IFM - esercizi 03 - 17 marzo 2021

Flussi, gruppi, trasformazioni simplettiche.

Esercizio 1. Gruppi e prodotti

Si consideri in $\mathbb{R}^{2n} = \{\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) | \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n\}$ dotato di prodotto scalare

$$(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$$

e di prodotto simplettico

$$[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2] = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{p}_1.$$

$\mathbb{R}^{2n}$ può essere identificato con $\mathbf{C}^n$ mediante la mappa

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{q} + \mathrm{i}\mathbf{p}$$

e si consideri il prodotto hermitiano in $\mathbf{C}^n$

$$(\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2) = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathrm{i}(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{p}_1).$$

- Sia O_{2n} il gruppo delle matrici ortogonali su $\mathbb{R}^{2n}$ (quelle che conservano il prodotto scalare).
- Sia SO_n il gruppo delle matrici ortogonali speciali (cioè con determinante 1).
- Sia Sp_{2n} il gruppo delle matrici simplettiche (quelle che conservano il prodotto simplettico).
- Sia $GL_n(\mathbb{C})$ il gruppo lineare complesso, cioè quello rappresentato dalle matrici $n \times n$ non singolari a valori in $\mathbb{C}$. Si noti che $GL_n(\mathbb{C})$ può essere identificato con un sottospazio di $GL_{2n}(\mathbb{R})$.
- Sia U_n il gruppo delle matrici unitarie su $\mathbb{C}^n$ (quelle che conservano il prodotto hermitiano), e che mediante la mappa definita sopra identifichiamo con un sottogruppo di O_{2n}, e sia SU_n il gruppo delle matrici unitarie di determinante 1.

Provare che

$$O_{2n} \cap Sp_{2n} = Sp_{2n} \cap GL_n(\mathbb{C}) = GL_n(\mathbb{C}) \cap O_{2n} = U_n.$$

Poiché le matrici simplettiche hanno determinante 1, sia ha anche che $U_n = SO_{2n} \cap Sp_{2n}$. D'altra parte le matrici di U_n non hanno necessariamete determinate 1. Si consideri la matrice R_α di rotazione antioraria di angolo α nel piano. Si provi che è simplettica, che è in SO_2, che si identifica con un elemento di U_1 di modulo diverso da 1, quale? (si ricordi che U_1 è in biiezione con $\mathbb{C}$).

Esercizio 2. Rotazioni

Sia R_t la matrice di rotazione oraria di angolo t. Si provi che R_t è un gruppo a un parametro di diffeomorfisimi, e si determini il campo vettoriale che lo genera. Poiché è anche simplettico, si trovi l'hamiltoniana che genera il campo. Mostra che in opportune variabili è l'hamiloniana di un oscillatore armonico.

Esercizio 3. Oscillatore armonico

Sia $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$. Determina il flusso generato, mostra che è lineare e che è una trasformazione simplettica. Osserva che non è una trasformazione ortogonale, a meno che $\omega^2 = 1$.

Esercizio 4. Flussi lineari

Sia $T(t)$ un gruppo a un parametro di matrici in $\mathbb{R}^n$, cioè $T(t)T(s) = T(t+s)$. Mostra che per ogni $\mathbf{x}$, $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T\mathbf{x}\right|_{t=0} = A\mathbf{x}$ con A matrice. Deduci che $T(t) = \mathrm{e}^{At}$. A è detta "generatore" del gruppo.
Mostra che $T(t)$ è un gruppo a un parametro di trasformazioni ortogonali se e solo se A è antisimmetrica. Mostra che $T(t)$ è simplettico se e solo se JA è antisimmetrica.
In $\mathbb{C}^n$, mostra che e^{At} è unitario se e solo se A è autoaggiunta.

Esercizio 5. Il vettore di Laplace-Runge-Lenz

Siano $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, posizione e impulso, e sia $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$ il vettore momento della quantità di moto. Il vettore di Lapalce-Runge-Lenz è

$$\mathbf{a} = \mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\ell} - \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$$

Si mostri che

$$\{a_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} a_k$$

dove si sottointende la somma sugli indici ripetuti (notazione di Einstein).
Il conto è decisamente lungo, provo a dare qualche suggerimento per una strada possibile (l'altra è mostrare che $\{a_1, \ell_1\} = 0$, e che $\{a_1, \ell_2\} = a_3$, e poi invocare la simmetria per permuazioni cicliche degli indici, ma non è una strada particolarmente più corta).

- Prova che $\{q_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} q_k$, e che $\{p_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k$.
- Ricorda che
$$\mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\ell} = \mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2 \mathbf{q} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{p}$$
Dunque l'$i-$esima componente è
$$p_k p_k q_i - q_k p_k p_i$$
(sottointendendo la somma sugli indici ripetuti).
- Mostra che
$$\{p_k q_k q_i, \ell_j\} = p_k p_k \{q_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} |\mathbf{p}|^2 q_k$$
mentre gli altri termini che si ottengono dalla formula di Leibniz sono nulli.
- Mostra che
$$\{p_k q_k p_i, \ell_j\} = p_k q_k \{p_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) p_k$$
mentre gli altri termini che si ottengono dalla formula di Leibniz sono nulli.
- Mostra che
$$\{q_i/|\mathbf{q}|, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} \frac{q_k}{|\mathbf{q}|}$$
- Metti insieme i vari pezzi e concludi la prova.

Sia ora $H = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 - \frac{1}{|\mathbf{q}|}$ l'hamiltoniana del moto kepleriano in $\mathbb{R}^3$. Mostra che

$$\{a_i, H\} = 0$$

e che

$$\{a_i, a_j\} = -2H \varepsilon_{ijk} \ell_k$$

Esercizio 6.

Data H, due osservabili f e g (cioè due funzioni dallo spazio delle fasi in $\mathbb{R}$), una funzione da F da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. e una funzione A da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$. Mostra che

$$\{F(f), H\} = F'(f)\{f, H\}$$

$$\{A(f,g), H\} = \partial_f A(f,g)\{f, H\} + \partial_g A(f,g)\{g, H\}$$

Deduci da queste proprietà che le funzioni di più integrali primi sono integrali primi, e le funzioni di osservabili in involuzione sono in involuzione

Esercizio 7. Ancora sul vettore LRL

Con le notazioni precedenti, sia $\mathbf{d} = \mathbf{a}/\sqrt{2|H|}$. Supponi di restringerti agli aperti dello spazio delle fasi in cui H ha segno costante (e dunque $\mathbf{d}$ è una funzione regolare).
Usando i risultati degli esercizi precedenti e la formula di Leibniz, mostra che

$$\begin{aligned}
&\{d_i, H\} = 0 \\
&\{d_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} d_k \\
&\{d_i, d_j\} = -\mathrm{sign}(H)\varepsilon_{ijk}\ell_k
\end{aligned}$$

I generatori delle rotazioni rigide in $\mathbb{R}^4$ sono in biiezione con le matrici simmetriche 4×4. Mostra che l'algebra di queste matrici rispetto al commutatore è in biiezione con l'algebra generata dalle funzioni ℓ_i e d_j. In questo senso, il moto centrale kepleriano è invariante per rotazioni rigide in $\mathbb{R}^4$.