IFM - foglio esercizi 07, del 25 aprile 2021

Questo foglio contiene esercizi sugli operatori, alcuni standard (norma, aggiunto), altri un po' più teorici.

Non ricordo se l'ho già detto a lezione, ma lo ricordo qui: un operatore U è **unitario** se e solo se è invertibile e

$$U^{-1} = U^*$$

Esercizio 1.
Sia F il funzionale lineare che associa a $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(R)$ il suo integrale:

$$F(f) = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Mostra che è illimitato.

Esercizio 2. Operatori integrali
Per quali $\alpha > 0$ l'operatore integrale

$$K_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha + |y|^\alpha + 1} f(y)\,\mathrm{d}y$$

ha nucleo in $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$?
Per quali α l'operatore K_α è limitato?

Esercizio 3.
Considera i seguenti operatori in $L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
T_1 f(x) &= f(-x) \\
T_2 f(x) &= \operatorname{sgn}(x) f(x) \\
T_3 f(x) &= \mathcal{X}\{x > 0\} f(-x) \\
T_4 f(x) &= f(|x|) \\
T_5 f(x) &= f(-|x|) \\
T_6 f(x) &= f(x) + f(-x) \\
T_7 f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

Trova gli aggiunti.
Quale di questi operatori è autoaggiunto? Quale unitario? Uno di essi è un proiettore, quale?
Calcola le loro norme.

NB non inventate un segno meno in identità di questo tipo:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(-x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 4.
Sia $T \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ dato da

$$(Tx)_k = (1 - e^{-k}) x_k$$

Mostra che è limitato e autoaggiunto, e trova $\|T\|$.

Esercizio 5. Operatori di convoluzione

Sia $g(x) = \sin x/x$. Prova che è una funzione di L^2, e trova la sua trasformata di Fourier ricordando che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \pi \mathrm{sign}\,(\alpha)$$

(l'integrale va inteso nel senso del valore principale). Osserva che $\hat{g}(\lambda)$ è proporzionale alla funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$. Mostra che l'operatore

$$Kf(x) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(y)\,\mathrm{d}y$$

è ben definito su $\mathbf{S}_{\infty}$, è continuo in L^2, e quindi è prolungabile ad un operatore su L^2, che ha l'espressione integrale, nel senso del valore principale,

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(y)\,\mathrm{d}y,$$

ma il nucleo non è in L^1.

Esercizio 6. Proiettori

Mostra che se P è un operatore di proiezione allora è autoaggiunto e idempotente (cioè $P^2 = P$).
In $L^2(\Omega; \mathbb{R})$, mostra che un operatore di moliplicazione M_h con h funzione misurabile limitata è un proiettore se e solo se h è la funzione caratteristica di un misurabile di Ω.

Esercizio 7. Proiettori e Fourier

Dato $m \in \mathbb{R}$, mostra che in $L^2(\mathbb{R})$ l'operatore che a f associa la funzione

$$E_m f(x) = \int_{-\infty}^{m} \mathrm{d}\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \hat{f}(\lambda)$$

è un proiettore.

Esercizio 8. Operatore impulso

Un operatore (illimitato) A definito su $\mathcal{D}(A)$ sottospazio denso di H si dice **simmetrico** se $\forall f, g \in \mathcal{D}(A)$ vale

$$(g, Af) = (Ag, f).$$

In meccanica quantistica l'operatore illimitato $\mathrm{i}\,\partial_x$ è detto operatore impulso. Prova che è simmetrico nel dominio costituito dalle funzioni $\mathbf{C}^{\infty}([0, \pi])$ nulle al bordo, ma non lo è in $\mathbf{C}^{\infty}([0, \pi])$.
Prova che è illimitato, costruendo una successione di funzioni f_k di norma 1 su cui la norma di $\mathrm{i}\,\partial_x f_k$ è divergente.

Esercizio 9.

Prova che se U è unitario allora U conserva il prodotto scalare, e dunque ha norma 1.

Esercizio 10.

Prova che la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ è un operatore unitario.

Esercizio 11. Shift destro su $\ell_2(\mathbb{Z}; \mathbb{R})$

Sia S l'operatore su $\ell_2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ definito da

$$(S\mathbf{z})_k = z_{k-1}$$

Questo operatore "shifta" a destra tutta la successione.
Mostra che è unitario.

Esercizio 12.

Mostra che se U è un operatore che conserva il prodotto scalare ed è biiettivo, allora è unitario.

Esercizio 13. Shift destro su $\ell_2(\mathbb{N};\mathbb{R})$

A commento dell'esercizio teorico precedente, sia S lo shift su $\ell_2(\mathbb{N};\mathbb{R})$ definito come

$$(S\mathbf{z})_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ z_{k-1} & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

Mostra che S conserva il prodotto scalare, che il suo inverso sinistro è S^*, però S non è invertibile.

Esercizio 14. Aggiunto di operatori tra spazi di Banach (teorico)

Dati B spazio di Banach a valori in $\mathbb{R}$ o in $\mathbf{C}$, indico con B' il suo duale, cioè lo spazio dei funzionali lineari continui su B.
Con una notazione che viene dalla fisica, se $\mathbf{f} \in B'$, e $\mathbf{u} \in B$. l'azione di $\mathbf{f}$ su $\mathbf{u}$ viene indicata con

$$< \mathbf{f}, \mathbf{u} >$$

che indicherò anche con $< vef, \mathbf{u} >_B$ per ricordare in quale spazio sto operando.

Siano ora B_1 e B_2 due spazi di Banach. Dato $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ e dato $\mathbf{f} \in B_2'$, considera il funzionale definito per $\mathbf{u} \in B_1$ da

$$\mathbf{u} \to < \mathbf{f}, A\mathbf{u} >_{B_2}$$

Mostra che è lineare e contino in $\mathbf{u}$, dunque esiste un elemento di B_1' che indico con $A^*\mathbf{f}$ tale che per ogni $\mathbf{u} \in B_1$

$$< A^*\mathbf{f}, \mathbf{u} >_{B_1} = < \mathbf{f}, A\mathbf{u} >_{B_2}$$

Mostra che A^* è un operatore lineare continuo da B_2' a B_1'.
Mostra che $\|A^*\| \leq \|A\|$. Vale anche il viceversa, ma per dimostrarlo servono più nozioni di analisi funzionale. Trovate una prova, per esempio, sul Brezis.

Sottolineo che se A è definito da B_1 a B_2, il suo aggiunto è definito da B_2' a B_1'.

Esercizio 15. Operatori unitari tra spazi di Hilbert

Nel caso di due spazi di Hilbert H_1, H_2, poiché posso indentificare H_1' con H_1 e H_2' con H_2 mediante il teorema di rappresentazione di Riesz, se A è lineare e continuo da H_1 a H_2, A^* è lineare e continuo da H_2 in H_1. In particolare $U : H_1 \to H_2$ è unitario se e solo se

$$U^{-1} = U^*$$

Sia H uno spazio di Hilbert, e $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sua base. Mostra che l'operatore $U : H \to \ell_2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ definito da

$$(Uf)_k = (\mathbf{e}_k, \mathbf{f})$$

è unitario, e quindi definisce un'isometria tra H e ℓ_2.