IFM - esercizi 01 - 26 febbraio 2021

Esercizio 1. Flusso libero

Considera il sistema differenziale in $\mathbb{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$
$$\dot{\mathbf{v}} = 0$$

che rappresenta il moto di una particella in assenza di forze (la particella "libera"). Scrivi il corrispondente flusso nello spazio delle fasi. Risolvi l'equazione del trasporto

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f = 0$$

Esercizio 2.

Considera il sistema differenziale in $\mathbb{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$
$$\dot{\mathbf{v}} = -\beta \mathbf{v}$$

che rappresenta il moto di una particella soggetta solo a una forza di attrito viscoso $\mathbf{F} = -\beta \mathbf{v}$. Scrivi il corrispondente flusso nello spazio delle fasi. Risolvi l'equazione del trasporto

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + \mathbf{F} \cdot \nabla_v f = 0$$

e risolvi l'equazione di Liouville

$$\partial_t f + \mathrm{div}_{\mathrm{x}}(\mathbf{v}\mathrm{f}) + \mathrm{div}_{\mathrm{v}}(\mathbf{F}\mathrm{f}) = 0$$

Esercizio 3. Equazione dell'iconale I

L'equazione dell'iconale è

$$|\nabla_x W(\mathbf{x})| = n^2(\mathbf{x}),$$

e descrive l'evoluzione dei fronti d'onda (luminosi, sonori, ma non solo). Il parametro n è l'indice di rifrazione del mezzo, e dunque n^2 è proporzionale all'inverso del quadrato della velocità di propagazione delle perturbazioni nel mezzo. Le superfici di livello di W sono i punti dello spazio che vengono raggiunti dalla luce nello stesso istante.

Un caso semplice è quello per cui $n = 1$. Si consideri $W = 0$ sulla circoferenza di raggio 1 e centrata nell'origine. Determina W in tutto il piano.

Più in generale, nota che dato un insieme A, la funzione

$$d(\mathbf{x}, A) = \inf_{\mathbf{y} \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

dove è regolare ha gradiente di modulo 1. Usa questo fatto per trovare W sapendo che $W(x, y)$ è nulla sulla semiretta $x = 0, y > 0$ e sulla semiretta $x < 0, y = 0$. Nota che la soluzione è regolare nei quadranti I, III, IV, ma non lo è nel quadrante II.

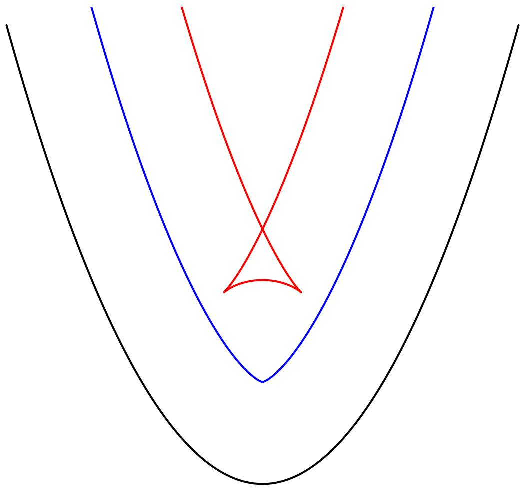
Esercizio 4. Equazione dell iconale II

Riscrivi l'equazione dell'iconale nella forma

$$\frac{1}{2}(|\nabla_x W(\mathbf{x})|^2 - 1) = 0.$$

Scrivi il sistema alle caratteristiche e risolvilo.

Usa le caratteristiche per trovare la soluzione dell'equazione con $W(x, x^2) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (cioè W è nulla sulla parabola $y = x^2$).
Mostrare che per s sufficientemente grande, la caratteristiche si intersecano e scavalcano all'interno della parabola. Usare un qualunque software per mostrare questo fenomeno. Uscirà un grafico tipo il seguente, in cui compare la **caustica**.



Esercizio 5.

Sia $H = \sin q \sin p$. Disegnare qualitativamente le sue curve di livello per $(q, p) \in [0, 2\pi]^2$.
Descrivere qualitativamente il moto, e in particolare

- trovare i punti di equilibrio, discutendo la loro stabilità
- stabilire il verso di percorrenza delle curve di livello
- determinare i moti a meta asintotica

Esercizio 6. Sistemi hamiltoniani e campi a divergenza nulla

Si provi che il sistema differenziale autonomo

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f(q, p) \\ \dot{p} &= g(q, p) \end{aligned}$$

conserva la misura se e solo se è (localmente) hamiltoniano, cioè se il campo è a divergenza nulla.

Esercizio 7. Sistema preda-predatore

Il sistema di Volterra-Lotka descrive la numerosità di una popolazione di prede L e di una di predatori V nello stesso ecosistema:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= -aLV + \alpha L \\ \dot{V} &= +bLV - \beta V \end{aligned}$$

dove a, b, α, β sono parametri positivi. Mostrare che nelle variabili $x = \ln L$ e $y = \ln V$ il sistema è hamiltoniano.

Esercizio 8. Modello SIR

Il modello SIR è un efficace modello per la diffusione di epidemie non endemiche, con un solo ospite (non funziona per la malaria), e in cui la scala di tempi è più breve di quella di variazione naturale delle popolazioni (funziona per il COVID-19 ma non per l'HIV). Le variabili sono la frazione di infetti I, la frazione di suscettibili S, la frazione di rimossi (isolati/guariti/deceduti) R. Il sistema è

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -aSI\\ \dot{I} &= +aSI - bI\\ \dot{R} &= +bI\end{aligned}$$

dove a, b sono parametri positivi. Si noti che la variabile R non entra nelle prime due equazioni, dunque l'analisi del sistema si può ridurre alle prime due. Si provi che nelle variabili $x = \ln S$ e $y = \ln I$ il sistema è hamiltoniano.

Esercizio 9. Sitemi hamiltoniani e integrali primi

Considera il sistema differenziale

$$\begin{aligned}\dot{q} &= f(q, p)\\ \dot{p} &= g(q, p)\end{aligned}$$

Mostra che se esiste un integrale primo non banale $u(q, p)$, allora la funzione

$$\alpha(q, p) = \partial_q u / g = -\,\partial_p u / f$$

è ben definita. Mostra che il campo $(\alpha f, \alpha g)$ è localmente hamiltoniano. In questo senso, l'esistenza di integrali primi non banali è legata all'hamiltonianità del sistema. Osserva inoltre che l'esistenza di u integrale primo garantisce la riduzione alle quadrature del moto.
Nota che la condizione di divergenza nulla corrisponde alla chiusura della forma differenziale

$$-g\,\mathrm{d}q + f\,\mathrm{d}p.$$

Una funzione α tale che la forma

$$\alpha(-g\,\mathrm{d}q + f\,\mathrm{d}p)$$

è chiusa, è detta **fattore integrante** della forma differenziale.

Esercizio 10.

Dai degli argomenti contrari alla possibile esistenza di punti di equilibrio stabili e attrattivi per un sistema autonomo che conservi la misura nello spazio delle fasi (come fanno in particolare i sistemi hamiltoniani).

Esercizio 11.

Dai degli argomenti contrari alla possibile esistenza di punti di equilibrio stabili e attrattivi per un sistema con un integrale primo non costante intorno al punto di equilibrio (come fanno i sistemi hamiltoniani).