

DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Introduzione alle equazioni cinetiche per il corso di IFM 2021-2022

Dario Benedetto - <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario>

Introduzione alle equazioni cinetiche per il corso di IFM 2021-2022

15 giugno 2022

Queste note sono “appunti” e non “dispense”: vuol dire che trovate gli argomenti e le dimostrazioni, ma le motivazioni sono piuttosto stringate.

Possibili materiale di approfondimento

- Dispense di E. Caglioti <https://sites.google.com/site/ecaglioti/didattica/MR> su
 - Gerarchia e equazione di Vlasov “Dispense III”
 - Limite di campo medio “Il limite di campo medio”
 - Equazione di Boltzmann e teorema H “Dispense III”
 - Limite idrodinamico per l’equazione di Boltzmann “Hydrodynamic limit for the Boltzmann Equation”
- C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti **The Mathematical Theory of Dilute Gases** Applied Mathematical Sciences 106 - Springer
- Sul problema del passaggio da una descrizione irreversibile a una reversibile potete guardare sul testo precedente, e anche informarvi sul “modello di Kac”, un modellino che contiene molte delle difficoltà concettuali del passaggio al limite da sistemi reversibili a sistemi irreversibili.

G.A. Gottwald, M. Oliver: *Boltzmann’s Dilemma: An Introduction to Statistical Mechanics via the Kac Ring* SIAM Review **51** 3, pp 613–635 2009

<https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/070705799>

Indice

1	Dall’equazione di Liouville alla gerarchia	3
2	L’equazione di Vlasov	6
2.1	Proprietà dell’equazione di Vlasov	6
2.2	La distanza di Wasserstein	8
2.3	Costruzione delle soluzioni	10
2.4	Il limite di campo medio	13

3	L'equazione di Boltzmann	13
3.1	Urti tra sfere dure	14
3.2	La gerarchia e il limite di bassa densità	15
3.3	Proprietà dell'equazione di Boltzmann	20
3.4	Il limite idrodinamico	23

La descrizione fisico-matematica dei sistemi macroscopici, come gas, fluidi, solidi (in generale “mezzi continui”, in cui la scala non permette l’analisi delle particelle che li compongono), si fa attraverso opportune equazioni, che vengono derivate in vari modi. Uno è quello di utilizzare i principi primi dei sistemi di particelle (conservazione della massa, bilancio della quantità di moto e dell’energia). In questo modo però non si ottengono equazioni chiuse e vanno definite delle relazioni tra alcune delle grandezze in gioco attraverso le “relazioni costitutive”. Un altro approccio è quello di tentare di determinare il comportamento di un sistema macroscopico a partire dal comportamento dei suoi costituenti atomici (suggerito anche da Hilbert nel suo sesto problema). Un approccio formale consiste nel “passare al limite” le equazioni per un sistema di N particelle, mandando N a infinito, ottenendo le equazioni macroscopiche. L’approccio rigoroso richiede di mostrare che le soluzioni del sistema microscopico convergono in qualche senso alle soluzioni delle equazioni macroscopiche.

Per alcune equazioni cinetiche questo programma ha avuto parziale successo.

1 Dall’equazione di Liouville alla gerarchia

Le equazioni cinetiche descrivono sistemi di molte particelle, come un gas, in cui l’incognita è la densità di probabilità di una particella nello spazio delle fasi, che indicherò con $f(x, v, t)$ (o anche $f_t(x, v)$). Se N è il numero di particelle, Nf sarà la distribuzione delle particelle nello spazio delle fasi, e da questa funzione si possono ottenere le misure di qualunque osservabile. In particolare

$$\rho(x, t) = \int f(x, v, t) dv$$

è la densità di probabilità spaziale delle particelle.

Procedendo in questo modo, stiamo pensando che tutte le particelle siano distribuite nello stesso modo. Quindi, detta $f^N(x_1, \dots, x_N, v_1, \dots, v_N)$ la densità di probabilità nello spazio delle fasi per le N particelle, stiamo ipotizzando che

$$f^N(x_1, \dots, x_N, v_1, \dots, v_N) = \prod_{i=1}^N f(x_i, v_i),$$

ipotesi che prende il nome di **caos molecolare**, ed equivale a pensare che le particelle siano i.i.d. e che il gas che osserviamo sia una realizzazione di queste variabili aleatorie.

D’altra parte le equazioni della meccanica permettono di descrivere l’evoluzione della funzione f^N , attraverso l’equazione di Liouville. Per comprendere se è possibile ottenere una descrizione “ridotta” del sistema, cioè attraverso la sola distribuzione di una particella, è necessario studiare l’equazione di Liouville.

Considero un sistema di particelle interagenti a coppie con una forza di potenziale F di potenziale $U(\mathbf{x})$, cioè $F(x) = -\partial_x U(x)$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = - \sum_{j \neq i} \partial_x U(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \sum_{j \neq i} F(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \end{cases} \quad (1.1)$$

Nei casi fisici più interessanti, U è il potenziale gravitazionale (attrattivo) o il potenziale coulombiano repulsivo, o un potenziale “empirico” di interazione molecolare come quello di Lennard-Jones. Qui per semplicità assumerò che U sia un potenziale simmetrico, repulsivo, a supporto compatto.

Poiché le variabili (x_i, v_i) sono canoniche coniugate, il sistema conserva la misura e l’equazione di Liouville coincide con l’equazione del trasporto:

$$\partial_t f^N + \sum_1^N \mathbf{v}_i \cdot \partial_{x_i} f^N + \sum_1^N \mathbf{F}_i \partial_{v_i} f^N = 0$$

(si noti che anche in caso di massa diversa da 1 il sistema rimane a divergenza nulla e l’equazione di Liouville coincide con l’equazione del trasporto).

In vista del fatto che vogliamo descrivere il comportamento collettivo del sistema, assumiamo che f^N sia invariante per scambio di indici di particelle; in questo modo f^N non distingue una particella dall’altra.

Lemma 1.1. *Si assuma che f^N al tempo $t = 0$ sia invariante per permutazioni degli indici delle particelle. Si provi che f^N è invariante a tutti i tempi.*

Scriviamo l’equazione per le distribuzioni marginali a j particelle, sotto l’ipotesi di invarianza per permutazioni. Indico con $\mathbf{x}_k^n = (\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$ e uso l’analogia notazione \mathbf{v}_k^n . Per definizione, la marginale a k particelle è

$$f_j^N(\mathbf{x}_1^j, \mathbf{v}_1^j) = \int f^N(\mathbf{x}_1^N, \mathbf{v}_1^N) d\mathbf{x}_{j+1}^N d\mathbf{v}_{j+1}^N.$$

Supponendo che U sia regolare e che il dato iniziale sia regolare a supporto compatto, si ottiene facilmente che f^N al tempo t è regolare e a supporto compatto. Questo fatto ci permetterà di scambiare integrali e derivate senza problemi.

Integro l’equazione di Liouville in $\mathbf{x}_{j+1}^N, \mathbf{v}_{j+1}^N$. Il termine $\partial_t f^N$ diventa $\partial_u f_j^N$. In $\sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \cdot \partial_{x_i} f^N$ i termini con $i \leq j$ e con $i > j$ danno contributi differenti: se $i > j$, scrivo $\mathbf{v}_i \cdot \partial_{x_i} f^N = \text{div}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{v}_i f^N)$ il cui integrale nella variabile $d\mathbf{x}_i$ è nullo perché f^N è a supporto compatto. Se $i \leq j$, posso scambiare l’ordine di integrazione e derivazione. Complessivamente, il termine di trasporto dà

$$\sum_{i=1}^j \mathbf{v}_i \cdot \partial_{x_i} f_j^N.$$

Resta da capire cosa accade al termine con le forze, che è

$$\sum_{i=1}^N \sum_{h \neq i} \int F(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_h) \cdot \partial_{v_i} f^N d\mathbf{x}_1^j d\mathbf{v}_1^j.$$

Gli integrali dei termini con ∂_{v_i} , $i > j$ sono nulli, perché f^N è a supporto compatto. Rimane dunque solo la somma per i da 1 a j . Separo la somma su h in $h \leq j$ e $h \geq j$. La prima somma dà l'analogo a j particelle del termine presente nell'equazione di Liouville:

$$\sum_{i=1}^j \sum_{h \neq i}^j F(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_h) \partial_{v_i} f_j^N.$$

L'altro termine contiene, per $i \leq j$, la somma per $h > j$ di

$$\int F(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \cdot \partial_{v_i} f^N dx_{j+1}^N dv_{j+1}^N$$

Questa espressione è indipendente dall'indice k per l'invarianza per permutazioni. Fisso dunque $k = j + 1$, e la somma su h dà $N - j$ termini uguali a

$$\int F(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j+1}) \cdot \partial_{v_i} f_{j+1}^N dx_{j+1} dv_{j+1}.$$

In conclusione, l'equazione per la marginale a j particelle è

$$\begin{aligned} \partial_t f_j^N + \sum_{i=1}^j \mathbf{v}_i \cdot \partial_{x_i} f_j^N + \sum_{i=1}^j \sum_{h \neq i}^j F(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_h) \cdot \partial_{v_i} f_j^N + \\ + \sum_{i=1}^j (N - j) \int F(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j+1}) \partial_{v_i} f_{j+1}^N(\mathbf{x}_1^{j+1}, \mathbf{v}_1^{j+1}) d\mathbf{x}_{j+1} d\mathbf{v}_{j+1} = 0. \end{aligned}$$

In particolare l'equazione per la distribuzione a una particella è

$$\partial_t f_1^N + \mathbf{v}_1 \cdot \partial_{x_1} f_1^N + (N - 1) \int F(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \partial_{v_1} f_2^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_2 = 0.$$

Come si vede, l'equazione per j particelle coinvolge l'equazione per $j + 1$ particelle, quindi non abbiamo ottenuto equazioni chiuse, ma solo una **gerarchia** di equazioni, che prende il nome di gerarchia BBGKY. (da Bogoliubov e altri quattro che l'hanno ricavata indipendentemente). L'ultima equazione, quella per $j = N$, è l'equazione di Liouville, che invece è un'equazione chiusa.

La speranza di ottenere una descrizione ridotta del sistema, cioè un'equazione chiusa in f_1 , è legata alla possibilità di soddisfare i due seguenti aspetti:

- l'ultimo termine deve essere di ordine $O(N^0)$
- $f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ deve potersi scrivere in termini di f_1 .

Quest'ultima condizione si verifica nel caso di particelle indipendentemente e identicamente distribuite, perché in tal caso f_2 si fattorizza in $f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) f_1(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2)$. Però assumere che il dato iniziale è fattorizzato, cioè che $f^N(\mathbf{x}_1^N, \mathbf{v}_1^N, 0) = \prod_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, 0)$ non è sufficiente: ogni urto crea correlazione tra le particelle che urtano. Infatti si può verificare immediatamente che l'equazione di Liouville non ammette soluzioni fattorizzate.

2 L'equazione di Vlasov

Nel cosiddetto limite di campo medio, si assume che l'intensità dell'interazione sia di ordine $1/N$, dunque il sistema di particelle viene modificato in

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F}_i = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = -\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \partial_x U(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \end{cases} \quad (2.1)$$

Nel limite $N \rightarrow +\infty$, la correlazione che si crea tra una particella e l'altra sarà di ordine $1/N$, dunque ci si può aspettare che la gerarchia limite supporti soluzioni fattorizzate (cioè nel limite le particelle sono indipendenti). D'altra parte il contributo totale delle interazioni è di ordine 1, dunque l'equazione per la marginale a una particella sarà non banale.

L'equazione per f_1^N è infatti

$$\partial_t f_1^N + \mathbf{v}_1 \cdot \partial_{\mathbf{x}_1} f_1^N + (N-1) \frac{1}{N} \int F(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \partial_{\mathbf{v}_1} f_2^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_2 = 0.$$

Supponendo che nel limite $f_1^N \rightarrow f$ e che $f_2^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \rightarrow f(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) f(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2)$ si ottiene l'equazione di campo medio, che chiamerò un po' impropriamente equazione di Vlasov:

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \partial_x f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \left(\int F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}, \mathbf{w}) d\mathbf{y} d\mathbf{w} \right) \cdot \partial_v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0.$$

Supponendo che, più in generale $f_j^N \rightarrow f_j$ per $N \rightarrow +\infty$, la gerarchia diventa

$$\partial_t f_j + \sum_{i=1}^j \mathbf{v}_i \cdot \partial_{\mathbf{x}_i} f_j + \sum_{i=1}^j \int F(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{j+1}) \partial_{\mathbf{v}_i} f_{j+1}(\mathbf{x}_1^{j+1}, \mathbf{v}_1^{j+1}) d\mathbf{x}_{j+1} d\mathbf{v}_{j+1} = 0,$$

in cui il contributo di interazione tra le coppie di particelle è svanito, perché di ordine $1/N$, e ne rimane traccia solo nell'ultimo termine.

Lemma 2.1. *Si supponga che $f(x, v, t)$ risolva l'equazione di Vlasov. La gerarchia limite è soddisfatta da $f_j(x_1^j, x_1^j) = \prod_{i=1}^j f(x_i, v_i, t)$.*

Spiego perché si chiama campo medio. Supponiamo di prendere N particelle i.i.d. con densità $f(x, v)$. Allora, per la legge dei grandi numeri

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \rightarrow \int F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}, \mathbf{w}) d\mathbf{y} d\mathbf{w}.$$

Il campo di forze che sentono le particelle è dunque il campo di forze medio rispetto alla distribuzione di particelle.

2.1 Proprietà dell'equazione di Vlasov

Definisco

$$\mathcal{F}[f](\mathbf{x}) = \int F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}, \mathbf{w}) d\mathbf{y} d\mathbf{w}$$

che è il campo di forza generato da tutte le particelle, calcolato nel punto \mathbf{x} . In termini di questo campo, l'equazione di Vlasov è l'equazione di Liouville per il flusso a una particella

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_t = \mathbf{V}_t \\ \dot{\mathbf{V}}_t = \mathcal{F}[f_t](\mathbf{X}_t) \end{cases} \quad (2.2)$$

dove ho messo in evidenza la dipendenza da t di f , per sottolineare che non si tratta di un sistema autonomo. Il sistema rimane dunque hamiltoniano, di hamiltoniana

$$\frac{1}{2}v^2 + \int U(x-y)f(y, w, t) dy dw$$

che dipende dal tempo. Si noti che l'hamiltoniana è funzione di f che è funzione del flusso generato da f .

Lemma 2.2. *La quantità*

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int v^2 f(x, v, t) dx dv + \frac{1}{2} \int U(x-y)f(x, v, t)f(y, w, t) dx dv dy dw,$$

è conservata dall'equazione.

Si noti che la variazione prima in f di \mathcal{H} è

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f} = \frac{1}{2}v^2 + \int U(x-y)f(y, w) dy dw,$$

dunque

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \int \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f} \partial_t f$$

Sostituendo a $\partial_t f$ la sua espressione, si ottiene la tesi integrando per parti e notando che $\partial_v \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f} = v$ e $\partial_x \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f} = \mathcal{F}[f](x)$.

Si noti, infine, che, almeno formalmente, per $N \rightarrow +\infty$ l'energia del sistema di particelle tende a \mathcal{H} .

La soluzione dell'equazione di Liouville in forma debole è data dall'uguaglianza

$$\int \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) f_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) dx dv = \int \phi(\mathbf{X}_t(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}_t(\mathbf{x}, \mathbf{v})) f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) dx dv. \quad (2.3)$$

La coppia di equazioni (2.2), (2.3) costituisce una formulazione debole per l'equazione di Vlasov, e va letta in questo senso: la soluzione dell'equazione di Liouville è data dal trasporto del dato iniziale lungo il flusso generato dalla soluzione stessa. Per dare sostanza a questa affermazione, osservo intanto che la soluzione della (2.3) ha in genere senso per misure (di probabilità), se il flusso è ben definito. Si tratta dunque di stabile sotto quali condizioni il flusso è ben definito.

Lemma 2.3 (Proprietà del campo). *Sia U un potenziale regolare limitato a supporto compatto; sia $F = -\partial_x U$ e sia M il massimo di F e ℓ la sua costante di Lipschitz. Sia μ una misura di probabilità.*

$$|\mathcal{F}[\mu](\mathbf{x})| \leq M, \quad |\mathcal{F}[\mu](\mathbf{x}) - \mathcal{F}[\mu](\mathbf{y})| \leq \ell |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

La dimostrazione è elementare e la ometto. Questo lemma assicura che data f_t non ci sono problemi nella definizione del flusso, a parte eventualmente la continuità in t del campo.

Si può dunque sperare di ottenere un risultato di esistenza e unicità per le soluzioni nella formulazione debole data sopra, nella classe delle misure. Per lavorare in questa classe è utile definire la distanza di Kantorovich-Rubinstein, anche detta Wasserstein-1.

2.2 La distanza di Wasserstein

Definizione

Date due misure di probabilità μ e ν , la loro distanza di Wasserstein-1 è

$$W_1(\mu, \nu) = \inf_{P \in \Gamma(\mu, \nu)} \int |\mathbf{x} - \mathbf{y}| P(d\mathbf{x}, d\mathbf{y})$$

dove $\Gamma(\mu, \nu)$ è l'insieme delle misure congiunte di μ e ν , cioè delle misure P sullo spazio prodotto che hanno μ e ν come marginali. Il seguente teorema, la cui dimostrazione eccede gli scopi di questo corso, mostra l'utilità di questa nozione.

Teorema 2.1. *Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{R}^n . Sia \mathcal{M} l'insieme delle misure di probabilità su Ω . Allora W_1 è una metrica su \mathcal{M} , e \mathcal{M} è un compatto con tale metrica. Inoltre W_1 metrizza la convergenza debole nel senso delle misure, cioè*

$$\mu_n \rightharpoonup \mu \iff W_1(\mu_n, \mu) \rightarrow 0.$$

Ricordo che $\mu_n \rightharpoonup \mu$ per definizione se e solo se per ogni $\phi(\mathbf{x})$ continua a supporto compatto si ha

$$\int \phi(\mathbf{x}) \mu_n(d\mathbf{x}) \rightarrow \int \phi(\mathbf{x}) \mu(d\mathbf{x}).$$

Vale anche la seguente caratterizzazione **duale**:

Teorema 2.2. *Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{R}^n . Allora*

$$W_1(\mu, \nu) = \sup_{\varphi: Lip(\varphi) \leq 1} \int \varphi(d\mu - d\nu),$$

dove $Lip(\varphi)$ è la costante di Lipschitz di ϕ .

Esercizio 1.

Provare il \geq . Usare questo fatto per provare che se $W_1(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, allora $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

Teorema 2.3 (Distanza di Wasserstein-1). W_1 è una metrica.

Dimostrazione. La simmetria è ovvia. Inoltre, se $W_1(\mu, \nu) = 0$, allora per qualunque funzione lipschitziana

$$\int \phi d\mu = \int \phi d\nu,$$

e dunque la stessa affermazione vale per ϕ continua. Questo basta a dichiarare uguali le due misure. Viceversa, scegliendo $P(dx, dy) = \delta(x - y)\mu(dx) dy$, si ottiene $W_1(\mu, \mu) = 0$.

La prova della disuguaglianza triangolare richiede un po' di teoria della misura. L'idea è la seguente: sia $\gamma_{12}(dx_1, dx_2)$ una distribuzione congiunta di μ_1 e μ_2 , e sia $\gamma_{23}(dx_2, dx_3)$ una distribuzione congiunta di μ_2 e μ_3 . Supponiamo ora di saper costruire $\sigma(dx_1, dx_2, dx_3)$ tale che la marginale ottenuta integrando in dx_1 sia γ_{23} e la marginale ottenuta integrando in dx_3 sia γ_{12} . Indico con $\sigma_{13}(dx_1, dx_3)$ la marginale che si ottiene integrando in dx_2 . Evidentemente σ_{13} è una distribuzione congiunta di μ_1 e μ_2 . Infatti, integrando in dx_3 e commutando l'ordine di integrazione con dx_2 si ottiene l'integrale in dx_2 di γ_{23} , che è appunto μ_1 . Analogamente si prova che integrando in dx_1 si ottiene μ_3 .

Ne segue che

$$W_1(\mu_1, \mu_3) \leq \int |x_1 - x_3| \sigma(dx_1, dx_2, dx_3).$$

Sommando e sottraendo x_2 in $|x_1 - x_3|$ si ottiene

$$\begin{aligned} W_1(\mu_1, \mu_3) &\leq \int |x_1 - x_2| \sigma(dx_1, dx_2, dx_3) + \int |x_2 - x_3| \sigma(dx_1, dx_2, dx_3) \\ &= \int |x_1 - x_2| \gamma_{12}(dx_1, dx_2) + \int |x_2 - x_3| \gamma_{23}(dx_2, dx_3) \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di γ_{12} e γ_{23} si ottiene la tesi.

Resta da costruire σ . Per capire come fare, suppongo che γ_{ij} ammettano densità regolare rispetto a Lebesgue, che continuo a indicare con γ_{ij} e assumo che anche μ_2 abbia densità regolare g_2 . Allora $\gamma_{12}(x_1, x_2)/g_2(x_2)$ è la densità di probabilità della variabile x_1 , condizionata a x_2 . Si noti che questa espressione ha senso se viene posta a 0 dove $g_2(x_2)$ è nulla, e che se $g_2(x_2)$ è zero, allora anche $\gamma_{12}(x_1, x_2) = 0$ per qualunque x_1 . Analogamente $\gamma_{23}(x_2, x_3)/g_2(x_2)$ è la densità di probabilità della variabile x_3 , condizionata a x_2 . La densità di probabilità di σ si ottiene come

$$g_2(x_2) \frac{\gamma_{12}(x_1, x_2)}{g_2(x_2)} \frac{\gamma_{23}(x_2, x_3)}{g_2(x_2)}.$$

Si verifichi per esercizio che questa densità ha le proprietà richieste.

Nel caso di misure non assolutamente continue, si procede nello stesso modo. L'idea è che $\gamma_{12}(dx_1, dx_2)$ si possa scrivere come

$$\gamma_{12}(dx_1, dx_2) = \mu_2(dx_2) \Gamma_{12}(dx_1|x_2)$$

dove $\Gamma_{12}(dx_1|x_2)$ è la misura di probabilità di x_1 condizionata a x_2 . L'espressione precedente è la "disintegrazione" della misura congiunta, e l'esistenza μ_2 -q.o. della misura condizionata $\Gamma_{12}(dx_1|x_2)$ tale che valga la formula di disintegrazione è appunto una conseguenza del teorema di disintegrazione delle misure di probabilità.

La prova si conclude scegliendo

$$\sigma(dx_1, dx_2, dx_3) = \mu_2(dx_2) \Gamma_{12}(dx_1|x_2) \Gamma_{23}(dx_3|x_2).$$

□

Faccio ora un esempio per chiarire il senso della distanza di Wasserstein, considerando il caso di due distribuzioni singolari:

$$\begin{cases} \mu(d\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_1^n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbf{x} \\ \nu(d\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_1^n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}_i) d\mathbf{x} \end{cases}$$

dove i punti \mathbf{x}_i sono distinti tra loro, e i punti \mathbf{y}_i sono distinti tra loro. Qualunque distribuzione congiunta P di μ e di ν , ha necessariamente supporto sugli n^2 punti $\{(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)\}_{i,j}$ (lo si provi per esercizio). Dunque

$$P(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i,j} a_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_j) d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

con $a_{ij} \geq 0$ e

$$\sum_i a_{ij} = 1 = \sum_j a_{ij}$$

condizione che si ottiene imponendo che P sia una distribuzione congiunta. In pratica, la delta in \mathbf{x}_1 , viene “frantumata” in n porzioni, di masse a_{1j} , e la massa a_{1j} viene associata alla posizione \mathbf{y}_j . Si può pesare che la scelta degli a_{ij} sia un modo per **trasportare** μ in ν . Il corrispondente valore del funzionale è

$$\frac{1}{n} \sum_{ij} a_{ij} |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j|$$

e viene interpretato come **costo** associato al trasporto descritto da P attraverso la matrice a . Quindi la distanza W_1 tra μ e ν è il minimo costo che bisogna pagare per trasportare μ in ν . Si dimostra abbastanza facilmente che il modo migliore di trasportare n masse puntiformi uguali in n masse puntiformi uguali, si ottiene associando una e una sola massa iniziale a una e una sola massa finale, e quindi

$$\inf_{a_{ij}} \sum_{ij} a_{ij} |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j| = \min_{\pi} \sum_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_{\pi_i}|$$

dove π è una permutazione degli indici.

Questo problema discreto si incontra in molti campi della matematica, per esempio in ottimizzazione combinatoria, e a volte ha il nome di problema del matching bipartito, perché si vuole trovare il migliore accoppiamento di due sequenze di n punti, rispetto alla distanza. È risolubile numericamente con il cosiddetto *algoritmo ungherese*, con complessità polinomiale. Nel contesto del trasporto di massa, questo problema prende il nome di problema di Monge. Si può formulare anche al continuo, restringendo la ricerca della distribuzione congiunta P che garantisce il minimo costo, a quelle che si ottengono associando le misure attraverso una mappa nello spazio (in pratica un cambio di variabili). Il problema di trovare l'estremo inferiore sulle generiche distribuzioni congiunte è invece il problema del trasporto di massa nella formulazione di Kantorowich, che è più generale, ma si riduce al problema di Monge tranne che nei casi di misure con differenti tipi di singolarità.

2.3 Costruzione delle soluzioni

A questo punto abbiamo gli strumenti per costruire le soluzioni dell'equazione di Vlasov. Lo faremo in parte attraverso due lemmi; il primo che assicura che data f_t possiamo costruire un flusso con buone proprietà, il secondo che assicura che dato un flusso possiamo trasportare f_0 in f_t in modo da soddisfare le ipotesi che permettono di costruire il flusso. Infine, dovremo mettere insieme questi due aspetti.

Introduco una nuova notazione. Chiamo $\mathbf{Z}_t^f(\mathbf{z}) = (\mathbf{X}_t^f(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}_t^f(\mathbf{x}, \mathbf{v}))$ il flusso generato dalla densità di probabilità f (anche dipendente dal tempo), di dato iniziale $\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$.

Lemma 2.4 (Dipendenza del flusso dalla distribuzione). *Siano f_t e g_t due famiglie di misure di probabilità, con $t \in [0, T]$, con i supporti tutti contenuti in un chiuso limitato B . Siano inoltre debolmente continua in t , cioè $W_1(f_t, f_s), W_1(g_t, g_s) \rightarrow 0$ se $s \rightarrow t$.*

Allora $\mathcal{F}[f_t]$ e $\mathcal{F}[g_t]$ sono funzioni continue in t , i corrispondenti flussi sono ben definiti, e vale

$$|\mathbf{Z}_t^f(\mathbf{z}_1) - \mathbf{Z}_t^g(\mathbf{z}_2)| \leq e^{Lt} \left(|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2| + L \int_0^t ds W_1(f_s, g_s) \right). \quad (2.4)$$

per un'opportuna costante L .

Dimostro la (2.4). L'affermazione sulla continuità in t di $\mathcal{F}[f_t]$ si prova usando gli stessi argomenti, e la ometto. Scrivo in due flussi in forma integrale, indicando il campo nella coppia di variabili con

$$\begin{aligned}\mathcal{K}[f_t](\mathbf{z}) &= (\mathbf{y}, \mathcal{F}[f_t](\mathbf{x})). \\ \mathbf{Z}_t^f(\mathbf{z}_1) &= \mathbf{z}_1 + \int_0^t ds \mathcal{K}[f_s](\mathbf{Z}_s^f(\mathbf{z}_1)) \\ \mathbf{Z}_t^g(\mathbf{z}_2) &= \mathbf{z}_2 + \int_0^t ds \mathcal{K}[g_s](\mathbf{Z}_s^g(\mathbf{z}_2))\end{aligned}$$

Sottraendo

$$|\mathbf{Z}_t^f(\mathbf{z}_1) - \mathbf{Z}_t^g(\mathbf{z}_2)| \leq |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2| + \int_0^t ds |\mathcal{K}[f_s](\mathbf{Z}_s^f(\mathbf{z}_1)) - \mathcal{K}[g_s](\mathbf{Z}_s^g(\mathbf{z}_2))|$$

Per stimare l'ultimo termine, sommo e sottraggo il campo generato da f_t ma calcolato nel flusso generato da g , ottenendo i due termini

$$\begin{aligned}(1) &= |\mathcal{K}[f_s](\mathbf{Z}_s^f(\mathbf{z}_1)) - \mathcal{K}[f_s](\mathbf{Z}_s^g(\mathbf{z}_2))| \\ (2) &= |\mathcal{K}[f_s](\mathbf{Z}_s^g(\mathbf{z}_2)) - \mathcal{K}[g_s](\mathbf{Z}_s^g(\mathbf{z}_2))|\end{aligned}$$

Il primo termine si stima semplicemente usando la lipschitzianità del campo \mathcal{K} , con una costante di Lipschitz L che dipende dalla costante di Lipschitz di \mathbf{F} .

$$|\mathcal{K}[f_s](\mathbf{Z}_s^f(\mathbf{z}_1)) - \mathcal{K}[f_s](\mathbf{Z}_s^g(\mathbf{z}_2))| \leq L |(\mathbf{Z}_s^f(\mathbf{z}_1)) - (\mathbf{Z}_s^g(\mathbf{z}_2))|$$

Nel secondo caso si tratta di stimare in $\mathbf{z} = \mathbf{Z}_s^g(\mathbf{z}_2)$ la differenza

$$|\mathcal{K}[f_s](\mathbf{z}) - \mathcal{K}[g_s](\mathbf{z})| = |\mathcal{F}[f_s](\mathbf{x}) - \mathcal{F}[g_s](\mathbf{x})|$$

Questa stima è meno immediata, e qui interviene la distanza di Wasserstein.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_s](\mathbf{x}) - \mathcal{F}[g_s](\mathbf{x}) &= \int \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f_s(d\mathbf{x}, d\mathbf{v}) - \int \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g_s(d\mathbf{x}, d\mathbf{v}) \\ &= \int (\mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2)) P(d\mathbf{z}_1, d\mathbf{z}_2)\end{aligned}$$

per una qualunque distribuzione congiunta di f_s e g_s . Si verifichi questo fatto spezzando l'integrale e ricordando la definizione di distribuzione congiunta.

A questo punto siamo in grado fare la stima passando ai moduli e usando di nuovo la lipschitzianità di \mathbf{F} :

$$(2) \leq \ell \int |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2| P(d\mathbf{z}_1, d\mathbf{z}_2) \leq \ell \int |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2| P(d\mathbf{z}_1, d\mathbf{z}_2)$$

Passando all'estremo inferiore in P si ottiene

$$(2) \leq \ell W_1(f_s, g_s)$$

Mettendo insieme le due stime si ha

$$|\mathbf{Z}_t^f(\mathbf{z}_1) - \mathbf{Z}_t^g(\mathbf{z}_2)| \leq |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2| + L \int_0^t ds W_1(f_s, g_s) + L \int_0^t ds |\mathbf{Z}_s^f(\mathbf{z}_1) - \mathbf{Z}_s^g(\mathbf{z}_2)|$$

Usando il lemma di Gronwall "congelando" la dipendenza temporale del termine in W_1 , si ottiene la tesi (dettagli al lettore).

Lemma 2.5 (Dipendenza della distribuzione dal flusso). *Sia f_0 una distribuzione di probabilità con supporto in un compatto B_0 . Siano f_t^i , $i = 1, 2$ le soluzioni per $t \in [0, T]$ dell'equazione di Liouville di flussi \mathbf{Z}_t^i , generati dai campi di distribuzione g_t^i , di dati iniziali f_0^i . Le misure f_t^i hanno supporto in un compatto B che dipende solo da T , e sono debolmente continue in t . Inoltre esistono $C > 0$ e $\gamma \in (0, 1)$ tali che per T sufficientemente piccolo*

$$\sup_{t \in [0, T]} W_1(f_t^1, f_t^2) \leq CW_1(f_0^1, f_0^2) + \gamma \sup_{t \in [0, T]} W_1(g_t^1, g_t^2).$$

Poichè \mathbf{F} è limitato da M , è immediato concludere che $|\mathbf{V}^t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \leq Mt$, e che $|\mathbf{X}^t(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{x}| \leq Mt^2/2$. Queste disuguaglianze provano che f_t^i hanno supporto in un opportuno compatto B .

Sia $P_t(d\mathbf{z}_1, d\mathbf{z}_2)$ una distribuzione congiunta di f_t^1 e f_t^2 . Allora la scrittura

$$\int \phi(\mathbf{Z}_t^1(\mathbf{z}_1), \mathbf{Z}_t^2(\mathbf{z}_2)) P_0(d\mathbf{z}_1, d\mathbf{z}_2) = \int \phi(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) P_t(d\mathbf{z}_1, d\mathbf{z}_2)$$

definisce una distribuzione congiunta di f_0^1 e f_0^2 . Analogamente, ogni distribuzione congiunta di f_0^1 e f_0^2 viene mappata dai due flussi in una distribuzione congiunta di f_t^1, f_t^2 . Dunque, usando il lemma precedente

$$\begin{aligned} \int |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2| P_t(d\mathbf{z}_1, d\mathbf{z}_2) &= \int |(\mathbf{Z}_t^1(\mathbf{z}_1) - \mathbf{Z}_t^2(\mathbf{z}_2))| P_0(d\mathbf{z}_1, d\mathbf{z}_2) \\ &\leq e^{Lt} \int |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2| P_0(d\mathbf{z}_1, d\mathbf{z}_2) + e^{Lt} \int_0^t W_1(g_t^1, g_t^2) \end{aligned}$$

Passando all'estremo inferiore in P_0 si conclude che

$$W_1(f_t^1, f_t^2) \leq e^{Lt} W_1(f_0^1, f_0^2) + e^{Lt} \int_0^t W_1(g_t^1, g_t^2)$$

da cui, passando all'estremo superiore in $[0, T]$ per T sufficientemente piccolo si ottiene la tesi.

A questo punto è semplice costruire la soluzione.

Teorema 2.4. *Sai data f_0 misura di probabilità al tempo 0, con supporto in un compatto B_0 . L'equazione di Vlasov ammette un'unica soluzione debole di dato f_0 per $t \in [0, +\infty)$. La soluzione è debolmente continua nel dato iniziale.*

Sia T il tempo determinato nell'ultimo lemma, e sia g_t una famiglia di misure di probabilità a supporto in B e debolmente continua in t , con $g_0 = f_0$. Considera la mappa \mathcal{M}_t che associata a g la misura di probabilità $\mathcal{M}_t(g)$ soluzione al tempo t di dato iniziale f_0 ottenuta trasportando f_0 con il flusso generato da campo determinato da g_t . Per il lemma precedente, \mathcal{M}_t è una contrazione, nel senso

$$\sup_{t \in [0, T]} W_1(\mathcal{M}_t(g^1), \mathcal{M}_t(g^2)) \leq \gamma \sup_{t \in [0, T]} W_1(g_t^1, g_t^2),$$

con $\gamma < 1$. Quindi esiste $\{f_t\}_{t \in [0, T]}$ tale che

$$\mathcal{M}_t(f) = f_t,$$

che dunque risolve l'equazione di Vlasov. È facile mostrare l'unicità e la continuità nel dato iniziale (esercizio).

2.4 Il limite di campo medio

Teorema 2.5 (Limite di campo medio). *Sia $(\mathbf{x}_i^N(0), \mathbf{v}_i^N(0))$ un dato iniziale per il sistema (1.1), scelto nel compatto B_0 , e sia $(\mathbf{z}_i^N(t), \mathbf{v}_i^N(t))$ le corrispondenti soluzioni. Sia*

$$\mu_t^N(d\mathbf{x}, d\mathbf{v}) = \frac{1}{N} \sum_1^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^N(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^N(t)) d\mathbf{x} d\mathbf{v}$$

la misura empirica associata. Sia f_t una soluzione regolare dell'equazione di Vlasov. Se $\mu_0^N \rightharpoonup f_0$ allora $\mu_t^N \rightharpoonup f_t$.

La dimostrazione si basa sulla continuità nel dato iniziale delle soluzioni deboli dell'equazione di Vlasov, dopo aver notato che la misura empirica μ_t^N è in effetti una soluzione debole dell'equazione di Vlasov.

Lo dimostro. Intanto osservo che se nella (2.3) la funzione ϕ è di classe C^1 , derivando (2.3) nel tempo si ottiene, dopo qualche passaggio che lascio al lettore,

$$\partial_t \int \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) f_t(d\mathbf{x}, d\mathbf{v}) = \int (\mathbf{v} \cdot \partial_x \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \mathcal{F}[f_t](\mathbf{x}) \cdot \partial_v \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v})) f_t(d\mathbf{x}, d\mathbf{v}) \quad (2.5)$$

e questa equazione è equivalente alla (2.3) una volta fissato il dato iniziale f_0 . Infine, per densità, si prova che se vale (2.3) per ϕ di classe C^1 si ottiene che vale anche per ϕ continua. Questa equivalenza è utile perché è particolarmente semplice mostrare che la misura empirica risolve la (2.5). Infatti,

$$\dot{\mathbf{v}}_i^N(t) = \frac{1}{N} \sum_1^N \mathbf{F}(\mathbf{x}_i^N(t) - \mathbf{x}_j^N(t)) = \int \mathbf{F}(\mathbf{x}_i^N(t) - \mathbf{y}) \mu_t^N(d\mathbf{y}, d\mathbf{v}) = \mathcal{F}[\mu_t^N](\mathbf{x}_i^N(t))$$

La tesi segue notando che

$$\int \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mu_t^N(d\mathbf{y}, d\mathbf{v}) = \frac{1}{N} \sum_1^N \phi(\mathbf{x}_i^N(t), \mathbf{v}_i^N(t))$$

e dunque

$$\begin{aligned} \partial_t \int \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mu_t^N(d\mathbf{y}, d\mathbf{v}) &= \\ &= \frac{1}{N} \sum_1^N (\mathbf{v}_i^N(t) \cdot \partial_x \phi(\mathbf{x}_i^N(t), \mathbf{v}_i^N(t)) + \mathcal{F}[\mu_t^N](\mathbf{x}_i^N(t)) \cdot \partial_v \phi(\mathbf{x}_i^N(t), \mathbf{v}_i^N(t))) \end{aligned}$$

che è esattamente uguale al secondo membro della (2.5) calcolato in μ_t^N .

3 L'equazione di Boltzmann

Per introdurre l'equazione di Boltzmann è utile semplificare i dettagli della dinamica, considerando un modello di interazione di particelle molto semplificato, quello delle sfere dure: invece di considerare particelle microscopiche e un potenziale di interazione tra loro, si considerano particelle sferiche, che interagiscono solo tramite urti elastici. Si può anche ottenere per potenziali di interazione a corto range, in tal caso ci sarà solo una differente espressione del nucleo di collisione (che nel seguito verrà indicato con B), mentre l'equazione di Boltzmann ha la stessa struttura (vedi (3.3)).

3.1 Urti tra sfere dure

Supponiamo che le particelle abbiano diametro $r > 0$, e che a un certo istante di tempo vengano in contatto (urto). In tal caso le posizioni sono $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + r\mathbf{n}$ dove \mathbf{n} è il versore di $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Indico con \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 le velocità “entrantanti”, cioè prima dell’urto. Affinché l’urto possa accadere, le particelle si devono avvicinare. Supponiamo che l’urto avvenga al tempo $t = 0$. Prima dell’urto $t < 0$ e le posizioni delle particelle sono $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i + t\mathbf{v}_i$ dunque

$$|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|^2 = r^2 + 2tr\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + t^2|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2$$

che in $t = 0$ è crescente da sinistra solo se vale la condizione di urto

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) < 0.$$

(la stessa conclusione si poteva trarre da considerazioni geometriche). Dopo l’urto, la posizione delle particelle è invariata, ma cambiano le velocità. Indico con \mathbf{v}'_i le velocità “uscenti” e provo a determinarne l’espressione in termini delle velocità entranti.

Anche se l’urto è una descrizione semplificata di un’interazione, devono valere i principi della fisica. In particolare, deve conservarsi la quantità di moto (perché non ci sono forze esterne), e, nell’ipotesi di urto elastico, deve conservarsi l’energia. Per imporre queste due condizioni è utile scrivere le velocità in termini della velocità del baricentro e della semi-differenza:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2}, \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{2},$$

così che

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{w} & \mathbf{v}'_1 &= \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{w}' \\ \mathbf{v}_2 &= \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{w} & \mathbf{v}'_2 &= \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{w}'. \end{aligned} \quad \text{e}$$

Nell’ultima espressione ho usato che la velocità del baricentro si conserva, dunque

$$\frac{\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2}{2} = \bar{\mathbf{v}}$$

e ho indicato con \mathbf{w}' la semi-somma delle velocità uscenti. In questo modo mi sono assicurato la conservazione della quantità di moto nell’urto, e ho ridotto il problema alla determinazione di \mathbf{w}' .

Impongo la conservazione dell’energia cinetica

$$E = \frac{1}{2}(|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2) = |\bar{\mathbf{v}}|^2 + |\mathbf{w}|^2 = \frac{1}{2}(|\mathbf{v}'_1|^2 + |\mathbf{v}'_2|^2) = |\bar{\mathbf{v}}|^2 + |\mathbf{w}'|^2$$

che si riduce alla condizione

$$|\mathbf{w}'|^2 = |\mathbf{w}|^2.$$

Si noti che in un sistema unidimensionale ci sono solo due possibilità: $w' = w$ o $w' = -w$. Nel primo caso le velocità non cambiano nell’urto, nel secondo le particelle si scambiano le velocità (che è quello che accade colpendo in linea una biglia ferma con un’altra). Nel limite $r \rightarrow 0$ queste due possibilità danno lo stesso sistema: infatti nel secondo caso stiamo semplicemente scambiando il nome delle particelle dopo l’urto, senza nessuna variazione rispetto al moto libero.

In dimensione maggiore, la condizione di conservazione dell’energia non è evidentemente sufficiente a determinare il valore di \mathbf{w}' . Nel modello di sfere dure si aggiunge però una

richiesta ragionevole: che la variazione di impulso avvenga nella direzione di \mathbf{n} , cioè in modo perpendicolare alla superficie delle sfere urtanti. Si pensi per esempio a una sfera che urta contro una parete e rimbalza elasticamente: la componente normale della velocità cambia segno, le componenti tangenti restano costanti.

Indico con $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ la matrice di componenti $a_i b_j$ che dunque agisce sui vettori in questo modo

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \mathbf{v} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})$$

(la chiamerò un po' impropriamente "prodotto tensore"). Noto che $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ è l'operatore di proiezione lungo \mathbf{n} . Riscrivo la condizione di conservazione dell'energia imponendo che le componenti di \mathbf{w} ortogonali a \mathbf{n} non cambino, cioè che

$$(\mathbb{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{w}' = (\mathbb{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{w}.$$

Poiché $\mathbb{I} = (\mathbb{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ ottengo

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}')^2 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})^2$$

che mi dà due scelte, una per cui l'urto non avviene, e l'altra data da

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}$$

cioè la componente della velocità relativa lungo \mathbf{n} viene invertita dall'urto. Ora posso scrivere le velocità uscenti in funzione delle entranti:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_1 - ((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_2 + ((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{aligned}$$

Osservazione. Si noti che dopo l'urto $(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1) \cdot \mathbf{n} > 0$ (che è la condizione di velocità uscenti). Infine, si scrivano \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 in termini delle velocità uscenti: si noti che le espressioni sono invarianti. Quindi l'espressione precedente esprime anche le velocità entranti $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ in funzione delle velocità uscenti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

Osservazione. L'urto conserva la misura nello spazio delle velocità:

$$d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = 2 d\bar{v} d\mathbf{w} = 2 d\bar{v} d\mathbf{w}' = d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2$$

3.2 La gerarchia e il limite di bassa densità

La scrittura della gerarchia per la dinamica delle sfere dure presenta qualche difficoltà concettuale. Intanto qualche riflessione sul flusso dato dalla dinamica delle sfere dure. È definito su $\Omega_r = \{(\mathbf{x}_1^N, \mathbf{v}_1^N) \mid \forall i \neq j, |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| > r\}$. Si noti che se $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = r$ la dinamica è ancora ben definita: se le velocità sono uscenti il moto allontana $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$, se sono entranti prima avviene l'urto, e poi il moto allontana le particelle.

In Ω_r il moto è libero, ogni particella si muove di moto rettilineo a velocità costante fino a che non urta. Dunque $\Phi^t(\mathbf{z}_1^N)$ è ben definito in Ω_r , incluso il bordo, e fuori dal bordo coincide con il flusso libero. Dunque $\mathbf{x}_1^N(t)$ è una funzione continua, $\mathbf{v}_1^N(t)$ è una funzione costante a tratti.

C'è un'ulteriore difficoltà: bisogna escludere il caso di urti contemporanei di più particelle, in cui la dinamica non è definita (e non si può definire in modo da conservare la continuità nelle variabili spaziali: si pensi a due particelle di velocità opposte che collidono frontalmente,

e una terza, che urta con entrambe da una direzione ortogonale: perturbando di poco il tempo di urto delle prime due, la terza collide o con una o con l'altra, andando in direzioni differenti). Inoltre, bisogna assicurarsi che non si verificano infiniti urti in tempo finito (come invece può accadere con urti anelastici, che dissipano energia). Entrambe queste patologie si possono curare mostrando che l'insieme dei dati iniziali per cui la dinamica comporta urti multipli o infiniti urti in tempo finito è di misura nulla. Indico ancora con Ω_r questo insieme. L'equazione di Liouville in Ω_r è particolarmente semplice perché il moto è un flusso libero tra un urto e l'altro:

$$\partial_t f^N + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \partial_{\mathbf{x}_i} f^N = 0$$

La dinamica di urto si traduce in una proprietà al bordo. Assumeremo f^N continua, dunque quando $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i + r\mathbf{n}$:

$$f_t^N(\dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{v}'_i, \dots, \mathbf{v}'_j, \dots) = f_t^N(\dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots)$$

dove $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ sono le velocità entranti (dunque $(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{n} > 0$), e $\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j$ sono le velocità uscenti.

Per ottenere la gerarchia BBGKY bisogna integrare tenendo conto dei "buchi" nello spazio delle configurazioni. Per fare questi calcoli premetto un lemma che dà un'idea di come si fanno questi integrali.

Lemma 3.1. *Sia g una funzione di una o due variabili, regolare e a supporto compatto. Allora*

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>r} \partial_z g(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = - \int \mathbf{n} g(\mathbf{z}) \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{z}| = r) d\mathbf{z} = -r^2 \int_S \mathbf{n} g(\mathbf{x} + r\mathbf{n}) d\mathbf{n} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>r} \partial_x g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} &= \partial_x \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>r} g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} + \int \mathbf{n} g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{z}| = r) d\mathbf{z} \\ &= \partial_x \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>r} g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} + r^2 \int_S \mathbf{n} g(\mathbf{x}, \mathbf{x} + r\mathbf{n}) d\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

dove $\mathbf{n} = (\mathbf{z} - \mathbf{x})/|\mathbf{z} - \mathbf{x}|$.

Dimostrazione. Per la prima equazione:

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>r} \partial_z g(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{|\mathbf{y}|>r} \partial_y g(\mathbf{x} + \mathbf{y}) d\mathbf{y} = -r^2 \int_S \mathbf{n} g(\mathbf{x} + r\mathbf{n}) d\mathbf{n}$$

dove nel secondo passaggio ho usato che la normale esterna a S è opposta alla normale esterna al dominio di interazione, e che $r^2 d\mathbf{n}$ è la misura su $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| = r$.

Per la seconda equazione valuto

$$\partial_x \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>r} g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

cambio variabile di integrazione: $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ e ottenendo

$$\partial_x \int_{|\mathbf{y}|>r} g(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{|\mathbf{y}|>r} (\partial_x g(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) + \partial_y g(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y})) d\mathbf{y}.$$

Il primo termine è

$$\int_{|y|>r} \partial_x g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z},$$

il secondo è

$$\int_{|z-x|>r} \partial_z g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = - \int_{|z-x|=r} \mathbf{n} g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \sigma(dz)$$

dove \mathbf{n} è la normale esterna in \mathbf{z} sul bordo della palla e dove ho usato il teorema della divergenza. Poiché la palla ha raggio r , posso scrivere l'ultimo integrale come

$$-r^2 \int_S \mathbf{n} g(\mathbf{x}, \mathbf{x} + r\mathbf{n}) d\mathbf{n}$$

dove S è la superficie della palla unitaria. □

Torno alla gerarchia. Per semplicità ricavo solo l'equazione per la f_1^N , integrando in $d\mathbf{z}_2^N$. La parte in ∂_t dà semplicemente $\partial_t f_1^N$. Per l'altro termine va distinto $i = 1$ da $i > 1$.

Caso $i = 1$

In questo caso compare la derivata ∂_{x_1} , con \mathbf{x}_1 che non è una variabile di integrazione:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \int \partial_{x_1} f^N d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_N d\mathbf{v}_2 \dots d\mathbf{v}_N.$$

Da questo integrale deve venire il termine di flusso libero a una particella $\mathbf{v}_1 \cdot \partial_{x_1} f_1^N$, però non si può semplicemente permutare l'integrale con la derivata, perché il dominio di integrazione dipende da \mathbf{x}_1 . Procedo come per la prova di (3.2). Sia

$$\tilde{\Omega} = \{\mathbf{y}_2^N : \forall h, k \geq 2, k \neq h, |\mathbf{y}_h| > r, |\mathbf{y}_h - \mathbf{y}_k| > r\}.$$

Cambiando variabili di integrazione si ha:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{v}_1 \cdot \partial_{x_1} f^N d\mathbf{x}_2^N d\mathbf{v}_2^N &= \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{v}_1 \cdot \partial_{x_1} f^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_n, \mathbf{v}_1^N) d\mathbf{y}_2^N d\mathbf{v}_2^N \\ &= \mathbf{v}_1 \cdot \partial_{x_1} f_1^N - \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{v}_1 \cdot \partial_{x_1} [f^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_n, \mathbf{v}_1^N)] d\mathbf{y}_2^N d\mathbf{v}_2^N \\ &= \mathbf{v}_1 \cdot \partial_{x_1} f_1^N - \sum_{j=2}^N \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{v}_1 \cdot \partial_{y_j} f^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_n, \mathbf{v}_1^N) d\mathbf{y}_2^N d\mathbf{v}_2^N. \end{aligned}$$

Integro la derivata in ∂_{y_j} con il teorema della divergenza, ricordando che fissate le altre \mathbf{y}_h , $h \neq i$, il bordo è composto da $|\mathbf{y}_j| = r$ e $|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_h| = r$. Inoltre noto che l'integrale nelle $d\mathbf{z}_k$, con $k \neq 1, j$ dà f_2^N :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{v}_1 \cdot \partial_{y_j} f^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_n, \mathbf{v}_1^N) d\mathbf{y}_2^N d\mathbf{v}_2^N \\ = -r^2 \int d\mathbf{v}_j \int_S d\mathbf{n} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} f_2^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j) - \sum_{h \neq 1, j} \int \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_{hj} \delta(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_h| = r) f^N(\mathbf{z}_1^N) d\mathbf{z}_2^N \end{aligned}$$

Sommando anche in $j \geq 2$, la somma al secondo termine dà zero per simmetria, perché $\mathbf{n}_{hj} = -\mathbf{n}_{jh}$. Notando che la variabile di integrazione \mathbf{v}_j è una variabile muta, la somma in j del primo termine dà

$$(N-1)r^2 \int d\mathbf{v}_2 \int_S d\mathbf{n} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} f_2^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Caso $i \geq 2$

Per questi termini posso usare direttamente il teorema della divergenza nella variabile \mathbf{x}_i

$$\int \mathbf{v}_i \cdot \partial_{x_i} f^N d\mathbf{z}_2^N = - \sum_{j \neq i} \int \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_{ij} f^N(\mathbf{z}_1^N) \delta(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = r) d\mathbf{z}_2^N$$

Considero il contributo per $j = 1$: integrando nelle \mathbf{z}_h con $h \neq i$ si ottiene un'espressione che dipende dalla distribuzione congiunta delle particelle 1 e i , che, per invarianza per permutazioni, è esattamente la $f_2^N(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_i)$. Cambiando il nome delle variabili di integrazione e sommando su i si ottiene

$$-r^2(N-1) \int_S d\mathbf{v}_2 \int \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} f_2^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Ci sono ancora da considerare i contributi dati da $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k| = r$, con $k \neq 1, i$. Procedendo esattamente come sopra, integrando sulle variabili libere e rinominando $\mathbf{z}_i = \mathbf{z}_2$ e $\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_3$ si ha

$$I = -r^2 \int_S d\mathbf{n} \int \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} f_3^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}_3$$

Cambiando variabile di integrazione $\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_2 + r\mathbf{n}$, scambiando in f_3^N le variabili 2 e 3, e cambiando $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ si ottiene lo stesso integrale con \mathbf{v}_3 e il segno cambiato, dunque $I = -\frac{1}{2}r^2 \int_S d\mathbf{n} J$ dove

$$J = \int (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{n} f_3^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}_3$$

Mostro che J è nullo:

$$\begin{aligned} J &= \int (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{n} f_3^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3) d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}_3 \\ &= - \int (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_3) \cdot \mathbf{n} f_3^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3) d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}_3 \\ &= - \int (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_3) \cdot \mathbf{n} f_3^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3) d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}'_2 d\mathbf{v}'_3 \\ &= - \int (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{n} f_3^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}_3 = -J \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio ho usato che f_3^N è continua nell'urto, nel secondo che $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$ cambia segno nell'urto, nel terzo che $d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}_3 = d\mathbf{v}'_2 d\mathbf{v}'_3$, e infine nel quarto ho semplicemente rinominato le variabili. Poiché $J = -J$ l'integrale è nullo.

La prima equazione della gerarchia

Abbiamo ottenuto

$$\partial_t f_1^N + \mathbf{v}_1 \cdot \partial_{x_1} f_1^N = r^2(N-1) \int d\mathbf{v}_2 \int_S d\mathbf{n} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n} f_2^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

Per comprendere il significato di questa equazione separiamo l'integrale in $d\mathbf{n}$ in $\mathbf{n} \in S^+$, dove $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n} > 0$, e $\mathbf{n} \in S^-$, dove $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n} < 0$. L'equazione diventa

$$\partial_t f_2^N + \mathbf{v}_1 \cdot \partial_{x_1} f_2^N = G - L$$

dove il termine di segno positivo prende il nome di termine di “gain” ed è

$$G = \int d\mathbf{v}_2 \int_{S^+} d\mathbf{n} |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}| f_2^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2),$$

quello con il segno meno è il termine di “loss”

$$L = \int d\mathbf{v}_2 \int_{S^-} d\mathbf{n} |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}| f_2^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + r\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

Indaghiamo sul significato fisico di questi due termini. Una particella con velocità \mathbf{v}_1 , di raggio r in un tempo τ occupa nello spazio delle configurazioni una regione di volume di ordine $\tau|\mathbf{v}_1|r^2$. Nella direzione \mathbf{n} , il volume spannato è $\tau|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}|r^2$. Se $g(\mathbf{v}_2)$ è la densità di probabilità delle particelle con velocità \mathbf{v}_2 , e N è il numero di particelle, il numero di urti con particelle di velocità \mathbf{v}_2 nella direzione \mathbf{n} è

$$\tau|(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}|r^2Ng(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_2$$

Il termine $r^2|(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}|$ prende il nome di sezione d’urto, ed è la probabilità di un urto nella direzione \mathbf{n} tra particelle con velocità $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ nell’unità di tempo. Integrando in $d\mathbf{n}$ con $\mathbf{n} \in S^+$ si ottiene la sezione d’urto totale. Il **cammino libero medio** è la distanza che una particella percorre prima di urtare. Dall’espressione precedente si ottiene che la particella fa un solo urto se percorre uno spazio $\tau|\mathbf{v}_1|$ di ordine $1/(r^2N)$,

Passando al limite $N \rightarrow +\infty$, per ottenere un termine di ordine 1, è necessario che $r^2N = \lambda > 0$ sia fissato. Questo è il limite di **bassa densità**. In questo caso il cammino libero medio di una particella è di ordine $1/\lambda$, e quindi anche il tempo tra un urto e l’altro è di ordine $1/\lambda$ (si osservi che nel limite di campo medio il cammino libero medio è 0). In questo senso la densità è bassa: le particelle si muovono di moto libero, facendo un urto in un tempo di ordine 1. Il limite di bassa densità non è dunque adatto alla descrizione di un gas atmosferico in condizioni normali, ma lo è per esempio per i rarefatti gas della mesosfera ¹.

Torno al significato fisico dei due termini: nel termine di loss, si integra in tutti i possibili vettori di impatto \mathbf{n} e in tutte le possibili velocità \mathbf{v}_2 , con il peso dato dalla sezione di collisione. Questo termine è dunque la diminuzione di densità di probabilità in $\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1$, per unità di tempo, dovuta al fatto che le particelle di velocità \mathbf{v}_1 urtano e cambiano velocità. Al contrario, nel termine di gain \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono velocità uscenti, dunque integrando in \mathbf{v}_2 si ottiene l’aumento di densità di probabilità dovuto al fatto che due particelle di velocità $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ urtano e si ritrovano con velocità $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Ricordo che $|(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}| = |(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \cdot \mathbf{n}|$, quindi la sezione d’urto è quella corretta. È utile scrivere il termine di gain in termini di velocità entranti, usando la continuità di f_2^N nell’urto e cambiando variabile $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ (che non cambia l’espressione delle velocità entranti):

$$G = \int d\mathbf{v}_2 \int_{S^-} d\mathbf{n} |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}| f_2^N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 - r\mathbf{n}, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2).$$

¹C’è un modo più formale per giustificare questo nome. Fissiamo r , e osserviamo il sistema a tempi $1/\varepsilon$, e lunghezze 1ε , cioè usiamo le funzioni $f_j^{N,\varepsilon}(\mathbf{x}_1^j, \mathbf{v}_1^j, t) = \varepsilon^{-3j} f_j^{N,\varepsilon}(\mathbf{x}_1^j/\varepsilon, \mathbf{v}_1^j, t/\varepsilon)$. Si noti che le velocità non scalano perché spazio e tempo sono scalate nello stesso modo. Il fattore ε^{-3j} è necessario per mantenere la normalizzazione a 1. La prima equazione della gerarchia ha forma invariata, ma il coefficiente davanti ai termini di collisione va moltiplicato per ε^{-3} per la normalizzazione di f_1 , ε^6 per quella di f_2 , e ε per il riscaldamento spazio-temporale. In definitiva il coefficiente dei termini di collisione è $r^2\varepsilon^2N$. Fissando questo valore a λ , si ha che il numero di particelle in un cubo di lato $1/\varepsilon$ non va come il volume $1/\varepsilon^3$, ma come $1/\varepsilon^2$. Dunque si tratta di un limite di bassa densità

Nel limite $N \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow 0$, $Nr^2 \rightarrow \lambda$, ipotizzando che $f_2^N \rightarrow f_2$ e $f_1^N \rightarrow f_1$ si ottiene

$$\partial_t f_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \partial_{\mathbf{x}_1} f_1 = \lambda \int d\mathbf{v}_2 \int_{S^-} d\mathbf{n} |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}| (f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) - f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))$$

e equazioni analoghe per f_j con $j \geq 2$. Questa gerarchia di equazioni ammette soluzioni fattorizzate se $f_1 = f$ risolve l'equazione di Boltzmann, che si ottiene supponendo che

$$f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_2) f(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1),$$

ed è

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f = \lambda \int d\mathbf{v}_* \int_{S^+} d\mathbf{n} |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}| (f' f'_* - f f_*)$$

dove

$$f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad f_* = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_*)$$

è f calcolata nelle velocità precollisionali, e

$$f' = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'), \quad f'_* = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_*)$$

è f calcolata nelle velocità precollisionali con velocità uscenti \mathbf{v}, \mathbf{v}_* . Infine, poiché non c'è più dipendenza da \mathbf{n} nelle variabili spaziali, si può integrare su tutto S dividendo per 2. Infine, scalando λ di un coefficiente 2 si ottiene

$$\begin{aligned} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f &= \lambda Q(f, f) \\ Q(f, f) &= \int_S d\mathbf{n} \int d\mathbf{v}_* |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}| (f' f'_* - f f_*). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nel seguito porrò $\lambda = 1$.

Un'ultima complicata osservazione: per scrivere l'equazione abbiamo ipotizzato nel termine di loss che f_2 sia fattorizzata nelle variabili precollisionali, e lo stesso abbiamo fatto nel termine di gain. Se f_2 nel termine di gain si fattorizzasse nelle variabili uscenti i due termini si sarebbero compensati dando 0.

La prova rigorosa della validità dell'equazione di Boltzmann è estremamente sottile, ed è stata ottenuta da Lanford nel 1973, per tempi dell'ordine del tempo di collisione. La difficoltà non dovrebbe sorprendere, perché l'equazione di Boltzmann è un'equazione irreversibile, come vedremo nel prossimo paragrafo.

3.3 Proprietà dell'equazione di Boltzmann

Indico con $Q(f, f)$ il termine di collisione

$$Q(f, f) = \int d\mathbf{v}_* \int_S d\mathbf{n} B (f' f'_* - f f_*)$$

dove $B = B(|\mathbf{v} - \mathbf{v}_*|, \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*))$ è il nucleo di collisione, che dipende in generale da $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_*|$ e dall'angolo tra \mathbf{n} e $\mathbf{v} - \mathbf{v}_*$. Nel caso delle sfere dure è $|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)|$. Sia $\varphi(\mathbf{v})$ un qualunque osservabile regolare nelle velocità.

Lemma 3.2.

$$\begin{aligned} \int \varphi(\mathbf{v}) Q(f, f)(\mathbf{v}) d\mathbf{v} &= \frac{1}{4} \int d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* \int_S d\mathbf{n} B(f'f'_* - ff_*)(\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*) = \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* \int_S d\mathbf{n} Bff_*(\varphi + \varphi_* - \varphi' - \varphi'_*) \end{aligned}$$

La prova si basa sul fatto che $B(f'f'_* - ff_*)$ è invariante nello scambio $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}_*$, e cambia di segno nello scambio $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \leftrightarrow (\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*)$ mentre $d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* = d\mathbf{v}' d\mathbf{v}'_*$. Dettagli al lettore.

Per economia espositiva, discuto per ora dell'equazione di Boltzmann omogenea, cioè assumo $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v})$, pensando che \mathbf{x} viva in un dominio limitato senza bordo, in pratica in un toro. Si noti che l'integrale nella variabile \mathbf{v} di f non deve essere 1, ma l'inverso della misura del toro.

Teorema 3.1 (Quantità conservate). *Se f è una soluzione regolare dell'equazione di Boltzmann omogenea*

$$\partial_t f = Q(f, f)$$

allora si conservano

- *la densità spaziale di probabilità (che a volte chimerò densità di massa)*

$$\int f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \rho$$

- *la densità di quantità di moto*

$$\int \mathbf{v} f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \rho \mathbf{u},$$

dove \mathbf{u} è la velocità media

- *la densità di energia*

$$\frac{1}{2} \int |\mathbf{v}|^2 f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e$$

dove

$$e = \frac{1}{2\rho} \int |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

è l'energia interna specifica (cioè per unità di massa), anch'essa costante.

La prova è immediata, faccio solo notare che la decomposizione dell'energia si ottiene in questo modo:

$$\frac{1}{2} \int |\mathbf{v}|^2 f = \frac{1}{2} \int |\mathbf{v} - \mathbf{u} + \mathbf{u}|^2 f = \frac{1}{2} \int |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 f + \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} f + \frac{1}{2} \int |\mathbf{u}|^2 f$$

Il primo termine è ρe , il secondo è nullo perchè \mathbf{u} esce dall'integrale e l'integrale dà 0 perchè \mathbf{u} è la media di \mathbf{v} , il terzo è l'energia cinetica "del baricentro", cioè quella che si avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel baricentro, e vale $\rho |\mathbf{u}|^2 / 2$.

Teorema 3.2 (Il teorema H). *Sia f una soluzione regolare dell'equazione di Boltzmann omogenea. L'entropia $\mathcal{H}(f) = \int f \log f$ è una funzione crescente del tempo, inoltre f converge per $t \rightarrow +\infty$ alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann*

$$M_{\rho, \mathbf{u}, T} = \frac{\rho}{(2\pi T)^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2}{2T}}$$

dove T è la temperatura, con $e = \frac{3}{2}T$, e i parametri massa ρ , $\rho\mathbf{u}$, pe sono quelli del dato iniziale.

Dimostrazione.

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(f) = \int (\log f + 1) \partial_t f = \int \log f Q(f, f)$$

dove nell'ultima uguaglianza ho usato che $\int \partial_t f = \partial_t \int f = 0$. Usando il lemma con $\varphi = \log f$ si ottiene

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(f) = \frac{1}{4} \int B \log \frac{ff_*}{f'f'_*} (f'f'_* - ff_*)$$

che è negativo perchè $(x - y) \log(y/x) \leq 0$, ed è zero solo se $x = y$.

Determino possibili equilibri del sistema. Deve valere $f'f'_* = ff_*$, ovvero $\log f' + \log f'_* = \log f + \log f_*$, cioè $\log f$ è un **invariante di collisione**. Si può mostrare che gli unici invarianti di collisione sono le combinazioni lineari di 1, delle componenti di \mathbf{v} e di $|\mathbf{v}|^2$. Imponendo tale condizione si ottiene $\log f(\mathbf{v}) = a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + c|\mathbf{v}|^2$, dove a, \mathbf{b}, c sono cinque costanti. Quindi f è l'esponenziale del membro di destra. Imponendo che l'equilibrio abbia gli stessi parametri conservati del dato iniziale, si ottiene l'espressione della maxwelliana data sopra (dettagli al lettore. si noti solo che la maxwelliana ha 'matrice di covarianza' $\rho T \mathbb{I}$, dunque il valore atteso di $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2$ è $3\rho T$).

Fissati gli integrali primi, l'equilibrio è unico, e si può mostrare, con una sorta di teorema di Liapunov, che effettivamente $f(t) \rightarrow M$. □

Proposizione 3.1 (Estremi dell'entropia). *Sia $\mathcal{M}_{\rho, \mathbf{u}, T}$ l'insieme delle misure di probabilità nelle \mathbf{v} con ρ, \mathbf{u}, T fissati. L'entropia \mathcal{H} è un funzionale convesso su $\mathcal{M}_{\rho, \mathbf{u}, T}$ e ha un minimo stretto in $M_{\rho, \mathbf{u}, T}$.*

Il minimo di \mathcal{H} è raggiunto nella maxwelliana $M_{\rho, \mathbf{u}, T}$.

Dimostrazione. Si noti che affinché \mathcal{H} sia definita è necessario che f sia a.c. rispetto a Lebesgue. \mathcal{H} viene definita $+\infty$ se questa condizione non è soddisfatta. Si ottiene facilmente che $M_{\rho, \mathbf{u}, T}$ è l'unico punto stazionario di \mathcal{H} in \mathcal{M} minimizzando \mathcal{H} con i moltiplicatori di Lagrange per i parametri idrodinamici ρ, \mathbf{u}, T . □

Infine, poiché il termine $\mathbf{v} \cdot \partial_x f$ coincide con il termine di divergenza $\text{div}_x(\mathbf{v}f)$, sia ha che per ogni osservabile della sola variabile \mathbf{v}

$$\int d\mathbf{x} \int d\mathbf{v} \varphi(\mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \partial_x f = \int d\mathbf{x} \text{div}_x \left(\int d\mathbf{v} \varphi(\mathbf{v}) \mathbf{v} f \right) = 0$$

per il teorema della divergenza (assumendo che f decada abbastanza rapidamente a infinito, per esempio che sia supporto compatto in \mathbf{x} , o che il dominio sia un toro). Da questa osservazione discende il seguente teorema

Teorema 3.3 (Quantità conservate - caso non omogeneo). *Se f è una soluzione regolare dell'equazione di Boltzmann*

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \partial_x f = Q(f, f)$$

allora si conservano

- *la probabilità totale*

$$\int f(\mathbf{v}, t) \, d\mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 1$$

- *la quantità di moto totale*

$$\int \mathbf{v} f(\mathbf{v}, t) \, d\mathbf{v} \, d\mathbf{x}$$

- *l'energia totale*

$$\frac{1}{2} \int |\mathbf{v}|^2 f(\mathbf{v}, t) \, d\mathbf{v} \, d\mathbf{x}$$

Inoltre l'entropia $\int \mathcal{H}(f) \, d\mathbf{x}$ decresce.

Si noti che tutti i teoremi precedenti sono solo formali, perché non sono inseriti in una teoria che inizia con risultati di esistenza e unicità (che comunque è disponibile per il caso omogeneo).

3.4 Il limite idrodinamico

L'esistenza degli invarianti di collisione suggerisce la possibilità di ottenere equazioni per le quantità macroscopiche legate agli invarianti, integrando nella sola variabile \mathbf{v} . Per esempio, integrando in \mathbf{v} l'equazione, e usando che $\int Q(f, f) \, d\mathbf{v} = 0$, si ottiene la prima equazione dell'idrodinamica, l'**equazione di continuità**:

$$\partial_t \int f \, d\mathbf{v} + \operatorname{div}_x \int \mathbf{v} f \, d\mathbf{v} = 0$$

Definendo

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \, d\mathbf{v}, \quad \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} \, d\mathbf{v}$$

l'equazione precedente diventa

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) = 0$$

che esprime la **legge di conservazione** della massa. Infatti afferma che la **corrente** della densità di massa è proprio l'impulso $\rho \mathbf{u}$ (si veda l'introduzione all'equazione di Liouville per chiarire questa affermazione).

Moltiplicando l'equazione di Boltzmann per \mathbf{v} e integrando in \mathbf{v} si ottiene

$$\partial_t \int \mathbf{v} f \, d\mathbf{v} + \operatorname{div}_x \int \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} f \, d\mathbf{v} = 0$$

dove, se A è una matrice $n \times n$, con $\operatorname{div}_x A$ si intende il vettore composto dalle divergenze delle righe di A :

$$(\operatorname{div}_x A)_i = \sum \partial_{x_j} A_{ij}.$$

Il primo termine dell'equazione è semplicemente $\partial_t(\rho\mathbf{u})$. Il secondo richiede qualche manipolazione per essere compreso meglio:

$$\begin{aligned}\int \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} f \, d\mathbf{v} &= \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} f \, d\mathbf{v} + \mathbf{u} \otimes \int \mathbf{v} f \, d\mathbf{v} \\ &= \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f \, d\mathbf{v} + \left(\int (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f \, d\mathbf{v} \right) \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \int \mathbf{v} f \, d\mathbf{v}\end{aligned}$$

Il terzo termine è $\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$, il secondo è nullo, perché la media di \mathbf{v} è proprio \mathbf{u} , il primo termine è una matrice (un tensore) che indico con N . Osservo che la traccia di N è

$$\text{Tr } N = \text{Tr} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f \, d\mathbf{v} = \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f \, d\mathbf{v} = 3\rho T = 2\rho e,$$

dove con $e = e(\mathbf{x}, t)$ indico la densità di energia interna per unità di massa (energia specifica). Dunque l'equazione del **bilancio della quantità di moto** è

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \text{div}_x(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\text{div}_x N$$

I due termini hanno due interpretazioni differenti: il primo è un termine di corrente, e infatti dipende solo da ρ e \mathbf{u} . Il termine a destra è un termine dovuto a cambiamenti in \mathbf{v} della distribuzione f . In idrodinamica questo termine è legato alle "forze interne" al fluido. Moltiplicando per $|\mathbf{v}|^2$ e integrando si ottiene l'equazione del **bilancio dell'energia**:

$$\partial_t \frac{1}{2} \int |\mathbf{v}|^2 f \, d\mathbf{v} + \text{div}_x \frac{1}{2} \int |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} f \, d\mathbf{v} = 0$$

Sommando e sottraendo \mathbf{u} , il primo termine dà facilmente

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e \right)$$

Per il secondo termine

$$\begin{aligned}\int |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} f &= \mathbf{u}(\rho |\mathbf{u}|^2 + 2\rho e) + \int |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f \\ &= \mathbf{u}(\rho |\mathbf{u}|^2 + 2\rho e) + \int |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f + 2 \left(\int (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f \right) \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2 \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f\end{aligned}$$

Nell'ultima riga, il quarto termine è nullo, il terzo è $2N\mathbf{u}$, il secondo lo denoto con \mathbf{q} . L'equazione del bilancio dell'energia è dunque

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + 2\rho e \right) + \text{div}_x \left(\left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + 2\rho e \right) \mathbf{u} \right) = -\text{div}_x(N\mathbf{u}) - \text{div}_x \mathbf{q}.$$

Il termine di sinistra è un termine di corrente, a destra ci sono i termini dovuti al modificarsi della distribuzione in \mathbf{v} .

Le tre equazioni che abbiamo ottenuto hanno la stessa struttura delle equazioni che si ottengono in idrodinamica invocando le equazioni di Newton (con l'aggiunta del teorema di Cauchy sul tensore degli sforzi):

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \text{div}(\rho\mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t(\rho\mathbf{u}) + \text{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \text{div} S \\ \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + 2\rho e \right) + \text{div} \left(\left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + 2\rho e \right) \mathbf{u} \right) &= \text{div}(S\mathbf{u}) - \text{div } \mathbf{q}\end{aligned}$$

dove S è il tensore degli sforzi, \mathbf{q} il flusso di calore, che nel nostro caso sono espressi in termini di osservabili in \mathbf{v} .

Questo fatto non sorprende perché queste equazioni esprimono esattamente la conservazione “microscopica” di massa, quantità di moto ed energia, che sono le conseguenze dei principi della dinamica. In ogni caso si tratta di un sistema di equazioni che **non è chiuso**. Infatti, nei termini di destra compaiono quantità di un ordine superiore in \mathbf{v} rispetto a quelli di sinistra. In idrodinamica questo problema, viene affrontato modellizzando più o meno rigorosamente il tensore degli sforzi S e il flusso di calore \mathbf{q} , in funzione dei campi idrodinamici (ρ, \mathbf{u}, e) .

A partire dall'equazione di Boltzmann, c'è un modo rigoroso di derivare le equazioni dell'idrodinamica, attraverso il così detto **limite idrodinamico**, riuscendo a esprimere N e \mathbf{q} in termini dei campi idrodinamici. Si procede con uno *scaling* idrodinamico, cioè si osserva il sistema su scale temporali e spaziali grandi, di ordine $1/\varepsilon$, dove ε sarà un parametro piccolo:

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{v}, t/\varepsilon)$$

Si noti che f^ε è valutata in variabili spazio-temporali di ordine 1 se f è valutata in variabili di ordine $1/\varepsilon$. Inoltre, non si mantiene la normalizzazione (che implicherebbe f^ε localmente divergente). La velocità non viene scalata, perché spazio e tempo scalano nello stesso modo. L'equazione di Boltzmann diventa

$$\partial_t f^\varepsilon + \mathbf{v} \cdot \partial_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f^\varepsilon, f^\varepsilon)$$

Mandare ε a zero vuol dire operare un cosiddetto “limite singolare”, infatti, portando ε all'altro membro, stiamo mandando a zero i termini con le derivate. Questo implica che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q(f^\varepsilon, f^\varepsilon)$ deve essere 0. Questo può accadere se f^ε converge a una maxwelliana, per ogni valore di \mathbf{x} . I parametri della maxwelliana però possono dipendere da \mathbf{x} , ma in tal caso devono essere governati dalle equazioni dell'idrodinamica.

Lo spiego meglio: supponiamo che

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = M_{\rho, \mathbf{u}, T} + O(\varepsilon)$$

con ρ, \mathbf{u}, T dipendenti da \mathbf{x} e t e da determinare. All'ordine ε^{-1} l'equazione di Boltzmann è risolta, perché Q è nullo sulle maxwelliane. Nelle equazioni dell'idrodinamica, i membri di destra sono ora esplicitamente calcolabili, a meno di $O(\varepsilon)$, infatti, per esempio,

$$N = \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f^\varepsilon = \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}) M_{\rho, \mathbf{u}, T} + O(\varepsilon)$$

L'integrale è facilmente computabile, ricordando che

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\xi \xi \otimes \xi e^{-|\xi|^2/2} = \frac{1}{3} \mathbb{I}.$$

si ottiene

$$N = \rho T \mathbb{I} + O(\varepsilon).$$

Il calcolo di \mathbf{q} è più semplice, perché le maxwelliane sono pari nella variabile $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, quindi \mathbf{q} è 0 al primo ordine in ε . Dunque nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ ci si aspetta di ottenere

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= -\partial_x(\rho T) \\ \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + 2\rho e \right) + \operatorname{div}_x \left(\left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + 2\rho e \right) \mathbf{u} \right) &= -\operatorname{div}_x(\rho T \mathbf{u}) \end{aligned}$$

dove $e = \frac{3}{2}T$. Queste sono le equazioni dell'idrodinamica di un **gas perfetto**, infatti nel bilancio della quantità di moto compare $-\partial_x(\rho T)$ che si identifica con il gradiente della pressione e la pressione è ρT , data dalla legge di stato dei gas perfetti (a meno di coefficienti). Nell'equazione del bilancio dell'energia si è annullato il termine di diffusione del calore. Attraverso qualche manipolazione che non faccio, si ottiene che la terza equazione equivale ad affermare che l'entropia specifica è trasportata dal campo \mathbf{u} . Dunque stiamo descrivendo un gas isoentropico, in cui, appunto, non c'è scambio di calore tra le parti. Questa derivazione può essere resa rigorosa, attraverso la cosiddetta **espansione di Hilbert** che permette di trovare una soluzione f^ε dell'equazione di Boltzmann intorno alla maxwelliana con i campi che obbediscono alle equazioni dell'idrodinamica dei gas perfetti.