IFM - esercizi 04 - 28 marzo 2021

Esercizio 1. Particelle identiche

Considera l'equazione di Liouville per un sistema di N particelle interagenti mediante un potenziale di coppia:

$$\partial_t f^N + \sum \mathbf{v}_i \cdot \partial_{x_i} f^N + \sum \mathbf{F}_i \, \partial_{v_i} f^N = 0$$

dove

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j).$$

Mostra che se il dato iniziale $f^N(\mathbf{x}_1^N, \mathbf{v}_1^N, 0)$ è invariante per permutazioni degli indici di particelle, anche la soluzione al tempo t lo è.

Esercizio 2. Gerarchia BBJKY

Considera l'equazione di Liouville descritta nel precedente esercizio. Integrando in $\mathrm{d}\mathbf{x}_{k+1}^N \, \mathrm{d}\mathbf{v}_{k+1}^N$ scrivi l'equazione per la marginale a k particelle.

Esercizio 3. Fattorizzazione 1

Mostra che nel caso di forza nulla, l'equazione di Lioville ammette soluzioni fattorizzate, cioè se le particielle sono inizialmente distribuite in modo indipendente, lo stesso vale al tempo t.

Esercizio 4. Fattorizzazione II

Considera la gerarchia che hai ottenuto negli esercizi precedenti, scala la forza con $1/N$, e scrivi formalmente il limite, che è una gerarchia di infinite equazioni che non dipendono da N.
Mostra che se $f(x, v, t)$ è una soluzione della corrispondente equazione di Vlasov, allora la collezione di funzioni

$$f_k(\mathbf{x}_1^k, \mathbf{v}_1^k, t) = \prod_{i=1}^{k} f(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, t)$$

risolve la gerarchia.

Esercizio 5. Modelli di flocking

Alcuni recenti modelli studiano il moto collettivo di aninali mediante sistemi differenziali che hanno termini di campo medio. I modelli di tipo Cucker e Smale sono del tipo

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{v}_i \\
\dot{\mathbf{v}}_i &= \sum_{j \neq i} n_{ij} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)
\end{aligned}$$

con $i \in \{1, \dots N\}$, dove $\{n_{ij}\}_{ij}$ è detta "matrice di comunicazione", e si assume in genere che dipenda dalla distanza tra $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ (ma esistono modelli più complessi, come quelli con dipendenza dal rango, in cui n_{ij} dipende dalla posizione di tutti gli animali).
Assumendo

$$n_{ij} = \frac{1}{N} \frac{1}{1 + |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^\alpha}$$

scrivi l'equazione di campo medio corrispondente. Nota che il sistema non ha divergenza nulla, dunque l'equazione di Liovuille è differente dall'equazione del trasporto.

Esercizio 6. Soluzioni monocinetiche

Considera l'equazione di Vlasov

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \partial_x f + \mathrm{div}_{\mathrm{v}}(\mathcal{F}[\mathrm{f}](\mathbf{x}, \mathbf{v})\mathrm{f}) = 0$$

in cui ho assunto che $\mathcal{F}$ possa dipendere anche da $\mathbf{v}$, come nell'esempio precedente. Questa equazione ammette soluzioni deboli uniche per dati misura, se $\mathcal{F}$ è sufficientemente regolare.
In particolare, nel caso dell'equazione che hai ottenuto nell'esercizio precedente, cerca soluzioni del tipo

$$\mu_t(\mathrm{d}x, \mathrm{d}\mathbf{v}) = \rho(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\, \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{v}$$

dove ρ è il campo densità di massa, e $\mathbf{u}$ è il campo di velocità.
Che equazioni devono soddisfare ρ e $\mathbf{u}$ affinché μ_t sia una soluzione debole?
Le soluzioni si chiamano monocinetiche, e "scimmiottano" le equazioni idrodinamiche, in cui in ogni punto dello spazio c'é una sola velocità $\mathbf{u}$, invece che una distribuizione.