IFM - foglio esercizi 03, dell'11 marzo 2020

Questo foglio contiene i primi esercizi sugli operatori, la loro norma, l'aggiunto.

Esercizio 1.
Considera i seguenti operatori in $L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
T_1 f(x) &= f(-x) \\
T_2 f(x) &= \operatorname{sgn}(x) f(x) \\
T_3 f(x) &= \mathcal{X}\{x > 0\} f(-x) \\
T_4 f(x) &= f(|x|) \\
T_5 f(x) &= f(-|x|) \\
T_6 f(x) &= f(x) + f(-x) \\
T_7 f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

Trova gli aggiunti.
Quale di questi operatori è autoaggiunto? Quale unitario? Uno di essi è un proiettore, quale?
Calcola le loro norme.

NB non inventate un segno meno in identità di questo tipo:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) f(-x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(-x) f(x)\, \mathrm{d}x$$

Esercizio 2. Operatori di moltiplicazione in $\ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C})$
Sia $z_k \in \mathbb{C}$ una successione limitata con $k \in \mathbb{Z}$. Sia T l'operatore su $\ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C})$ definito da

$$(Tx)_k = z_k x_k$$

Mostra che è limitato. Mostra che il suo aggiunto è

$$(T^* x)_k = \overline{z}_k x_k$$

Mostra che la norma di T è $\sup_k |z_k|$.
Suggerimento: se $m = \sup_k |z_k|$ è raggiunto per $k = h$, calcola $\|Te_h\|$. Se invece il sup non è raggiunto, considera una successione k_n tale che $m = \lim |z_{k_n}|$ e calcola $\|Te_{k_n}\|$.

Esercizio 3.
Sia $T \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ dato da

$$(Tx)_k = (1 - e^{-k}) x_k$$

Mostra che è limitato e autoaggiunto, e trova $\|T\|$.

Esercizio 4. Norma degli operatori di moltiplicazione
In $L^2(\Omega)$, sia M_h l'operatore di moltiplicazione per h. Dimostra che $\|M_h\| = \|h\|_\infty$.
Suggerimento. Sia $m = \|h\|_\infty$. Dato $\varepsilon > 0$,

$$\Omega_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \Omega : |h(\mathbf{x})| > m - \varepsilon\}$$

ha misura non nulla (perché?).

Dunque esiste $R > 0$ tale che $\Omega_\varepsilon \cap B_R$ ha misura non nulla. Stima dal basso $\|M_h f\|$ con f funzione caratteristica dell'insieme trovato...

Esercizio 5. Operatori di convoluzione

Sia $g(x) = \sin x/x$. Prova che è una funzione di L^2, e trova la sua trasformata di Fourier ricordando che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \pi \mathrm{sign}\,(\alpha)$$

(l'integrale va inteso nel senso del valore principale). Osserva che $\hat{g}(\lambda)$ è proporzionale alla funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$. Mostra che l'operatore

$$Kf(x) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(y)\,\mathrm{d}y$$

è ben definito su $\mathbf{S}_\infty$, è continuo in L^2, e quindi è prolungabile ad un operatore su L^2, che ha l'espressione integrale, nel senso del valore principale,

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(y)\,\mathrm{d}y,$$

ma il nucleo non è in L^1.

Esercizio 6. Proiettori

Mostra che se P è un operatore di proiezione allora è autoaggiunto e idempotente (cioè $P^2 = P$). In $L^2(\Omega; \mathbb{R})$, mostra che un operatore di moliplicazione M_h con h funzione misurabile limitata è un proiettore se e solo se h è la funzione caratteristica di un misurabile di Ω.

Esercizio 7. Proiettori e Fourier

Dato $m \in \mathbb{R}$, mostra che in $L^2(\mathbb{R})$ l'operatore che a f associa la funzione

$$E_m f(x) = \int_{-\infty}^{m} \mathrm{d}\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \hat{f}(\lambda)$$

è un proiettore.

Esercizio 8. Operatori integrali

Per quali $\alpha > 0$ l'operatore integrale

$$K_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha + |y|^\alpha + 1} f(y)\,\mathrm{d}y$$

ha nucleo in $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$?
Per quali α l'operatore K_α è limitato?

Esercizio 9. Operatore impulso

Un operatore (illimitato) A definito su $\mathcal{D}(A)$ sottospazio denso di H si dice **simmetrico** se $\forall f, g \in \mathcal{D}(A)$ vale

$$(g, Af) = (Ag, f).$$

In meccanica quantistica l'operatore illimitato $\mathrm{i}\,\partial_x$ è detto operatore impulso. Prova che è simmetrico nel dominio $\mathbf{C}_0^\infty([0, \pi])$, ma non lo è in $\mathbf{C}^\infty([0, \pi])$.
Prova che è illimitato, costruendo una successione di funzioni f_k di norma 1 su cui la norma di $\mathrm{i}\,\partial_x f_k$ è divergente.