IFM - esercizi 02 - 07 marzo 2021

Questi esercizi servono a familiarizzarsi un po' con la trasformata di Legendre

Esercizio 1. Prime proprietà

Sia $f(x)$ una funzione $C^1(\mathbb{R})$, strettamente convessa, che verifichi inoltre che l'immagine di $f'(x)$ è tutto $\mathbb{R}$. Sia $f^*(x)$ la sua trasformata di Legendre:

$$f^*(p) = \sup_x (px - f(x)).$$

a. Provare che f^* è definita su tutto $\mathbb{R}$ (suggerimento: si studi il problema di massimo mediante analisi delle derivate).

b. Si provi che anche la derivata di f^* ha $\mathbb{R}$ come immagine, e che f^* è strettamente convessa.

c. Si provi che $f^{**} = f$.

d. Si provi che per ogni $x, p \in \mathbb{R}$

$$xp \leq f(x) + f^*(p).$$

Esercizio 2. Disuguaglianza di Hölder

Sia $f(x) = |x|^a/a$, per $a > 1$. Si provi che $f^*(p) = |p|^b/b$, con $1/a + 1/b = 1$.
Se ne deduca che per ogni $x, y > 0$

$$xy \leq \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b$$

(Si tratta della disuguaglianza di Young, con cui si prova in particolare che se $f \in L^a$ e $g \in L^b$, allora $fg \in L^1$. Inoltre, usando la disuguaglianza per $f/\|f\|_a$, e $g/\|f\|_b$ si ottiene la disuguaglianza di Hölder).

Esercizio 3.

Sia $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Si determini la sua trasformata di Legendre, e si noti che è finita solo per $|p| \leq 1$.

Esercizio 4.

In generale, se f è definita su un intervallo I ed è convessa, f si può estendere a tutto $\mathbb{R}$ assumendo che abbia valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, dando a f valore $+\infty$ fuori da I. In questo modo si può definire la trasformata di Legendre su tutto $\mathbb{R}$, e anche di funzioni convesse definite solo su intervalli. Si provi anche in questo caso che la trasformata di una funzione convessa è convessa (si usi che il sup di fuzioni convesse è una funzione convessa), e che la trasformata della trasformata è uguale alla funzione di partenza.

Esercizio 5.

Si determinino le trasformate di $f_1(x) = |x|$ e di

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 6.

Nulla vieta di determinare la trasformata di Legendre di una funzione non convessa. Si mostri che si ottiene comunque una funzione convessa.

Sia $f(x) = |x^2 - 1|/2$, si determini $f^*(p)$. Si trovi $f^{**}(x)$, e si discuta la sua relazione con $f(x)$. Si tratta di fare pochi facili conti. In alternativa potete provare a utilizzare un qualche software numerico, facendo attenzione a come riconoscere e rappresentare il caso in cui f^* è infinita.