

# Istituzioni di Fisica Matematica 2020 - Programma medio/completo

2 giugno 2021

Come guida all'orale, qui trovate gli argomenti divisi in **programma medio**, **programma completo**. Lo scopo di questa distinzione è preparare un percorso di studio con una sua coerenza, per chi di voi, per una qualche ragione, investirà meno risorse nella preparazione di questo esame.

Chiarisco la distinzione tra le varianti del programma.

- Mostrare incompetenza sui punti del programma medio non consente di superare l'esame.
- Il **programma medio** contiene gli argomenti essenziali al raggiungimento degli obiettivi del corso, e alcuni altri argomenti di maggiore complessità. Una buona conoscenza degli argomenti del programma medio garantisce il superamento dell'esame con una votazione intorno al 25. Il programma medio contiene gli autovalori del laplaciano [Teoria del potenziale: argomento 1].
- Il **programma completo** contiene tutti gli argomenti (a meno dell'osservazione seguente).
- Gli argomenti in **magenta** sono alternativi: o portate la teoria del potenziale [Teoria del potenziale: argomenti 2-9], o l'introduzione ai qubit [Qubit: argomenti 1-4]. Naturalmente se qualcuno vuole portarli entrambi non mi oppongo...

## Indice

## Meccanica hamiltoniana [h20]

- 1 Flussi e campi vettoriali. L'equazione di Liouville e l'equazione del trasporto associate a un flusso.
- 2 Metodo delle caratteristiche per le EDP del primo ordine. L'equazione di Hamilton-Jacobi e le equazioni di Hamilton
- 3 Principio variazionale per le equazioni di Hamilton. La trasformata di Legendre e il legame con i sistemi lagrangiani.
- 4 Teoremi del ritorno di Poicaré.
- 5 Trasformazioni canoniche, trasformazioni simplettiche, matrici simplettiche.
- 6 Parentesi di Poisson.
- 7 Commutatori di operatori e di campi. Commutazione dei flussi.
- 8 Teorema di Noether per sistemi hamiltoniani.
- 9 Funzioni generatrici.
- 10 Metodo di Hamilton-Jacobi
- 11 Teorema di integrabilità locale di Liouville [solo enunciato] [dimostrazione]
- 12 Teorema di integrabilità globale di Arnold-Liouville. [solo enunciato] [dimostrazione]
- 13 Variabili azione-angolo.
- 14 Moti quasi periodici sul toro; ergodicità.
- 15 L'equazione di Liouville per  $N$  particelle e la gerarchia BBGKY
- 16 Il limite di campo medio e l'equazione di Vlasov (formale)
- 17 Distanza di Wassertien e limite di campo medio (dimostrazione).

## Spazi di Hilbert [ifm20, cap. 2]

- 1 Spazi di Hilbert reali e complessi. Esempi  $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ , con  $\Omega$  dominio di  $\mathbb{R}^n$ ,  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ,  $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ . Spazi  $L^2$  con pesi.
- 2 Sottospazi lineari chiusi e non. Ortogonale di un sottospazio.
- 3 Identità del parallelogramma e Teorema della proiezione in spazi di Hilber complessi.
- 4 Sistemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel; spazi separabili e sistemi ortonormali completi (basi), Identità di Parseval. Basi in spazi prodotto (enunciato)
- 5 Ortogonalizzazione di Gramm-Schmidt, esistenza di basi in spazi separabili.
- 6 Base di Fourier.
- 7 Completezza della base di Fourier.
- 8 La base di Haar in  $L^2[0, 1]$  e in  $L^2(\mathbb{R})$ .

## Polinomi ortogonali e problemi di Sturm-Liouville [ifm20 cap. 1, 3, 4, 5]

- 1 La lagrangiana per una corda vibrante non omogenea; le equazioni del moto lineari; le condizioni al contorno.
- 2 Polinomi di Legendre (con dettagli)
- 3 Funzioni generalizzate di Legendre
- 4 Polinomi di Tchebyshev, solo definizione
- 5 Polinomi di Hermite, solo definizione.
- 6 Il laplaciano in coordinate sferiche
- 7 L'operatore di Laplace-Beltrami per la superficie della sfera
- 8 Armoniche sferiche e polinomi armonici.
- 9 Funzione generatrice per i polinomi di Legendre

## Operatori lineari [ifm20 cap 6, 7, 8]

- 1 Operatori limitati e norma di un operatore, continuità e limitatezza. Estensione di operatori limitati definiti su sottospazi densi. Decomposizione di  $H$  attraverso immagine e nucleo. Esempi: isometrie e proiettori e loro norme. Isometria con  $\ell_2$  degli spazi di Hilbert separabili.
- 2 La trasformata di Fourier in  $L^2$
- 3 Completezza dei polinomi di Hermite.
- 4 Il duale di uno spazio di Hilbert e il teorema di rappresentazione di Riesz.
- 5 Operatore aggiunto e sue proprietà.
- 6 Operatori di moltiplicazione - condizioni di limitatezza
- 7 Operatori di integrali - condizioni di limitatezza
- 8 Operatori di convoluzione - condizioni di limitatezza
- 9 L'operatore di shift in  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ , il suo aggiunto, immagine e nucleo.

## Operatori compatti [ifm 19, cap. 9, 10, 14]

- 1 Operatori di rango finito. Teorema dell'alternativa per operatori di rango finito.
- 2 Serie di Neumann e teoremi dell'alternativa per perturbazioni piccole di operatori di rango finito.
- 3 Esempi di precompatti in spazi di Hilbert. Convergenza debole di successioni, esempi e proprietà. Precompattanza debole dei limitati in  $H$  separabile (enunciati).
- 4 Convergenza debole e forte di operatori.
- 5 Operatori compatti.
- 6 Teorema dell'alternativa per operatori compatti
- 7 Risolvente e spettro per operatori.
- 8 Proprietà del risolvente.
- 9 Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti.

## Teoria del potenziale [ifm20 cap. 13, 14]

- 1 Il problema di Poisson Dirichlet in  $H_0^1$ . Compattezza dell'inverso del laplaciano. Il problema di Poisson Neumann in  $H^1$ .
- 2 Il potenziale di volume, regolarità  $C^1$ .
- 3 Definizione dei potenziali di singolo e doppio strato. La terza identità di Green per funzioni regolari e il Lemma di Gauss.
- 4 Discontinuità del potenziale di doppio strato e continuità della sua derivata normale, discontinuità della derivata normale del potenziale di singolo strato, nel caso di densità regolari.
- 5 Proprietà del potenziale di doppio strato come operatore: limitatezza in  $L^\infty$  e in  $L^2$ , compattezza.
- 6 Regolarità delle soluzioni dell'equazione di Fredholm  $K\mu + \lambda\mu = f$  con  $\lambda$  non nullo e  $f$  continua.
- 7 Risoluzione del problema di Laplace-Dirichlet
- 8 Risoluzione del problema di Laplace-Neumann interno.
- 9 Distribuzione delle cariche su un conduttore.

## Qubit

- 1 Stati quantistici in  $C^2$ ; osservabili, spin e matrici di Pauli.
- 2 Osservabili, valori attesi e misura. Commutazione tra osservabili.
- 3 Evoluzione temporale
- 4 Due spin. Stati di singoletto e di tripletto. Matrici densità.