IFM - foglio esercizi 01, del 27 febbraio 2020

versione 2 dell'11 marzo 2020, correzione espressione di ϕ_k^n nell'esercizio 8

Questo foglio di esercizi è un modo per ripassare concetti riguardo gli spazi L^2, e qualcos'altro. Segnalatemi eventuali errori o punti poco chiari.

Esercizio 1.

Sia H uno spazio di Hilbert, e V un suo sottospazio finito-dimensionale.
Prova che V è chiuso.

Esercizio 2. Funzioni pari e dispari

Considera $L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (e anche $L^2((-L,L);\mathbb{R})$). Sia $M_p =$ sottospazio di L^2 delle funzioni pari, e $M_d =$ sottospazio in L^2 delle funzioni dispari. Prova che sono chiusi e che sono ortogonali tra loro.
Ricordando che ogni funzione f si decompone in una funzione pari e una dispari come

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

scrivi i proiettori su M_p e su M_d.
.

Esercizio 3.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Sia V il sottospazio delle funzioni a media nulla. Prova che è chiuso e determina il suo ortogonale.

Esercizio 4. Basi di seni e coseni in $L^2((0,\pi))$

Mostra che $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)\right\}$ per $k \geq 1$ è una base in $L^2((0,\pi))$.
Suggerimento:

- verifica che sono ortonormali
- $\{1, \sin(kx), \cos(kx) | \, k \geq 1\}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2((-\pi,\pi))$;
- le funzioni dispari si sviluppano in soli seni
- ogni funzione di $L^2((0,\pi))$ si prolunga ad una funzione dispari in $L^2((-\pi,\pi))$
- ...

Mostra che anche $\{\cos(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo.

Esercizio 5.

Scrivi lo sviluppo di 1 rispetto alla base trovata di soli seni in $(0,\pi)$.

La convergenza può essere uniforme in $[0,\pi]$?

Esercizio 6. Basi di polinomi in $L^2((0,1))$

Procedendo come nell'esercizio precedente, prova che in $L^2((0,1))$ esiste una base di polinomi pari e una base di polinomi dispari, utilizzando i polinomi di Legendre.

Esercizio 7. * Sistemi ortogonali completi in $\ell_2(\mathbb{N})$
Sia

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1100\dots) \\ \mathbf{v}_2 &= (10100\dots) \\ \mathbf{v}_3 &= (100100\dots) \\ \mathbf{v}_4 &= (1000100\dots) \end{aligned}$$

Mostra che $\mathbf{e}_0 = (100\dots)$ è nello span di $\{\mathbf{v}_k\}_{k\geq 1}$.
Suggerimento: sia V_n lo span di $\{\mathbf{v}_k\}_{k\geq 1}$. Trova la proiezione $P_n\mathbf{e}_0$ di $\mathbf{e}_0$ su V_n, minimizzando $\|\mathbf{e}_0 - \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k\|^2$, e mostra che nel limite $n \to +\infty$

$$\|P_n\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0\| \to 0$$

Usa questo risultato per provare che lo span di $\{\mathbf{v}_k\}_{k\geq 1}$ è denso. Nota che in questa sistema manca $(10000\dots)$.

Esercizio 8. Base di Haar
Considero $L^2((0,1);\mathbb{R})$. Sia $\phi_0 = 1$, e, dato $n > 0$, per $k \in \{0, \dots 2^{n-1} - 1\}$

$$\phi_k^n(x) = 2^{(n-1)/2}\left(\mathcal{X}\{x \in [k/2^{n-1}, k/2^{n-1} + 1/2^n)\} - \mathcal{X}\{x \in [k/2^{n-1} + 1/2^n, (k+1)/2^{n-1})\}\right)$$

Disegnane qualcuna per capire come sono fatte e che relazione c'è tra le une e le altre.

a. Mostra che formano un sistema ortonormale.

b. Mostra che lo span di ϕ_0 e ϕ_0^1 è formato dalle funzioni costanti su $[0, 1/2)$ e costanti su $[1/2, 1)$.

c. Mostra che lo span di ϕ_0, ϕ_0^1, $\{\phi_k^2\}_{k=0}^3$ è formato dalle funzioni costanti sugli intervalli sui quattro intervalli di lunghezza $1/4$ in cui si partiziona $[0, 1]$.

d. In generale mostra che lo span fino a $\{\phi_k^n\}_{k=0}^{2^n-1}$ è formato dalle funzioni costanti sui 2^n intervalli di lunghezza $1/2^n$ in cui si partiziona $[0, 1]$.

e. Mostra che $\mathcal{X}\{x \in (a, b)\}$ è approssimabile in L^2 dalle funzioni di Haar.

f. Concludi che le funzioni di Haar sono un sistema ortonormale completo.

Esercizio 9. Le ondine di Haar
Sia

$$\phi(x) = \mathcal{X}\{x \in [0, 1/2)\} - \mathcal{X}\{x \in [1/2, 1)\}$$

Osserva che $\phi(x)$ ha media nulla e norma 1 in $L^2(\mathbb{R})$.
Considera $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, e definisci

$$\phi_m^n = 2^{n/2}\phi(2^n x - m)$$

Ossserva che ϕ_m^n ha media nulla e norma 1, e che si ottiene scalando $\phi(x)$ del fattore 2^n, e poi traslando la funzione ottenuta di $m/2^n$, cioè di un qualunque multiplo intero di 2^n.

Mostra che ϕ_m^n è un sistema ortonormale.

Mostra che è una base. Suggerimento: nell'esercizio precedente, abbiamo considerato la base di Haar in $L^2((0,1);\mathbb{R})$ che è formata esattamente dalle funzioni ϕ_m^n che hanno supporto in $[0,1]$, e dalla funzione costante 1, che non è una delle tipo ϕ_m^n. Si potrebbe sospettare che $\mathcal{X}\{x \in [0,1]\}$ non sia esprimibile nelle ϕ_m^n, invece si può. Procedi così:

- Scrivi lo sviluppo di $\mathcal{X}\{x \in [0,1]\}$ nelle ϕ_m^n e mostra la sua convergenza in L^2 a $\mathcal{X}\{x \in [0,1]\}$.
- Deduci che ogni funzione di $L^2((0,1);\mathbb{R})$, prolungata a 0 fuori da $[0,1]$ è sviluppabile nella base.
- Mostra che ogni funzione di $L^2(\mathbb{R})$ a supporto compatto è sviluppabile nella base.
- Usando la densità delle funzioni a supporto compatto, concludi mostrando la completezza del sistema.