IFM - foglio esercizi 08 - 2 maggio 2021

Questo foglio di esercizi riguarda norma di operatori e convergenze di sequenze di operatori.

Esercizio 1.

Dato $\alpha > 0$, sia M_α l'operatore di moltiplicazione da $L^2(\mathbb{R})$ in sé, definito da

$$M_\alpha f(x) = \frac{1}{1+\alpha x^2} f(x)$$

- Mostra che M_α e autoaggiunto e calcola la sua norma
- Mostra che M_α tende fortemente all'operatore identità. Suggerimento: l'operatore $R_\alpha = \mathbf{I} - M_\alpha$ è dato da

  $$R_\alpha f(x) = \frac{\alpha x^2}{1+\alpha x^2} f(x)$$

  dunque

  $$\|R_\alpha f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\alpha x^2}{1+\alpha x^2} \right)^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

  L'integrando tende puntualmente a zero, dunque è sufficiente una convergenza dominata per ottenere la tesi.
- Mostra che $\|R_\alpha\|$ non tende a 0.
- Sia T_α l'operatore dato da

  $$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \frac{1}{1+\alpha y^2} f(y)$$

  Mostra che T_α tende fortemente a T_0. Suggerimento: T_α è la composizione di un operatore di convoluzione limitato e dell'operatore M_α.
- Mostra che T_α non tende in norma a T_0. Suggerimento: la norma dell'operatore R_α è 1, $\|R_\alpha f\|/\|f\|$ è circa 1 se f si concentra in un punto che tende a infinito, per esempio $f_\delta = \mathcal{X}\{x \in (1/\delta, 1/\delta + \delta)\}/\sqrt{\delta}$

Esercizio 2.

Sia T_α su $L^2(\mathbb{R})$ definito da

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+(x-y-\alpha)^2} f(y) \, \mathrm{d}y$$

Mostrare che è continuo, e che tende debole a 0 per $\alpha \to +\infty$, ma che non tende forte a 0.

Esercizio 3.

Discuti al variare di $\alpha > 0$ la continuità e la compattezza dell'operatore integrale

$$T_1 f(x) = \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{|y|}{|x-y|^\alpha} f(y)$$

da $L^2([0,1]$ in sé.
Discuti al variare di $\alpha > 0$ la continuità e la compattezza dell'operatore integrale

$$T_2 f(x) = \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{|x-y|}{y^\alpha} f(y)$$

da $L^2([0,1]$ in sé.

Esercizio 4.
Considera la seguente famiglia di operatori in $L^2(\mathbb{R})$:

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha y^2}}{1+|x-y|^4} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Discutine limitatezza e compattezza al variare di $\alpha \in [0,+\infty)$. Discuti in quale senso A_α converge a A_0

Considera la famiglia di operatori

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}}{1+|x-y|^4} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Discutine limitatezza e compattezza al variare di $\alpha \in [0,+\infty)$.

Esercizio 5.
Considera $g \in L^2(\mathbb{R})$ e considera la successione

$$g_n(x) = n^\alpha g(nx)$$

Discuti il suo limite per $n \to +\infty$ al variare di α.

Considera la successione di operatori $T_n \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ definiti da

$$T_n g(x) = n^\alpha g(nx)$$

Discuti la convergenza di T_n.

Esercizio 6.
Considera le due successioni di operatori integrali in $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R})$

$$A_n f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-n(x-y)^2} f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$B_n f(x) = \log n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+n(x-y)^2} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Mostra che sono tutti operatori continui e discuti il loro limite per $n \to +\infty$.

Esercizio 7.
Sia $\alpha \geq 0$, e sia f una funzione da $(0,1)$ in $\mathbb{R}$, e sia T_α l'operatore definito da

$$T_\alpha f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

a. Discuti limitatezza e compattezza di T_α da L^2 in sé, per $\alpha \in [0,1)$.

b. Determina T_α^*, per $\alpha \in [0,1)$.

c. Mostra che T_1 manda funzioni limitate in funzioni di L^2.

d. Discuti la limitatezza di T_1 come operatore su L^2.