

Istituzioni di Fisica Matematica 2019 - Programma minimo/medio/completo

2 giugno 2020

Come guida all'orale, qui trovate gli argomenti divisi in **programma minimo**, **programma medio**, **programma massimo**. In **magenta** ho indicato degli argomenti che lascio come facoltativi, per facilitare la preparazione dell'esame.

Lo scopo di questa distinzione è preparare un percorso di studio con una sua coerenza, per chi di voi, per una qualche ragione, investirà meno risorse nella preparazione di questo esame.

Chiarisco la distinzione tra le varianti del programma.

- Mostrare incompetenza sui punti del programma minimo, non consente di superare l'esame.
- Il **programma minimo** contiene gli argomenti essenziali al raggiungimento degli obiettivi minimi del corso: le proprietà degli spazi di Hilbert e degli operatori, la teoria degli operatori compatti, le nozioni iniziali della teoria del potenziale, l'introduzione alla meccanica hamiltoniana.

L'ampiezza del programma è in parte illusoria, vista la sovrapposizione con il programma di Istituzioni di Analisi Superiore e/o Analisi Funzionale.

Una buona conoscenza degli argomenti del programma minimo garantisce il superamento dell'esame, con un voto coerente con la estrema riduzione del programma.

- Il **programma medio** contiene gli argomenti del programma minimo, e alcuni altri argomenti di maggiore complessità: la completezza dei polinomi di Hermite, i polinomi armonici, la compattezza dell'inverso del laplaciano, alcune dimostrazioni di teoria del potenziale, le trasformazioni canoniche e il loro uso.

Una buona conoscenza degli argomenti del programma medio garantisce il superamento dell'esame con una votazione intorno al 25.

- Il **programma completo** contiene tutti gli argomenti. Viste le condizioni in cui abbiamo lavorato questo semestre, ho indicato alcuni argomenti come facoltativi, per rendere più agevole la preparazione dell'esame.

Per ogni parte del programma ho indicato il corrispondente capitolo delle dispense (nella versione aggiornata al 2 giugno 2020). Per ogni argomento ho indicato (temo approssimativamente) la lezione registrata in cui ho svolto l'argomento.

Indice

Spazi di Hilbert	3
Problemi di Sturm-Liouville	4
Operatori lineari	5
Operatori compatti	6
Teoria del potenziale	7
Meccanica hamiltoniana	8
Meccanica quantistica	9

Spazi di Hilbert [ifm19, cap. 2]

- 1 Spazi di Hilbert reali e complessi. Esempi $L^2(\Omega, \mathbb{R})$, $L^2(\Omega, \mathbb{C})$, con Ω dominio di \mathbb{R}^n , $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Spazi L^2 con pesi.
- 2 Sottospazi lineari chiusi e non. Ortogonale di un sottospazio.
- 3 Identità del parallelogramma e Teorema della proiezione in spazi di Hilber complessi.
- 4 Sistemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel; spazi separabili e sistemi ortonormali completi (basi), Identità di Parseval. Basi in spazi prodotto.
- 5 Ortogonalizzazione di Gramm-Schmidt, esistenza di basi in spazi separabili.
- 6 Base di Fourier.
- 7 Completezza della base di Fourier.
- 8 La base di Haar in $L^2[0, 1]$ e in $L^2(\mathbb{R})$.

Problemi di Sturm-Liouville [ifm19 cap. 1, 3, 4, 5]

- 1 La lagrangiana per una corda vibrante non omogenea; le equazioni del moto lineari; le condizioni al contorno.
- 2 Polinomi di Legendre (con dettagli)
- 3 Funzioni generalizzate di Legendre, definizione
- 4 Polinomi di Tchebyshev, definizione.
- 5 Polinomi di Hermite, definizione.
- 6 Il laplaciano in coordinate sferiche.
- 7 L'operatore di Laplace-Beltrami per la superficie della sfera.
- 8 Armoniche sferiche e polinomi armonici.
- 9 Funzione generatrice per i polinomi di Legendre
- 10 lez06 Sviluppo asintotico del potenziale elettrostatico in multipoli e in armoniche sferiche.

Operatori lineari [ifm19 cap 6, 7, 8]

- 1 lez07 Operatori limitati e norma di un operatore, continuità e limitatezza. Estensione di operatori limitati definiti su sottospazi densi. Decomposizione di H attraverso immagine e nucleo. Esempi: isometrie e proiettori e loro norme. Isometria con ℓ_2 degli spazi di Hilbert separabili.
- 2 lez07 La trasformata di Fourier in L^2
- 3 lez19 La trasformata di Fourier in L^1
- 4 lez19 Iniettività della trasformata di Fourier in L^1 e completezza dei polinomi di Hermite.
- 5 lez08 Il duale di uno spazio di Hilbert e il teorema di rappresentazione di Riesz.
- 6 lez08 Operatore aggiunto e sue proprietà.
- 7 lez07 Operatori di moltiplicazione - condizioni di limitatezza
- 8 lez07 Operatori di integrali - condizioni di limitatezza
- 9 lez07 Operatori di convoluzione - condizioni di limitatezza
- 10 lez09 L'operatore di shift in $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, il suo aggiunto, immagine e nucleo.

Operatori compatti [ifm 19, cap. 9, 10, 12]

- 1 lez10 Operatori di rango finito. Teorema dell'alternativa per operatori di rango finito.
- 2 lez11 Serie di Neumann e teoremi dell'alternativa per perturbazioni piccole di operatori di rango finito.
- 3 lez12 Esempi di precompatti in spazi di Hilbert. Convergenza debole di successioni, esempi e proprietà. Precompattanza debole dei limitati in H separabile (enunciati).
- 4 lez13 Convergenza debole e forte di operatori.
- 5 lez14 Operatori compatti.
- 6 lez14 Teorema dell'alternativa per operatori compatti
- 7 lez16 Risolvente e spettro per operatori.
- 8 lez16 Proprietà del risolvente.
- 9 lez17 Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti.
- 10 lez18 **Introduzione agli operatori illimitati: aggiunto, chiusura dell'aggiunto, realtà dello spettro degli operatori autoaggiunti, successioni di Weyl.**

Teoria del potenziale [ifm19 cap. 13.3-13.5, 14]

- 1 lez21 Il problema di Poisson Dirichlet in H_0^1 . Compattezza dell'inverso del laplaciano. Il problema di Poisson Neumann in H^1 .
- 2 lez22 Il potenziale di volume, regolarità C^1 . Cenni sulla regolarità $C^{2+\alpha}$.
- 3 lez23 Definizione dei potenziali di singolo e doppio strato. La terza identità di Green per funzioni regolari e il Lemma di Gauss. Enunciati sulle discontinuità del potenziale di doppio strato (senza dimostrazione)
- 4 lez23 Dimostrazioni della discontinuità del potenziale di doppio strato e continuità della sua derivata normale, discontinuità della derivata normale del potenziale di singolo strato, nel caso di densità regolari.
- 5 lez24 Proprietà del potenziale di doppio strato come operatore: limitatezza in L^∞ e in L^2 , compattezza.
- 6 lez24 Regolarità delle soluzioni dell'equazione di Fredholm $K\mu + \lambda\mu = f$ con λ non nullo e f continua. Regolarità delle autofunzioni (solo enunciato)
- 7 lez24 Dimostrazione della discontinuità del potenziale di doppio strato nel caso di densità continue
- 8 lez25 Risoluzione del problema di Laplace-Dirichlet nel caso di domini strettamente convessi.
- 9 lez25 Risoluzione del problema di Laplace-Dirichlet nel caso generale.
- 10 lez26 Risoluzione del problema di Laplace-Neumann interno.
- 11 lez26 Distribuzione delle cariche su un conduttore.

Meccanica hamiltoniana [h19]

- 1 lez27 Flussi e campi vettoriali. L'equazione di Liouville e l'equazione del trasporto associate a un flusso.
- 2 lez28 Metodo delle caratteristiche per le EDP del primo ordine. L'equazione di Hamilton-Jacobi e le equazioni di Hamilton,
- 3 lez28 Principio variazionale per le equazioni di Hamilton. La trasformata di Legendre e il legame con i sistemi lagrangiani.
- 4 lez29 Sistemi unidimensionali, sistema preda-predatore, sistema SIR.
- 5 lez29 Teoremi del ritorno.
- 6 lez30 Trasformazioni canoniche, trasformazioni simplettiche, matrici simplettiche.
- 7 lez31 Parentesi di Poisson.
- 8 lez32 Commutatori di operatori e di campi. Commutazione dei flussi.
- 9 lez33 Teorema di Noether per sistemi hamiltoniani.
- 10 lez34 Funzioni generatrici.
- 11 lez34 L'integrale di azione come generatore del flusso.
- 12 lez35 Metodo di Hamilton-Jacobi, e enunciati dei teoremi di integrabilità.
- 13 lez36 Teorema di integrabilità locale di Liouville.
- 14 lez36 Rimozione della condizione tecnica di indipendenza delle derivate rispetto agli impulsi.
- 15 lez37 Teorema di integrabilità globale di Arnold-Liouville.
- 13 lez38 Variabili azione-angolo.
- 13 lez39 Moti quasi periodici sul toro; ergodicità.

Non introduzione alla Meccanica quantistica

- 1 lez40 Stati quantistici in C^2 ; osservabili, spin e matrici di Pauli.
- 2 lez41 Misura di un osservabile. Commutazione tra osservabili.
- 3 lez41 Evoluzione temporale. Esempio.
- 4 lez42 Due spin. Stati di singoletto e di tripletto. Matrici densità.