Soluzione del compito B

Esercizio 1

Trova la soluzione $u(x,t)$ in $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ dell'equazione

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = 2\,\partial_x^2 u(x,t) + \sin(x) \\ u(x,0) = \sin(3x) \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t) \end{cases}$$

Poiché $\sin(x)$ e $\sin(3x)$ sono autofunzioni di ∂_x^2 con condizioni di Dirichlet nulle al bordo, cerco la soluzione della forma

$$u(x,t) = A(t)\sin x + B(t)\sin(3x)$$

Calcolandola in $t=0$ e uguagliando al dato iniziale ottengo che $A(0)=0$ e $B(0)=1$. Sostituendo l'espressione di u nell'equazione si ottiene

$$\dot{A}(t)\sin x + \dot{B}(t)\sin(3x) = -2A(t)\sin x - 18B(t)\sin(2x) + \sin x$$

Dunque

$$\dot{A}(t) = -2A(t) + 1, \quad \text{e} \quad \dot{B}(t) = -18B(t)$$

La seconda equazione ha soluzione $B(t) = B(0)\mathrm{e}^{-18t} = \mathrm{e}^{-18t}$.

La prima è equivalente a

$$\partial_t\left(A(t) - 1/2\right) = -2\left(A(t) - 1/2\right)$$

dunque, usando $A(0)=0$,

$$A(t) = 1/2 + \mathrm{e}^{-2t}\left(A(0) - 1/2\right) = (1-\mathrm{e}^{-2t})/2$$

Esercizio 2

Trova la soluzione $u(x,t)$ in $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ dell'equazione

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = 2\,\partial_x^2 u(x,t) + 18\cos(3x) \\ u(x,0) = \cos(3x) \\ \partial_x u(0,t) = 0 = \partial_x u(\pi,t) \end{cases}$$

Poiché la funzione $\cos(3x)$ è un'autofunzione di ∂_x^2 con condizioni di Neumann al bordo, cerco la soluzione della forma

$$u(x,t) = A(t)\cos(3x)$$

Valutando questa espressione in $t=0$ si ottiene $A(0)=1$. Sostituendo questa espressione nell'equazione si ottiene

$$\dot{A}(t)\cos(3x) = -18A(t)\cos(2x) + 18\cos(2x)$$

da cui

$$\dot{A}(t) = -18A(t) + 18$$

Osservo che $A = 1$ è soluzione di equilibrio, e poiché il dato iniziale è proprio 1, si ottiene $A(t) \equiv 1$.

Esercizio 3

Trova la soluzione $u(x,t)$ in $[0,\pi] \times \mathbb{R}$ dell'equazione

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = 2\,\partial_x^2 u(x,t) + 2a\delta(x - \pi/4) + \delta(x - \pi/2) \\ u(x,0) = 0 \\ \partial_x u(0,t) = 0 = \partial_x u(\pi,t) \end{cases}$$

Per quali valori di a la soluzione è limitata?

Sia $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx)$ per $n \geq 1$, e sia $\psi_0 = \frac{1}{\pi}$. Queste funzioni sono una base ortonormale di $L^2[0,\pi]$ che soddisano le condizioni al contorno e sono autofunzioni di autovalore $-n^2$ per ∂_x^2. Sviluppo la forzante in questa base, indicando con (,) il prodotto scalare in L^2:

$$(\psi_n(x), 2a\delta(x - \pi/4) + \delta(x - \pi/2)) = 2a\psi_n(\pi/4) + \psi_n(\pi/2)$$

Sviluppo anche la soluzione, cioè

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{u}_n(t)\psi_n(x)$$

dove $\hat{u}^n(t) = (\psi_n(\cdot), u(\cdot,t))$. Inserendo questa espressione nell'equazione insieme allo sviluppo del termine forzante si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}_n(t) = -2n^2\hat{u}_n(t) + c_n$$

Per $n \neq 0$, questo sistema è equivalente a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\hat{u}_n(t) - \frac{c_n}{2n^2}\right) = -2n^2\left(\hat{u}_n(t) - \frac{c_n}{2n^2}\right)$$

Dunque, ricordando che il dato iniziale è nullo

$$\hat{u}_n(t) = \frac{c_n}{2n^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2n^2 t}\right)$$

Invece per $n = 0$ si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_0(t) = c_0, \quad \text{da cui} \quad u_0(t) = c_0 t$$

La soluzione è limitata se e solo se $c_0 = 0$, cioè se e solo se $a = -1/2$ (ricordo che ψ_0 è costate).