IFM - foglio 06 - 25 aprile 2021

Questo foglio di esercizi riguarda le equazioni integrali a nucleo separabile.

Esercizio 1.

Sia T l'operatore di rango finito da $L^2((0,1);\mathbb{R})$ in sé definito da

$$Tf = 7\int_0^1 x^2 y^4 f(y)\,\mathrm{d}y$$

Determina in suo unico autovalore non nullo λ_1. Considera l'equazione integrale

$$\lambda_1 f(x) - Tf(x) = 5 - 4x + \alpha(5 - 7x^2)$$

al variare di α in $\mathbb{R}$ (attenzione: λ_1 è l'autovalore che hai trovato). Per quali α esistono delle soluzioni?

Esercizio 2.

Considera l'operatore

$$Tf(x) = \mathcal{X}\{x \in [0,2]\}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$

definito da $L^2([0,5];\mathbb{R})$ in sé.

a. Trova T^*.

b. Determina $\|T\|$.

c. T è di rango finito?

d. Trova gli autovalori di T.

e. Risolvi, al variare di α e λ nei reali, l'equazione $\lambda f(x) - Tf(x) = 2x - \alpha$

Esercizio 3.

Sia T l'operatore da $L^2((-1,1))$ in sé dato da

$$Tf(x) = \int_{-1}^1 (x+y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

Che dimensione ha la sua immagine? È autoaggiunto?
Trova i suoi autovalori e le corrispondenti autofunzioni.
Risolvi al variare di λ e α in $\mathbb{R}$ l'equazione

$$\lambda f(x) - Tf(x) = 1 + \alpha x.$$

Esercizio 4.

Ricordando le formule di addizione e sottrazione per le funzioni trigonometiche, risolvi le seguenti equazioni integrali con nucleo separabile con $f \in L^2([0,2\pi];\mathbb{R})$

$$f(x) - \int_0^{2\pi} \cos(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \sin x$$

$$\pi f(x) - \int_0^{2\pi} \cos(x+y)f(y)\,\mathrm{d}y = \cos x$$

$$\pi f(x) - \int_0^{2\pi} \cos(x+y) f(y)\,\mathrm{d}y = \sin x$$

Esercizio 5.
Risolvi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la seguente equazione integrale con nucleo separabile con $f, g \in L^2([0,\pi],\mathbb{C})$.

$$f(x) - \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-y)} f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)$$

Esercizio 6.
Sia T l'operatore continuo da $L^2[-1,1]$ in sé definito da

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^{1} (1 + x^2y^2) f(y)\,\mathrm{d}y$$

1) mostra che T è autoaggiunto e di rango finito;

2) trova le autofunzioni di T

3) trova, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la soluzione di

$$Tf(x) - \lambda f(x) = 1 + x$$

Esercizio 7.
Sia T l'operatore continuo da $L^2[-1,1]$ in sé definito da

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{3x}{2}\int_{-1}^{1} y f(y)\,\mathrm{d}y$$

a. mostra che è autoaggiunto

b. mostra che è di rango finito

c. discuti l'invertibilità di $\mathbf{I} - \lambda T$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

d. mostra che T è un proiettore e caratterizza il sottospazio V su cui proietta

e. sia $T^\perp$ il proiettore su $V^\perp$; $T^\perp$ è di rango finito?

f. discuti l'invertibilità di $\mathbf{I} - \lambda T^\perp$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

g. sia $g(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}x)$, di norma 1, e sia S il proiettore sulla retta per g; per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'operatore $T + \alpha S$ è un proiettore?

Esercizio 8.
Sia T l'operatore da $L^2((-1,1))$ in sé definito da

$$Tf(x) = \int_{-1}^{1} (xy + y^2) f(y)\,\mathrm{d}y$$

a. Trova gli autovalori e le autofunzioni di T.

b. Risolvi al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equzione

$$\lambda f(x) - Tf(x) = x^2 - \alpha$$

c. Determina la norma di T.