IFM - foglio esercizi 05, del 20 aprile 2021

Questo foglio di esercizi è un modo per ripassare concetti riguardo gli spazi L^2, e per qualche approfondimento. Segnalatemi eventuali errori o punti poco chiari.

Esercizio 1.

Sia H uno spazio di Hilbert, e V un suo sottospazio finito-dimensionale.
Prova che V è chiuso.

Esercizio 2. Funzioni pari e dispari

Considera $L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (e anche $L^2((-L,L);\mathbb{R})$). Sia $M_p =$ sottospazio di L^2 delle funzioni pari, e $M_d =$ sottospazio in L^2 delle funzioni dispari. Prova che sono chiusi e che sono ortogonali tra loro. Ricordando che ogni funzione f si decompone in una funzione pari e una dispari come

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

scrivi i proiettori su M_p e su M_d.
.

Esercizio 3.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Sia V il sottospazio delle funzioni a media nulla. Prova che è chiuso e determina il suo ortogonale.
Prova che il sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$ delle funzioni $L^1(\mathbb{R})$ a media nulla non è chiuso.

Esercizio 4. Basi di seni e coseni in $L^2((0,\,\pi))$

Mostra che $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)\right\}$ per $k \geq 1$ è una base in $L^2((0,\,\pi))$.
Suggerimento:

- verifica che sono ortonormali
- $\{1, \sin(kx), \cos(kx) |\, k \geq 1\}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2((-\pi,\pi))$;
- le funzioni dispari si sviluppano in soli seni
- ogni funzione di $L^2((0,\pi))$ si prolunga ad una funzione dispari in $L^2((-\pi,\pi))$
- ...

Mostra che anche $\{\cos(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo.

Esercizio 5.

Scrivi lo sviluppo di 1 rispetto alla base trovata di soli seni in $(0,\pi)$.

La convergenza può essere uniforme in $[0,\pi]$?

Esercizio 6. Basi di polinomi in $L^2((0,1))$

Procedendo come nell'esercizio precedente, prova che in $L^2((0,1))$ esiste una base di polinomi pari e una base di polinomi dispari, utilizzando i polinomi di Legendre.

Esercizio 7. * Sistemi ortogonali completi in $\ell_2(\mathbb{N})$

Sia

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= (1100\dots)\\ \mathbf{v}_2 &= (10100\dots)\\ \mathbf{v}_3 &= (100100\dots)\\ \mathbf{v}_4 &= (1000100\dots)\end{aligned}$$

Mostra che $\mathbf{e}_0 = (100\dots)$ è nello span di $\{\mathbf{v}_k\}_{k\geq 1}$.
Suggerimento: sia V_n lo span di $\{\mathbf{v}_k\}_{k\geq 1}$. Trova la proiezione $P_n\mathbf{e}_0$ di $\mathbf{e}_0$ su V_n, minimizzando $\|\mathbf{e}_0 - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mathbf{v}_k\|^2$, e mostra che nel limite $n \to +\infty$

$$\|P_n\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0\| \to 0$$

Usa questo risultato per provare che lo span di $\{\mathbf{v}_k\}_{k\geq 1}$ è denso. Nota che in questa sistema manca $(10000\dots)$.

Esercizio 8. Base di Haar

Considero $L^2((0,1);\mathbb{R})$. Sia $\phi_0 = 1$, e, dato $n > 0$, per $k \in \{0,\dots 2^{n-1}-1\}$

$$\phi_k^n(x) = 2^{(n-1)/2}\left(\mathcal{X}\{x \in [k/2^{n-1}, k/2^{n-1} + 1/2^n)\} - \mathcal{X}\{x \in [k/2^{n-1} + 1/2^n, (k+1)/2^{n-1})\}\right)$$

Disegnane qualcuna per capire come sono fatte e che relazione c'è tra le une e le altre.

a. Mostra che formano un sistema ortonormale.

b. Mostra che lo span di ϕ_0 e ϕ_0^1 è formato dalle funzioni costanti su $[0,1/2)$ e costanti su $[1/2,1)$.

c. Mostra che lo span di ϕ_0, ϕ_0^1, $\{\phi_k^2\}_{k=0}^3$ è formato dalle funzioni costanti sugli intervalli sui quattro intervalli di lunghezza $1/4$ in cui si partiziona $[0,1]$.

d. In generale mostra che lo span fino a $\{\phi_k^n\}_{k=0}^{2^n-1}$ è formato dalle funzioni costanti sui 2^n intervalli di lunghezza $1/2^n$ in cui si partiziona $[0,1]$.

e. Mostra che $\mathcal{X}\{x \in (a,b)\}$ è approssimabile in L^2 dalle funzioni di Haar.

f. Concludi che le funzioni di Haar sono un sistema ortonormale completo.

Esercizio 9. Le ondine di Haar

Sia

$$\phi(x) = \mathcal{X}\{x \in [0,1/2)\} - \mathcal{X}\{x \in [1/2,1)\}$$

Osserva che $\phi(x)$ ha media nulla e norma 1 in $L^2(\mathbb{R})$.
Considera $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, e definisci

$$\phi_m^n = 2^{n/2}\phi(2^n x - m)$$

Ossserva che ϕ_m^n ha media nulla e norma 1, e che si ottiene scalando $\phi(x)$ del fattore 2^n, e poi traslando la funzione ottenuta di $m/2^n$, cioè di un qualunque multiplo intero di 2^n.

Mostra che ϕ_m^n è un sistema ortonormale.

Mostra che è una base. Suggerimento: nell'esercizio precedente, abbiamo considerato la base di Haar in $L^2((0,1);\mathbb{R})$ che è formata esattamente dalle funzioni ϕ_m^n che hanno supporto in $[0,1]$, e dalla funzione costante 1, che non è una delle tipo ϕ_m^n. Si potrebbe sospettare che $\mathcal{X}\{x \in [0,1]\}$ non sia esprimibile nelle ϕ_m^n, invece si può. Procedi così:

- Scrivi lo sviluppo di $\mathcal{X}\{x \in [0,1]\}$ nelle ϕ_m^n e mostra la sua convergenza in L^2 a $\mathcal{X}\{x \in [0,1]\}$.
- Deduci che ogni funzione di $L^2((0,1);\mathbb{R})$, prolungata a 0 fuori da $[0,1]$ è sviluppabile nella base.
- Mostra che ogni funzione di $L^2(\mathbb{R})$ a supporto compatto è sviluppabile nella base.
- Usando la densità delle funzioni a supporto compatto, concludi mostrando la completezza del sistema.

Esercizio 10. * Un'osservazione sulle funzioni generalizzate di Legendre

Le funzioni generalizzate di Legendre $G_{n,2}$, con $n \geq 2$, sono polinomi di grado n, in cui compare il fattore $(1-x^2)$ a moltiplicare, e sono un sistema ortonormale completo di $L^2((-1,1))$. Questo implica che 1 è esprimibile come una serie di polinomi pari di grado maggiore o uguale a 2, con convergenza in L^2.
Invece di costruire questa serie convergente, limitiamoci a mostrare che 1 è nello span di $(1-x^2)x^k$, con $k \in \mathbb{N}$. Espandendo in serie

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} x^{2k}, \quad \text{da cui } 1 = (1-x^2)\sum_{k\in\mathbb{N}} x^{2k}$$

La convergenza della serie è uniforme nei compatti di $(-1,1)$. Mostra che la convergenza è in L^2.

Definendo $y^2 = 1-x^2$, l'uguaglianza precedente diventa

$$1 = y^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} (1-y^2)^k$$

con convergenza uniforme nei compatti di $(-1,1)\backslash\{0\}$. Mostra che anche in questo caso la convergenza è in L^2.

Esercizio 11. * Basi di polinomi di grado elevato

La chiusura di $\operatorname{span}\{x^{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è il sottospazio M_p delle funzioni pari in $L^2((-1,1))$. Usando l'esercizio precedente, mostra che

- $\operatorname{span}\{x^{2k}\}_{k\geq 1}$ è denso in M_p;
- per ogni $m \geq 0$, $\operatorname{span}\{x^{2k}\}_{k\geq m}$ è denso in M_p;
- togliendo un numero finito di elementi di $\{x^{2k}\}_{k\geq 1}$ si ottiene un sottoinsieme che ha span denso in M_p.

Che succede se togli un numero infinito di elementi, ma lasciandone un numero infinito? (Non ricordo cosa avevo in mente quando ho scritto questa parte dell'esercizio, temo troppo difficile. Cito però il seguente teorema di Müntz: in $\mathbf{C}[a,b]$, con $a > 0$, lo span di $\{x^{\lambda_i}\}_i \in \mathbb{N}$ con $\lambda_i > 0$, è denso se e solo se $\sum 1/\lambda_i = +\infty$, da cui segue la densità in $L^2[a,b]$)
Attenzione: se levate un vettore da una base ortonormale non ottenete un sistema a span denso: evidentemente non potete ricostruire 1 usando $\cos(kx)$ con $k \geq 1$, perchè sono tutte funzioni ortogonali a 1.

Esercizio 12. * Regolarità e sommabilità

Se una funzione periodica f è di classe C^1, la sua serie di Fourier converge uniformemente, perché i suoi coefficienti di Fourier $\hat{f}_k$ decadono come $1/k$, che è quadrato-sommabile. Infatti $\hat{f}'_k = \mathrm{i}k\hat{f}_k$, dunque

$$\hat{f}_k = -\mathrm{i}\frac{1}{k}\hat{f}'_k.$$

Per i polinomi di Hermite vale invece

$$H_n' = 2nH_{n-1},$$

oltre che l'equazione di Sturm-Liouville

$$e^{x^2}\left(e^{-x^2}H_n'\right)' = -2nH_n.$$

Sia ora f una funzione C_0^1 in $\mathbb{R}$, e considera il suo sviluppo nella base di L_w^2 con $w = e^{-x^2}$, data dai polinomi di Hermite normalizzati

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} nH_n.$$

Esprimi i coefficiente di f' in termini dei coefficienti di f. Che informazioni puoi ottenere sul decadimento dei coefficienti di f?

Esercizio 13. Identità di polarizzazione

Mostra che in uno spazio di Hilber su $\mathbb{C}$ vale

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 - i\|\mathbf{u}+i\mathbf{v}\|^2 + i\|\mathbf{u}-i\mathbf{v}\|^2\right)$$

Trova l'analoga espressione nel caso reale.
Usa questa identità per provare che se H e H_1 sono due spazi di Hilbert e se $F : H \to H_1$ è lineare e conserva la norma, allora F conserva il prodotto scalare.