

Soluzione compito A

Esercizio 1

Trova la soluzione $u(x, t)$ in $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ dell'equazione

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = 4 \partial_x^2 u(x, t) + \sin(2x) \\ u(x, 0) = \sin x \\ u(0, t) = 0 = u(\pi, t) \end{cases}$$

Poiché $\sin(x)$ e $\sin(2x)$ sono autofunzioni di ∂_x^2 con condizioni di Dirichlet nulle al bordo, cerco la soluzione della forma

$$u(x, t) = A(t) \sin x + B(t) \sin(2x)$$

Calcolandola in $t = 0$ e uguagliando al dato iniziale ottengo che $A(0) = 1$ e $B(0) = 0$. Sostituendo l'espressione di u nell'equazione si ottiene

$$\dot{A}(t) \sin x + \dot{B}(t) \sin(2x) = -4A(t) \sin x - 16B(t) \sin(2x) + \sin(2x)$$

Dunque

$$\dot{A}(t) = -4A(t), \quad \text{e} \quad \dot{B}(t) = -16B(t) + 1$$

La prima equazione ha soluzione $A(t) = A(0)e^{-4t} = e^{-4t}$.

La seconda è equivalente a

$$\partial_t (B(t) - 1/16) = -16 (B(t) - 1/16)$$

dunque, usando $B(0) = 0$,

$$B(t) = 1/16 + e^{-16t} (B(0) - 1/16) = (1 - e^{-16t})/16$$

Esercizio 2

Trova la soluzione $u(x, t)$ in $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ dell'equazione

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = 4 \partial_x^2 u(x, t) + 16 \cos(2x) \\ u(x, 0) = \cos(2x) \\ \partial_x u(0, t) = 0 = \partial_x u(\pi, t) \end{cases}$$

Poiché la funzione $\cos(2x)$ è un'autofunzione di ∂_x^2 con condizioni di Neumann al bordo, cerco la soluzione della forma

$$u(x, t) = A(t) \cos(2x)$$

Valutando questa espressione in $t = 0$ si ottiene $A(0) = 1$. Sostituendo questa espressione nell'equazione si ottiene

$$\dot{A}(t) \cos(2x) = -16A(t) \cos(2x) + 16 \cos(2x)$$

da cui

$$\dot{A}(t) = -16A(t) + 16$$

Osservo che $A = 1$ è soluzione di equilibrio, e poiché il dato iniziale è proprio 1, si ottiene $A(t) \equiv 1$.

Esercizio 3

Trova la soluzione $u(x, t)$ in $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ dell'equazione

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = 4 \partial_x^2 u(x, t) + \delta(x - \pi/4) - a\delta(x - \pi/2) \\ u(x, 0) = 0 \\ \partial_x u(0, t) = 0 = \partial_x u(\pi, t) \end{cases}$$

Per quali valori di a la soluzione è limitata?

Sia $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx)$ per $n \geq 1$, e sia $\psi_0 = \frac{1}{\pi}$. Queste funzioni sono una base ortonormale di $L^2[0, \pi]$ che soddisfano le condizioni al contorno e sono autofunzioni di autovalore $-n^2$ per ∂_x^2 . Sviluppo la forzante in questa base, indicando con (\cdot, \cdot) il prodotto scalare in L^2 :

$$c_n = (\psi_n(x), \delta(x - \pi/4) - a\delta(x - \pi/2)) = \psi_n(\pi/4) - a\psi_n(\pi/2)$$

Sviluppo anche la soluzione, cioè

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{u}_n(t) \psi_n(x)$$

dove $\hat{u}^n(t) = (\psi_n(\cdot), u(\cdot, t))$. Inserendo questa espressione nell'equazione insieme allo sviluppo del termine forzante si ottiene

$$\frac{d}{dt} \hat{u}_n(t) = -4n^2 \hat{u}_n(t) + c_n$$

Per $n \neq 0$, questo sistema è equivalente a

$$\frac{d}{dt} \left(\hat{u}_n(t) - \frac{c_n}{4n^2} \right) = -4n^2 \left(\hat{u}_n(t) - \frac{c_n}{4n^2} \right)$$

Dunque, ricordando che il dato iniziale è nullo

$$\hat{u}_n(t) = \frac{c_n}{4n^2} \left(1 - e^{-4n^2 t} \right)$$

Invece per $n = 0$ si ottiene

$$\frac{d}{dt} u_0(t) = c_0, \quad \text{da cui} \quad u_0(t) = c_0 t$$

La soluzione è limitata se e solo se $c_0 = 0$, cioè se e solo se $a = 1$ (ricordo che ψ_0 è costante).