaglianza è possibile solo se  $|\mu| \equiv M$ . Infatti, sia  $\alpha = |\mu|$ , e sia  $A_\varepsilon = \{\mathbf{y} \in \partial\Omega \mid \alpha \leq M(1-\varepsilon)\}$  e siano  $H_\varepsilon$  e  $H_\varepsilon^c$  gli operatori che si ottengono limitando l'integrale a  $A_\varepsilon$  e al suo complementare. Allora

$$H\alpha = H_\varepsilon\alpha + H_\varepsilon^c\alpha \leq M(1-\varepsilon)H_\varepsilon 1 + H_\varepsilon^c\alpha = M(1-\varepsilon) + H_\varepsilon^c(\alpha - M(1-\varepsilon)) \leq M(1-\varepsilon) + M\varepsilon H_\varepsilon^c 1 < M$$

dove l'ultima disuguaglianza è conseguenza della stretta convessità di  $\Omega$ , che implica  $H_\varepsilon^c 1 < 1$ .

**Teorema 14.18. Banalità del Ker  $(K - \mathbf{I}/2)$  nel caso generale**

$$\ker \left( K^* - \frac{1}{2} \mathbf{I} \right) = \{\mathbf{0}\}$$

e dunque essendo  $K$  compatto,

$$\ker \left( K - \frac{1}{2} \mathbf{I} \right) = \{\mathbf{0}\}$$

Sia  $\nu$  tale che

$$-\frac{1}{2}\nu + K^*\nu = 0$$

Per il teorema 14.13,  $\nu$  è una funzione continua, e per il teorema 14.6 è hölderiana. Considero ora  $S\nu$ , cioè il potenziale di singolo strato generato da  $\nu$ . Per il teorema 14.15,  $S\nu$  è in  $C^1(\overline{\Omega})$  e in  $C^1(\Omega^c)$ . Dunque  $S\nu$  è una soluzione classica  $C^2(\overline{\Omega}^c) \cap C^1(\Omega^c)$  del problema di Laplace-Neumann omogeneo nel dominio esterno  $\overline{\Omega}^c$ . Mostreremo che questa condizione implica che  $\nu = 0$ , concludendo, in questo modo, la prova.

**Teorema 14.19. Unicità della soluzione del problema di Laplace-Neumann esterno**  
Se  $S\nu$  è  $C^1$  fino al bordo e risolve il problema di Laplace-Neumann esterno con condizione

$$\partial_n^+ S\nu = 0$$

allora

(a)  $S\nu$  è nulla in  $\Omega^c$ , da cui segue che

(b)  $\nu$  è nullo

*Dimostrazione.* È semplice provare che (a) implica (b). Infatti,  $S\nu$  risolve l'equazione di Laplace anche in  $\Omega$ , e, essendo continua, se è zero in  $\Omega^c$  allora è zero anche su  $\partial\Omega$ . Ma l'unica soluzione dell'equazione di Laplace nulla al bordo è la soluzione nulla. Dunque  $S\nu$  è nulla anche in  $\Omega$ . Ne segue che anche  $\partial_n^- S\nu = 0 = \partial_n^+ S\nu$ , ma allora  $\nu/2 + K^*\nu = -\nu/2 + K^*\nu$  e dunque  $\nu$  è nulla.

Per dimostrare (a), noto innanzi tutto che  $S\nu$  risolve anche il problema di Laplace-Neumann interno con condizione

$$\partial_n^- S\nu = \frac{\nu}{2} + K^*\nu = \partial_n^+ S\nu + \nu = \nu$$

D'altra parte,  $S\nu$  deve verificare la condizione di compatibilità per l'equazione di Laplace con condizioni di Neumann, cioè

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n^- S\nu = 0$$

Dunque  $\nu$  ha integrale nullo, e quindi asintoticamente,  $S\nu$  va come un potenziale di dipolo. Dunque, in dimensione  $d$ ,

$$S\nu = O(1/|\mathbf{x}|^{d-1}) \quad \text{e} \quad \nabla S\nu = O(1/|\mathbf{x}|^d)$$

Sia  $B_R$  una sfera di raggio  $R$  e centro 0, che contiene  $\Omega$ ; usando il teorema della divergenza si ha

$$\int_{B_R \setminus \Omega} |\nabla S\nu|^2 = \int_{\partial B_R} S\nu \partial_n S\nu$$

(l'integrale sul bordo  $\partial\Omega$  è 0 perché abbiamo assunto  $\partial_n^+ S\nu = 0$ ). L'integrando va a zero come  $1/R^{d-1+d}$ , mentre la misura di  $\partial B_R$  diverge come  $R^{d-1}$ . Dunque il membro di destra tende a 0 per  $R \rightarrow +\infty$ . Ne segue che

$$\int_{B_R \setminus \Omega} |\nabla S\nu|^2 = 0,$$

dunque  $S\nu$  è costante. D'altra parte  $S\nu \rightarrow 0$  per  $|x| \rightarrow +\infty$ , e dunque è 0. □

### Osservazione.

In dimensione  $d \geq 3$  non è necessario notare che l'andamento asintotico è governato dal termine di dipolo, infatti il potenziale decade come  $1/R^{d-2}$  e il suo gradiente come  $1/R^{d-1}$ , e l'argomento continua a funzionare. È invece necessario nel caso bidimensionale, in cui il potenziale diverge logicamente, e il suo gradiente va a zero come  $1/R$  che viene esattamente compensato dalla misura della circonferenza.

Riassumo in un teorema i risultati ottenuti in questo paragrafo.

### **Teorema 14.20. Problema di Laplace-Dirichlet interno**

*Se  $f$  è una funzione continua, il problema di Laplace con condizione di Dirichlet  $f$  al contorno ha una soluzione unica, che si può rappresentare come potenziale di doppio strato di densità di dipolo  $\mu$ , dove  $\mu$  è l'unica soluzione in  $L^2(\partial\Omega)$  dell'equazione di Fredholm*

$$K\mu - \frac{1}{2}\mu = f$$

*La densità di dipolo  $\mu$  è inoltre continua.*

## 14.7 Il problema di Laplace-Neumann

Anche il problema di Laplace-Neumann può essere tradotto in una equazione integrale al bordo. Cerchiamo infatti una soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{in } x \in \Omega \\ \partial_n u(x) = g(x) & \text{in } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

tra i potenziali di singolo strato  $S\mu$ , con  $\mu$  distribuzione di carica continua su  $\partial\Omega$ . La condizione al bordo diventa

$$g = \partial_n^+ S\mu = K^*\mu + \frac{1}{2}\mu$$

Dunque  $S\mu$  è soluzione del problema di Laplace-Neumann se  $\mu$  risolve l'equazione integrale di tipo Fredholm appena scritta. Se  $g$  è hölderiana, allora  $\mu$  è hölderiana e quindi  $S\mu$  è una soluzione classica, cioè  $C^1$  fino al bordo (vedi i teoremi 14.6 e 14.15).

L'operatore  $K^*$  è compatto, dunque si può usare anche in questo caso la teoria di Fredholm. Sappiamo già che c'è una condizione necessaria su  $g$  per l'esistenza di una soluzione  $u$ , infatti

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \partial_n u = \int_{\partial\Omega} g.$$

D'altra parte questa condizione di ortogonalità per  $g$  è anche conseguenza diretta dell'equazione di Fredholm infatti, indicando con  $(f, g)_{\partial\Omega}$  il prodotto scalare su  $\partial\Omega$ , si ha

$$(1, g)_{\partial\Omega} = \frac{1}{2}(1, \mu)_{\partial\Omega} + (1, K^*\mu)_{\partial\Omega} = \frac{1}{2}(1, \mu)_{\partial\Omega} + (K1, \mu)_{\partial\Omega} = \frac{1}{2}(1, \mu)_{\partial\Omega} - \frac{1}{2}(1, \mu)_{\partial\Omega} = 0$$

dove l'uguaglianza  $K1 = -1/2$  è conseguenza del lemma di Gauss. Vederemo, con una certa fatica, che la condizione  $(1, g)_{\partial\Omega} = 0$  è anche condizione sufficiente per l'esistenza delle soluzioni.

In accordo alla teoria degli operatori compatti, l'equazione per  $\mu$  ha soluzione per ogni  $g$  se l'equazione aggiunta omogenea ha solo la soluzione nulla. L'equazione aggiunta omogenea è

$$\frac{1}{2}\nu + K\nu = 0$$

Ricordo che se  $\nu$  risolve questa equazione, allora il potenziale di doppio strato generato da  $\nu$  vale a 0 sul bordo esterno. L'equazione aggiunta ha soluzioni non banali, infatti se  $\nu = 1$ , il Lemma di Gauss garantisce che  $K1 = -1/2$ , e dunque l'equazione è soddisfatta.

Dimostriamo che le uniche soluzioni dell'equazione omogenea associata sono le costanti, e dunque l'equazione di partenza è risolubile se e solo se  $g$  è ortogonale alle costanti, che è proprio la condizione di compatibilità che ci era già nota.

Sia dunque  $\nu$  una soluzione dell'equazione omogenea

$$\frac{1}{2}\nu + K\nu = 0$$

Vogliamo provare che  $\nu$  è costante. Abbiamo già provato questa affermazione nel caso di domini strettamente convessi nel teorema 14.17. Il caso generale si appoggia sui risultati di ulteriore regolarità per l'operatore  $K$ . Per la proposizione 14.6  $\nu$  è di classe  $C^{1+\alpha}$  per opportuni  $\alpha$ , dunque per il teorema 14.16  $D\mu$  è  $C^1$  fino ai bordi sia da dentro che da fuori. Fuori da  $\Omega$ ,  $D\nu$  è nulla, dunque  $\partial_n^+ D\nu = 0$  è nulla sul bordo. Poiché la derivata normale è continua,  $D\nu$  risolve anche il problema di Laplace-Neumann all'interno, con condizione di Neumann omogenea al bordo, dunque  $D\nu$  è costante all'interno, infatti

$$\int_{\Omega} |\nabla D\mu|^2 = \int_{\partial\Omega} D\mu \partial_n D^- \mu = 0$$

Dunque

$$\nu = D^+ \nu - D^- \nu = 0 - \text{cost}$$

e quindi  $\nu$  è costante, come volevamo dimostrare.

## 14.8 Conduttori

Come noto dai corsi di fisica generale, in un conduttore carico in condizioni di equilibrio la carica si distribuisce sulla superficie. Se così non fosse, ci sarebbe un campo elettrico interno (per il teorema di Gauss, intorno a una carica c'è sempre un flusso del campo), dunque gli elettroni del conduttore verrebbero accelerati, contro l'ipotesi di equilibrio. Per lo stesso motivo, la superficie del conduttore deve essere equipotenziale, in modo che il campo sia normale alla superficie (altrimenti gli elettroni al bordo verrebbero accelerati nella direzione tangente).

In questa descrizione fisica, si tiene in conto del fatto che la carica complessiva non è nulla, e dell'esistenza di elettroni liberi di muoversi nel conduttore.

### Conduttore carico

Analizziamo questo "modello" dal punto di vista matematico. Osservo innanzitutto che l'energia complessiva di una distribuzione di cariche  $f$  è

$$E = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

dove  $Vf = G * f$  è il potenziale. Infatti, data la carica  $f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$ , il lavoro per portare  $f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  dall'infinito è

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{x}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}$$

Integrando si ottiene il doppio dell'energia, perché ogni contributo è contato due volte.

Se questa giustificazione alla fisica vi sembra giustamente oscura, potete ragionare in modo più matematico: data  $f(\mathbf{x})$ , la variazione di energia dovuta a una variazione di carica  $\delta f(\mathbf{x})$  è

$$\int V f(\mathbf{x}) \delta f(\mathbf{x})$$

ma questa è esattamente la variazione prima di  $\int V f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) / 2$ .

Osservo che  $V(\mathbf{x})$  è  $Vf = G * f$ , dunque l'energia è la forma quadratica  $E = (f, Vf) / 2$ . In dimensione 3 (e in dimensione 2 per densità di cariche  $f$  complessivamente neutre, cioè con  $\int f = 0$ ), si ha

$$\int |\nabla Vf|^2 = (f, Vf)$$

(provare per esercizio). Dunque  $(f, Vf) / 2$  è una forma quadratica semidefinita positiva (si può dimostrare che è definita positiva).

Come in tutti i sistemi fisici, cerco la distribuzione di equilibrio di una carica su un conduttore  $\Omega$  cercando i punti stazionari dell'energia, cerco dunque le  $f$  a supporto in  $\Omega$  che rendono stazionaria

$$(f, Vf) / 2 - \alpha((f, 1) - m)$$

dove il prodotto scalare è in  $L^2(\Omega)$ ,  $(f, 1)$  è la carica totale che deve essere pari a  $m$ ,  $\alpha$  è il moltiplicatore di Lagrange. È immediato imporre la stazionarietà di questo funzionale, perché si tratta di una forma quadratica con un contributo lineare. Si ottiene  $Vf = \alpha$  cioè  $Vf$  deve essere costante in  $\Omega$ . Questo implica che il suo laplaciano è nullo in  $\Omega$ , dunque  $f$  è nulla. In termini fisici non c'è carica all'interno; in termini matematici non esistono soluzioni tra le funzioni su  $\Omega$ .

Riformulando lo stesso problema per una distribuzione di carica  $\nu$  su  $\partial\Omega$  si ottiene il funzionale

$$(\nu, \Sigma\nu)_{\partial\Omega}/2 - \alpha((\nu, 1)_{\partial\Omega} - m)$$

dove il prodotto scalare è in  $L^2(\partial\Omega)$ , e dunque su bordo deve valere

$$\Sigma\nu = \alpha$$

Di questa equazione sappiamo solo che non è risolubile in generale, perché  $\Sigma$  è un operatore compatto, dunque non è invertibile.

D'altra parte, se una ragionevole soluzione esiste, essendo armonica dentro e costante al bordo, deve essere costante anche in tutto  $\Omega$ , e dunque genera un campo nullo all'interno. Quindi  $\nu$  verifica anche il problema di Laplace-Neumann interno omogeneo, cioè

$$0 = \partial_n^- S\nu = \frac{1}{2}\nu + K^*\nu$$

Abbiamo già mostrato che questo problema ha un'unica soluzione a meno di costanti moltiplicative, perché il kernel dell'aggiunto ha dimensione 1. Resta solo da verificare che abbiamo realmente trovato una soluzione, cioè che la carica complessiva di  $\nu$  non è nulla.

Poiché la soluzione che abbiamo trovato è regolare,  $S\nu$  è  $C^1(\bar{\Omega})$ , e risolve Laplace-Neumann interno omogeneo, dunque  $S\nu = \alpha$  in  $\bar{\Omega}$ , con  $\alpha$  costante, e in particolare  $\Sigma\nu = \alpha$ .

Mostriamo che  $\alpha$  non può essere 0. Se così fosse, essendo  $S\nu$  continua,  $S\nu$  sarebbe nulla dentro e fuori, per il principio del massimo, e dunque il salto della derivata normale sarebbe nullo, e quindi  $\nu = 0$ . Dunque  $\alpha$  non è nullo. Moltiplicando scalarmente per  $\nu$  si ottiene

$$(\nu, \Sigma\nu) = \alpha m$$

Poiché  $\Sigma$  è compatto e autoaggiunto, e l'energia non può essere nulla,  $m = 0$  solo se  $\nu$  è autofunzione di autovalore nullo, ma abbiamo dimostrato che  $\alpha = \Sigma\nu$  è non nullo.

Chiamerò  $\nu_1$  la distribuzione di singolo strato di carica totale 1.

**Osservazione:** non ho dimostrato che  $\Sigma$  non ha autofunzioni di autovalore nullo, e non posso farlo come sopra, perché se  $\mu \in L^2(\partial\Omega)$  non so se  $S\mu$  è  $C^1$  fino ai bordi. D'altra parte si può dimostrare che  $\mu \in L^2(\partial\Omega)$  si può identificare con una misura con segno (cioè una "carica") a supporto compatto, e che la sua energia è nulla se e solo se  $\mu$  è nulla. CITARE LL.

**Osservazione:** abbiamo trovato un solo punto stazionario dell'energia a massa fissata, dunque non esistono altre distribuzioni di singolo strato oltre a quella "stabile", cioè che realizza il minimo dell'energia.

**Osservazione:** abbiamo considerato il caso di  $\Omega$  conduttore, ma la teoria che abbiamo sviluppato si applica anche al caso di  $\partial\Omega$  conduttore, infatti che  $S\nu$  sia costante dentro è una semplice conseguenza di  $\Sigma\nu = \alpha$ , che è la condizione di stazionarietà.

### Superficie conduttrice con cariche all'interno

Considero ora il caso in cui il conduttore coincide con  $\partial\Omega$  in presenza di cariche all'interno di  $\Omega$ . Sia dunque  $f$  a supporto dentro  $\Omega$ . Cerco  $\nu$  a supporto su  $\partial\Omega$  che minimizzi l'energia, che è

$$(f, Vf)/2 + (\nu, \Sigma\nu)_{\partial\Omega}/2 + (\nu, Vf)_{\partial\Omega}$$

(ho usato che  $(S\nu, f) = (\nu, Vf)_{\partial\Omega}$ , come si ottiene scambiando l'ordine di integrazione). La condizione di stazionarietà è

$$\Sigma\nu = -Vf$$

che è quella che ci aspettavamo:  $\nu$  deve generare un'energia potenziale su bordo, opposta a  $Vf$ . Come nel caso del conduttore carico, non possiamo sperare di risolvere direttamente questa equazione, perché  $\Sigma$  non è invertibile. Sia ora  $u = S\nu + Vf$ . Si tratta di una funzione continua, nulla sul bordo, e, poiché la carica  $f$  ha supporto in  $\Omega$ , il suo laplaciano fuori da  $\Omega$  è zero. Dunque  $u$  è nulla su  $\Omega^c$ , e quindi risolve anche il problema di Laplace-Neumann esterno omogeneo, che dà per  $\nu$  l'equazione al bordo

$$-\frac{1}{2}\nu + K^*\nu = -\partial_n Vf$$

Abbiamo già mostrato che la soluzione di questo problema esiste unica. Moltiplicando scalarmente sul bordo per 1 si ottiene

$$-\frac{1}{2}(1, \nu)_{\partial\Omega} + (K1, \nu)_{pa} = -(1, \partial_n Vf)_{\partial\Omega}$$

Ricordando che  $K1 = -1/2$  sul bordo (per il lemma di Gauss), e notando che

$$(1, \partial_n Vf)_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \partial_n Vf = \int_{\Omega} \Delta Vf = - \int_{\Omega} f$$

si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} \nu = - \int_{\Omega} f$$

cioè la carica sul bordo è “uguale e opposta” alla carica interna.

Fisicamente, la superficie conduttrice “schermo” le cariche interne, perché fuori il potenziale è nullo. Per ottenere questa situazione, se la carica totale interna non è nulla, serve “mettere a terra” la superficie conduttrice, in modo da poter modificare la sua carica totale (altrimenti nulla). Nel caso in cui il conduttore non si possa mettere a terra, alla soluzione  $\nu$  trovata va aggiunta la soluzione  $m\nu_1$ , con  $m$  pari alla carica interna. Mostra per esercizio che in questo modo il conduttore sarà una superficie equipotenziale, e la soluzione trovata rende stazionaria l'energia con il vincolo di carica totale nulla. Nota che il campo esterno dipende solo da  $\nu_1$  e da  $m$ , dunque da fuori si può solo determinare la carica totale di  $f$  ma non la sua distribuzione interna, che rimane schermata.

### Superficie conduttrice con cariche all'esterno

Consideriamo ora la schermatura che  $\partial\Omega$  può realizzare all'interno, rispetto a una distribuzione di cariche all'esterno. Procedendo come sopra,  $u = \Sigma\nu + Vf$  è armonica dentro  $\Omega$  e nulla al bordo. Dunque deve valere

$$\frac{1}{2}\nu + K^*\nu = -\partial_n Vf$$

che ha soluzione perché  $\partial_n Vf$  è ortogonale alle costanti (che costituiscono il kernel di  $\mathbf{I}/2 + K$ ). La soluzione non è unica, infatti la soluzione  $\nu_1$  trovata sopra per il conduttore carico è soluzione dell'equazione omogenea. Poiché  $\nu_1$  ha integrale 1, una generica soluzione sarà della forma

$$\nu_0 + m\nu_1$$



dove  $\nu_0$  è l'unica soluzione a integrale nullo dell'equazione  $\nu/2 + K^*\nu = -\partial_n V f$ . Il valore di  $m$  sarà determinato dalla condizione  $\Sigma(\nu_0 + m\nu_1) + V f = 0$  (il fatto che  $\Sigma\nu_0 + V f$  è costante è conseguenza del fatto che risolve Laplace-Neumann interno omogeneo).

**Esercizio 55. Problema di Laplace-Dirichlet esterno**

Si può trasformare il problema di Laplace-Dirichlet esterno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \overline{\Omega}^c \\ u = f & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

nell'equazione di Fredholm

$$\frac{1}{2}\mu + K\mu = f$$

cercando  $u$  come il potenziale di doppio strato generato da  $\mu$ . Questa equazione non ha soluzione unica, infatti se  $\mu = 1$  si ottiene una soluzione non nulla per il caso  $f = 0$ . Questo non significa che il problema di Laplace-Dirichlet esterno abbia più di una soluzione, perché quella generata da  $\mu = 1$  è la soluzione nulla.

Inoltre, è falso che la soluzione esista per ogni  $f$ . Infatti, l'equazione di Fredholm ha soluzione solo se  $f$  è ortogonale alla distribuzione di equilibrio  $\nu_1$  del conduttore carico che abbiamo determinato nel paragrafo precedente. Ricordo che ho indicato con  $\alpha_1$  il valore di  $S\nu_1$  in  $\Omega$ , in particolare  $\Sigma\nu_1 = \alpha_1$ . Si decomponga  $f$  in

$$f = \alpha + (f - \alpha)$$

con  $\alpha$  numero reale. Si determini  $\alpha$  in modo che  $(f - \alpha, \nu_1)_{\partial\Omega} = 0$ . Si provi che la soluzione del problema di Laplace-Dirichlet esterno è data da

$$u = \frac{\alpha}{\alpha_1} S\nu_1 + D\mu$$

dove  $\mu$  è l'unica soluzione a media nulla dell'equazione

$$K\mu + \frac{1}{2}\mu = f - \alpha$$

ed esiste per la scelta fatta su  $\alpha$ .

**Esercizio 56. Domini non semplicemente connessi**

Prova a formulare il problema di Laplace-Dirichlet per un dominio non semplicemente connesso (per semplicità con un solo buco), tentando di riprodurre la teoria appena sviluppata.