

# Istituzioni di Fisica Matematica 2021 - Programma medio/completo

24 giugno 2022

Come guida all'orale, qui trovate gli argomenti divisi in **programma medio**, **programma completo**. Lo scopo di questa distinzione è preparare un percorso di studio con una sua coerenza, per chi di voi, per una qualche ragione, investirà meno risorse nella preparazione di questo esame.

Chiarisco la distinzione tra le varianti del programma.

- Mostrare incompetenza sui punti del programma medio non consente di superare l'esame.
- Il **programma medio** contiene gli argomenti essenziali al raggiungimento degli obiettivi del corso, e alcuni altri argomenti di maggiore complessità. Una buona conoscenza degli argomenti del programma medio garantisce il superamento dell'esame con una votazione intorno al 25.
- Il **programma completo** contiene tutti gli **argomenti del programma medio**, più alcuni **argomenti più complessi**.

Indipendentemente dal tipo di programma, potete considerare facoltativo (o proprio non farlo) un argomento a scelta tra Equazione di Vlasov [teorie cinetiche punti 1-6], Equazione di Boltzmann [teorie cinetiche punti 7-12], Qubit.

## Indice

Meccanica hamiltoniana . . . . .	2
Meccanica hamiltoniana . . . . .	3
Spazi di Hilbert . . . . .	4
Problemi di Sturm-Liouville . . . . .	5
Operatori lineari . . . . .	6
Operatori compatti . . . . .	7
Qubit . . . . .	8

## Meccanica hamiltoniana

Fonti: dispense h21

- 1 Flussi e campi vettoriali. L'equazione di Liouville e l'equazione del trasporto associate a un flusso.
- 2 Metodo delle caratteristiche per le EDP del primo ordine. L'equazione di Hamilton-Jacobi e le equazioni di Hamilton
- 3 Principio variazionale per le equazioni di Hamilton. La trasformata di Legendre e il legame con i sistemi lagrangiani.
- 4 Proprietà dei sistemi hamiltoniani
- 5 Trasformazioni canoniche, trasformazioni simplettiche, matrici simplettiche.
- 6 Parentesi di Poisson.
- 7 Commutatori di operatori e di campi. Commutazione dei flussi.
- 8 Teorema di Noether per sistemi hamiltoniani.
- 9 Funzioni generatrici.
- 10 Metodo di Hamilton-Jacobi
- 11 Teorema di integrabilità locale di Liouville [solo enunciato] [dimostrazione]
- 12 Teorema di integrabilità globale di Arnold-Liouville. [solo enunciato] [dimostrazione]
- 13 Variabili azione-angolo.
- 14 Moti quasi periodici sul toro; ergodicità.
- 15 Teoremi del ritorno di Poincaré.

## Introduzione alle teorie cinetiche [k21]

Fonti: dispense k21

- 1 L'equazione di Liouville per  $N$  particelle e la gerarchia BBGKY
- 2 Il limite di campo medio e l'equazione di Vlasov (formale)
- 3 Distanza di Wasserstein
- 4 Soluzioni deboli dell'equazione di Vlasov
- 5 Esistenza e unicità di soluzioni deboli dell'equazione di Vlasov
- 6 Il limite di campo medio secondo Dobrushin.
- 7 Urto elastico di sfere
- 8 La prima equazione della gerarchia per la dinamica di urti elastici [enunciato][dimostrazione]
- 9 Il limite di bassa densità e l'equazione di Boltzmann
- 10 Interpretazione dell'equazione di Boltzmann
- 11 Caso omogeneo: teorema H e equilibri
- 12 Scaling idrodinamico e equazioni dei gas perfetti (formale)

## Spazi di Hilbert

Fonti: dispense ifm21, cap. 2

- 1 Spazi di Hilbert reali e complessi. Esempi  $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ , con  $\Omega$  dominio di  $\mathbb{R}^n$ ,  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ,  $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ . Spazi  $L^2$  con pesi.
- 2 Sottospazi lineari chiusi e non. Ortogonale di un sottospazio.
- 3 Teorema della proiezione (solo enunciato)
- 4 Sistemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel; spazi separabili e sistemi ortonormali completi (basi). Identità di Parseval. Basi in spazi prodotto (enunciato)
- 5 Ortogonalizzazione di Gramm-Schmidt, esistenza di basi in spazi separabili.
- 6 Base di Fourier.
- 7 Completezza della base di Fourier.

## Polinomi ortogonali e problemi di Sturm-Liouville

Fonti: dispense ifm21 cap. 1, 3, 4, 5

- 1 La lagrangiana per una corda vibrante non omogenea
- 2 Polinomi di Legendre (con dettagli)
- 3 Funzioni generalizzate di Legendre
- 4 Polinomi di Tchebyshev, solo definizione
- 5 Polinomi di Hermite, solo definizione.
- 6 Il laplaciano in coordinate sferiche
- 7 L'operatore di Laplace-Beltrami per la superficie della sfera
- 8 Armoniche sferiche e polinomi armonici.

## Operatori lineari [ifm20 cap 6, 7, 8]

- 1 Operatori limitati e norma di un operatore, continuità e limitatezza. Estensione di operatori limitati definiti su sottospazi densi. Esempi: isometrie, proiettori. Isometria con  $\ell_2$  degli spazi di Hilbert separabili.
- 2 Il duale di uno spazio di Hilbert e il teorema di rappresentazione di Riesz.
- 3 Decomposizione di  $H$  attraverso immagine e nucleo dell'aggiunto
- 4 Operatore aggiunto e sue proprietà.
- 5 Operatori di moltiplicazione - condizioni di limitatezza
- 6 Operatori di integrali - condizioni sufficienti per la limitatezza
- 7 Operatori di convoluzione - condizioni sufficienti per la limitatezza

## Operatori compatti [ifm 19, cap. 9, 10, 14]

- 1 L'operatore di shift in  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ , il suo aggiunto, immagine e nucleo.
- 2 Risolvente e spettro.
- 3 Proprietà del risolvente.
- 4 Proprietà dello spettro degli operatori autoaggiunti e degli operatori unitari
- 5 Operatori di rango finito. Teorema dell'alternativa per operatori di rango finito.
- 6 Serie di Neumann e teoremi dell'alternativa per perturbazioni piccole di operatori di rango finito.
- 7 Convergenza debole di successioni, esempi e proprietà.
- 8 Operatori compatti.
- 9 Teorema dell'alternativa per operatori compatti
- 10 Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti.
- 11 Cenni su  $H_0^1$  e sulla disuguaglianza di Poincaré. Il problema di Poisson-Dirichlet in  $H_0^1$ . Vedi IFM21 par. 13.3.
- 12 Decomposizione spettrale dell'inverso del laplaciano con condizioni di Dirichlet. Vedi IFM21 par. 13.3.

## Qubit

Fonti: dispense q21

- 1 Stati quantistici in  $\mathbb{C}^2$ ; probabilità e osservabili
- 2 Le matrici di Pauli; struttura degli operatori autoaggiunti; spin nella direzione  $n$
- 3 Esempi di sistemi quantistici in  $\mathbb{C}^2$ : spin, luce polarizzata
- 4 Prodotto tensore di spazi di Hilbert; esempi
- 5 Due qubit; base di Bell, stati di singoletto e di tripletto
- 6 Matrici densità e loro equazione di evoluzione
- 7 Stati puri, miscele. Tracce parziali. L'esempio del singoletto