IFM - foglio esercizi 02, 5 marzo 2020

Anche questo foglio di esercizi riguarda gli spazi di Hilbert e le basi.

Esercizio 1. * Un'osservazione sulle funzioni generalizzate di Legendre

Le funzioni generalizzate di Legendre $G_{n,2}$, con $n \geq 2$, sono polinomi di grado n, in cui compare il fattore $(1-x^2)$ a moltiplicare, e sono un sistema ortonormale completo di $L^2((-1,1))$. Questo implica che 1 è esprimibile come una serie di polinomi pari di grado maggiore o uguale a 2, con convergenza in L^2.
Invece di costruire questa serie convergente, limitiamoci a mostrare che 1 è nello span di $(1-x^2)x^k$, con $k \in \mathbb{N}$. Espandendo in serie

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} x^{2k}, \quad \text{da cui } 1 = (1-x^2)\sum_{k\in\mathbb{N}} x^{2k}$$

La convergenza della serie è uniforme nei compatti di $(-1,1)$. Mostra che la convergenza è in L^2.

Definendo $y^2 = 1-x^2$, l'uguaglianza precedente diventa

$$1 = y^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} (1-y^2)^k$$

con convergenza uniforme nei compatti di $(-1,1)\backslash\{0\}$. Mostra che anche in questo caso la convergenza è in L^2.

Esercizio 2. * Basi di polinomi di grado elevato

La chiusura di $\text{span}\{x^{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è il sottospazio M_p delle funzioni pari in $L^2((-1,1))$. Usando l'esercizio precedente, mostra che

- $\text{span}\{x^{2k}\}_{k\geq 1}$ è denso in M_p;
- per ogni $m \geq 0$, $\text{span}\{x^{2k}\}_{k\geq m}$ è denso in M_p;
- togliendo un numero finito di elementi di $\{x^{2k}\}_{k\geq 1}$ si ottiene un sottoinsieme che ha span denso in M_p.

Che succede se togli un numero infinito di elementi, ma lasciandone un numero infinito? (Non ricordo cosa avevo in mente quando ho scritto questa parte dell'esercizio, temo troppo difficile. Cito però il seguente teorema di Müntz: in $\mathbf{C}[a,b]$, con $a > 0$, lo span di $\{x^{\lambda_i}\}_i \in \mathbb{N}$ con $\lambda_i > 0$, è denso se e solo se $\sum 1/\lambda_i = +\infty$, da cui segue la densità in $L^2[a,b]$)
Attenzione: se levate un vettore da una base ortonormale non ottenete un sistema a span denso: evidentemente non potete ricostruire 1 usando $\cos(kx)$ con $k \geq 1$, perchè sono tutte funzioni ortogonali a 1.

Esercizio 3. * Regolarità e sommabilità

Se una funzione periodica f è di classe C^1, la sua serie di Fourier converge uniformemente, perché i suoi coefficienti di Fourier $\hat{f}_k$ decadono come $1/k$, che è quadrato-sommabile. Infatti $\hat{f}'_k = \mathrm{i}k\hat{f}_k$.

Per i poinomi di Hermite vale invece

$$H'_n = 2nH_{n-1}.$$

Sia ora f una funzione C^1_0 in $\mathbb{R}$, e considera il suo sviluppo nella base data dai polinomi di Hermite moltiplicati per $\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Mostra che anche in questo caso i coefficienti decadono come $1/n$.

Esercizio 4. Identità di polarizzazione
Mostra che in uno spazio di Hilber su $\mathbb{C}$ vale

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 - \mathrm{i}\|\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}\|^2 + \mathrm{i}\|\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v}\|^2\right)$$

Trova l'analoga espressione nel caso reale.
Usa questa identità per provare che se H e H_1 sono due spazi di Hilbert e se $F : H \to H_1$ è linerare e conserva la norma, allora F conserva il prodotto scalare.