IFM - foglio 09 - 2 maggio 2021

Questo foglio di esercizi riguarda gli spettri.

Esercizio 1.
Sia M un sottospazio chiuso, e sia P il proiettore su M. Trova il suo spettro.

Esercizio 2.
Sia $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$ dato da

$$(T\hat{f})_k = (1 - e^{-k}) f_k$$

Equivalentemente, considera T dato da

$$T = \sum_{k \in \mathbb{N}} (1 - e^{-k}) |e_k\rangle\langle e_k|$$

Mostra che è limitato, trova $\|T\|$, trova lo spettro.

Generalizza questo esercizio al caso

$$T = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k |e_k\rangle\langle e_k|$$

con a_k limitata e reale. Ci sono differenze nel caso a_k complessi?

Esercizio 3.
Sia $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))$ dato da

$$(Tf)(x) = (1 - e^{-x}) f(x).$$

Mostra che è limitato, trova $\|T\|$, trova lo spettro.

Esercizio 4.
Considera i seguenti operatori in $L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
T_1 f(x) &= f(-x)\\
T_2 f(x) &= \operatorname{sgn}(x) f(x)\\
T_3 f(x) &= \mathcal{X}\{x > 0\} f(-x)\\
T_4 f(x) &= f(|x|)\\
T_5 f(x) &= f(-|x|)\\
T_6 f(x) &= (f(x) + f(-x))/2\\
T_7 f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

di cui hai già trovato norma e aggiunto nel foglio 7. Trova gli autovettori, lo spettro e il risolvente.

Esercizio 5.
Sia a reale e positivo, e sia

$$T_a : f(x) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x)$$

Mostra che T_a è unitario in $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$. Determina il suo spettro al variare di a. Mostra che se a è diverso da zero lo spettro coincide con lo spettro continuo.

Esercizio 6.

La definizione di risolvente e di spettro si possono dare anche per operatori illimitati definiti su sottospazi densi. Considera l'operatore ∂_x^2 definito da $\mathbf{S}_\infty$ in sé ($\mathbf{S}_\infty$ è il sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$ delle funzioni a decrescenza rapida). Usando l'isometria data dalla trasformata di Fourier, trova il risolvente e lo spettro.

Esercizio 7. *

Sia $T \in \mathcal{L}^2(L[0,1])$ l'operatore integrale

$$Tf(x) = \int_0^\pi (\pi - \max(x,y))f(y)\,\mathrm{d}y$$

Mostra che è compatto e autoaggiunto. Supponendo f continua, mostra che $\partial_x^2 Tf(x) = -f(x)$. e nota che $Tf(\pi) = 0$ e $(Tf)'(0) = 0$. Dunque $\phi = Tf$ risolve l'equazione $\partial_x^2\phi = -f$, con $\phi(\pi) = 0$ e $\phi'(0) = 1$. Usando questo fatto, trova esplicitamente lo spettro di T.

Esercizio 8. *

Sia $T \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N});\mathbb{C})$ definito da

$$(T\hat{f})_k = \frac{f_{k+1}}{k+1}$$

Mostra che è continuo e calcolane la norma. Determina T^*. Mostra che T è compatto. Prova a descrivere risolvente e spettro di T e T^*.

Esercizio 9. *

Sia $T \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{Z};\mathbb{C}))$ definito da

$$(T\hat{f})_k = \hat{f}_{k+1} + \hat{f}_{k-1} - 2\hat{f}_k$$

Mostra che è limitato e autoaggiunto, ma che non è compatto.
Trova il suo spettro, usando l'isometria con $L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ data dalla serie di Fourier:

$$f \to \{\hat{f}_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \quad \text{con } \hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\pi^\pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 10. teorico

Sia T unitario, cioè $T^* = T^{-1}$. Mostra che lo spettro è contenuto nella circonferenza unitaria di $\mathbb{C}$ (per farlo usa che T e T^{-1} hanno norma uno per provare che il risolvente è fuori dalla circonferenza unitaria).
Mostra che se $|\lambda| = 1$, $Tf = \lambda f$ se e solo se $T^*f = \bar{\lambda}f$.
Mostra che se $\lambda \neq \mu$ sono due autovalori distinti, allora gli autovettori sono ortogonali.
Prova che i kernel di $T - \lambda$ e $T^* - \bar{\lambda}$ coincidono. Come conseguenza, prova che T non ha spettro residuo.
Mostra inoltre che Range $(\lambda\,\mathbf{I} - T)$ è chiuso se e solo se Range $(\bar{\lambda}\,\mathbf{I} - T^*)$ è chiuso, dunque sia lo spettro che il risolvente sono invarianti per coniugazione.

Esercizio 11.

La trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ è un operatore unitario. Mostra che $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$, e dunque che $\mathcal{F}^4 = \mathbf{I}$.
Deduci da questo fatto che i soli autovalori possibili sono ± 1 e $\pm \mathrm{i}$.
Mostra che se $\mathcal{F}f = \pm 1 f$ o $\mathcal{F}f = \pm \mathrm{i} f$ allora f ha una determinata parità, quale?

Esercizio 12. *

Sia T autoaggiunto. Prova che $\sigma(T^2) = \{\lambda^2 : \quad \lambda \in \sigma(T)\}$ (la difficoltà è nella parte di spettro non puntuale).

Esercizio 13.

Sia A l'operatore da $\ell_2(\mathbb{C})$ in sé dato da

$$(Af)_k = a_k f_k$$

con $a_k \in \mathbb{C}$ e $|a_k| = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

1) Quanto vale $\|A\|$?

2) Sotto quali condizioni per $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ l'operatore A è un operatore autoaggiunto?

3) Sotto quali condizioni per $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ l'operatore A è una isometria?

4) Sotto quali condizioni per la successione $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$l'operatore A è un proiettore?

5) Determina lo spettro puntuale di A.

6) Nel caso $a_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}/(1+k)}$, determina anche lo spettro continuo di A.

Esercizio 14.

Sia data $\{\beta\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $\beta_k \neq 0$ per ogni k, e $\lim_k \beta_k = 0$.
Sia T l'operatore da $\ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ in sé definito da

$$\begin{cases} (T\hat{x})_0 = 0, \\ (T\hat{x})_k = \beta_k x_{k-1} \quad \text{per } k > 0 \end{cases}$$

Mostra che è compatto.
Determina T^*.
Mostra che 0 è nello spettro residuo di T (per un operatore autoaggiunto 0 può essere autovalore o elemento dello spettro continuo, ma in questo caso T non è autoaggiunto).
Determina lo spettro di T e di T^*.

Esercizio 15. *

Siano T e T^* definiti come nell'esempio precedente, ma β_k sia una successione positiva decrescente, con limite $\gamma > 0$.
Determina lo spettro di T e di T^*.