Esonero di Istituzioni di Fisica Matematica, 4 giugno 2021
compito A

Esercizio 1.

Sia T l'operatore integrale da $L^2((-1,1);\mathbb{R})$ definito come

$$Tf(x) = \mathcal{X}\{x \in (-1,0)\} \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y + \mathcal{X}\{x \in (0,1)\} \int_{-1}^0 f(y)\,\mathrm{d}y.$$

a. Trova l'aggiunto.

Si tratta di un operatore integrale, di nucleo

$$\mathcal{X}\{x \in (-1,0)\}\mathcal{X}\{y \in (0,1)\} + \mathcal{X}\{x \in (0,1)\}\mathcal{X}\{y \in (-1,0)\}$$

che è invariante nello scambio $x \leftrightarrow y$. Dunque T è autoaggiunto.

b. Trova autovalori e autofunzioni.

T è un operatore di rango finito, dunque $\lambda = 0$ è autovalore, e il corrispondente autospazio è formato dalle funzioni ortogonali a $\mathcal{X}\{x \in (-1,0)\}$ e $\mathcal{X}\{x \in (0,1)\}$, cioè le funzioni che hanno integrale nullo sia in $(-1,0)$, sia in $(0,1)$.

Per trovare gli altri autovalori si deve risolvere l'equazione

$$\lambda f(x) = c^+ \mathcal{X}\{x \in (-1,0)\} + c^- \mathcal{X}\{x \in (0,1)\}$$

dove

$$c^+ = \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y, \quad c^- = \int_{-1}^0 f(y)\,\mathrm{d}y.$$

e che ha soluzione se e solo se si possono determinare i valori di $c^\pm$. Integrando in $(-1,0)$ e in $(0,1)$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \lambda c^- = c^+ \\ \lambda c^+ = c^- \end{cases}$$

che ha soluzione nulla se $\lambda \neq \pm 1$. Se $\lambda = 1$ si ha $c^+ = c^-$, se $\lambda = -1$ si ha $c^+ = -c^-$.

Dunque $\lambda = 1$ è autovalore, e le corrispondenti autofunzioni sono lo span di

$$\mathcal{X}\{x \in (-1,0)\} + \mathcal{X}\{x \in (0,1)\}$$

che coincide con le costanti (nel senso q.o.).

Anche $\lambda = -1$ è autovalore, e le corrispondenti autofunzioni sono lo span di

$$\mathcal{X}\{x \in (-1,0)\} - \mathcal{X}\{x \in (0,1)\}$$

che è lo span della funzione segno.

c. Risolvi al variare di $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$\lambda f(x) - Tf(x) = 1 - \alpha \,\mathrm{sign\ x}.$$

Procedendo come sopra, si ottiene che

$$\lambda f(x) = c^+ \mathcal{X}\{x \in (-1,0)\} + c^- \mathcal{X}\{x \in (0,1)\} + 1 - \alpha \,\mathrm{sign\ x}$$

che permette di trovare f se $\lambda \neq 0$. In tal caso $c^{\pm}$ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \lambda c^{-} = c^{+} + 1 + \alpha \\ \lambda c^{+} = c^{-} + 1 - \alpha \end{cases}$$

che per $\lambda \neq 0$ ha soluzione

$$\begin{cases} c^{-} = 1/(\lambda - 1) + \alpha/(\lambda + 1) \\ c^{+} = 1/(\lambda - 1) - \alpha/(\lambda + 1) \end{cases}$$

Nel caso $\lambda = 1$ il sistema non ha soluzioni qualunque sia α. Nel caso $\lambda = -1$ il sistema ha soluzioni solo se $\alpha = 0$. In tal caso, $f(x) = 1/2 + c\,\mathrm{sign}\,(\mathrm{x})$.

Rimane da considerare il caso $\lambda = 0$. Il range di T è generato da

$$\mathcal{X}\{x \in (-1, 0)\},\ \mathcal{X}\{x \in (0, 1)\}$$

quindi coincide

$$\mathrm{span}\{1, \mathrm{sign}\,(\mathrm{x})\}.$$

Pertanto l'equazione $Tf + 1 - \alpha\,\mathrm{sign}\ \mathrm{x} = 0$ ha soluzione per qualunque α.

d. Trova $\|T\|$.

Poiché T è compatto e autoaggiunto, la sua norma coincide con il modulo dell'autovalore di massimo modulo, che in questo caso vale 1.

Esercizio 2.

Sia K l'operatore da $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$ in sé definito come

$$K\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}g(-x) \\ -\mathrm{i}f(x) \end{pmatrix}.$$

a. Trova l'aggiunto.

Per trovare l'aggiunto calcolo il membro di destra di

$$\left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, K^*\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \overline{\left(K^*\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right)} = \overline{\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, K\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right)}$$

Si ottiene

$$\int_R \left(\alpha(x) \cdot (-\mathrm{i}\bar{g}(-x)) + \beta(x) \cdot (\mathrm{i}\bar{f}(x))\right)$$

che è uguale a

$$\int_R \left(\bar{g}(x) \cdot (-\mathrm{i}\alpha(-x)) + \bar{f}(x) \cdot (\mathrm{i}\beta(x))\right)$$

Pertanto,

$$K^*\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\beta(x) \\ -\mathrm{i}\alpha(-x) \end{pmatrix}.$$

b. Mostra che è un'isometria.

$$\left(K\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, K\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) = \int_{\mathbb{R}} ((-\mathrm{i}\bar{g}(-x))(\mathrm{i}g(-x) + (\mathrm{i}\bar{f}(x))(-\mathrm{i}f(x)) = \int_{\mathbb{R}} (|g|^2 + |f|^2)$$

In alternativa, si mostra facilmente che $K^*K = \mathbf{I} = KK^*$, per cui l'operatore è unitario, e dunque in particolare conserva il prodotto scalare.

c. Trova lo spettro

Poiché l'operatore è unitario, lo spettro è sulla circoferenza unitaria del piano complesso.

Determino il risovente, provando a risolvere l'equazione

$$\lambda K - K \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \lambda f(x) = \mathrm{i} g(-x) + \alpha(x) \\ \lambda g(x) = -\mathrm{i} f(x) + \beta(x) \end{cases} \tag{1}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$f(x) = \mathrm{i}\lambda g(x) - \mathrm{i}\beta(x) \tag{2}$$

Inserendo questa espressione nella prima equazione si ottiene

$$\mathrm{i}\lambda^2 g(x) - \mathrm{i}\lambda\beta(x) = \mathrm{i}g(-x) + \alpha(x)$$

che dividendo per i diventa

$$\lambda^2 g(x) - \lambda\beta(x) = g(-x) - \mathrm{i}\alpha(x) \tag{3}$$

Decomponendo $g(x) = g^+(x) + g^-(-x)$, con $g^\pm$ definite in $\mathbb{R}^+$, e decomponendo analogamente le altre funzioni, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \lambda^2 g^+ - \lambda\beta^+ = g^- - \mathrm{i}\alpha^+ \\ \lambda^2 g^- - \lambda\beta^- = g^+ - \mathrm{i}\alpha^- \end{cases} \tag{4}$$

da cui, moltiplicando per λ^2 la prima equazione e sostituendovi dentro il valore di $\lambda^2 g^-$ che si ottiene dalla seconda, si ha infine

$$\lambda^4 g^+ = g^+ + \lambda^3\beta^+ + \lambda\beta^- - \mathrm{i}\lambda^2\alpha^+ - \mathrm{i}\alpha^-. \tag{5}$$

Questa equazione è risolubile in g^+ non appena $\lambda^4 \neq 1$. Dunque lo spettro si riduce al più ai punti ± 1, $\pm \mathrm{i}$, tutto il resto del piano complesso è nel risolvente. Verifico che questi punti sono nello spettro puntuale. L'equazione (5) per $\alpha = 0 = \beta$ diventa

$$(\lambda^4 - 1) g^+ = 0$$

Dunque se $\lambda^4 = 1$, g^+ è una funzione arbitraria. Dalla prima equazione del sistema (4), si ottiene che $g^- = \lambda^2 g^+$ dunque g è pari se $\lambda = \pm 1$, è dispari se $\lambda = \pm \mathrm{i}$. Infine, dalla (2), $f = \mathrm{i}\lambda g$, cioè $f = \pm \mathrm{i} g$ se $\lambda = \pm 1$, e $f = \mp g$ se $\lambda = \pm \mathrm{i}$.

Se ne conclude che $\sigma(K) = \sigma_p(K) = \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.