

DIPARTIMENTO  
DI MATEMATICA



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# Appunti di Meccanica Hamiltoniana per il corso di IFM 2018-2019

Dario Benedetto - <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario>

Sapienza Università di Roma  
Dipartimento di Matematica  
Piazzale Aldo Moro n. 5, 00185 Roma  
[www.mat.uniroma1.it](http://www.mat.uniroma1.it)

# Appunti di meccanica hamiltoniana per il corso di IFM 2018-2019

23 maggio 2019

## Indice

<b>1</b>	<b>Formalismo hamiltoniano</b>	<b>4</b>
1.1	Dalla lagrangiana all'hamiltoniana . . . . .	4
1.2	Lagrangiane e hamiltoniane naturali . . . . .	6
1.3	Variabili cicliche e riduzione dei gradi di libertà . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Trasformazioni simplettiche e parentesi di Poisson</b>	<b>9</b>
2.1	Trasformazioni di coordinate . . . . .	9
2.2	Trasformazioni simplettiche . . . . .	10
2.3	Parentesi di Poisson . . . . .	12
2.4	Integrali primi . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Il teorema di Noether per sistemi hamiltoniani</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>L'equazione di Hamilton-Jacobi</b>	<b>21</b>
4.1	Un principio variazionale per le equazioni di Hamilton . . . . .	21
4.2	$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt$ . . . . .	22
4.3	Funzioni generatrici . . . . .	25
4.4	L'equazione di Hamilton-Jacobi . . . . .	28
4.5	Il metodo di Hamilton-Jacobi . . . . .	29
4.6	L'equazione caratteristica di HJ . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Sistemi integrabili</b>	<b>33</b>
5.1	Sistemi integrabili . . . . .	33
5.2	Geometria simplettica . . . . .	34
5.3	Integrabilità locale . . . . .	36
5.4	Integrabilità globale . . . . .	38
5.5	Moti quasi periodici . . . . .	41
5.6	Variabili azione-angolo . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Il teorema del ritorno di Poincaré</b>	<b>45</b>

Queste note presuppongono una buona conoscenza del formalismo lagrangiano. Per approfondire i temi di questi appunti suggerisco la lettura di:

BN P. Buttà, P. Negrini: **Note del corso di sistemi dinamici**

[www1.mat.uniroma1.it/~butta/didattica/sisdin.pdf](http://www1.mat.uniroma1.it/~butta/didattica/sisdin.pdf)

T A. Teta: **Brief Review on Hamiltonian Mechanics and Electromagnetism.pdf**  
che trovate su

<https://sites.google.com/site/sandroprova/didattica-1/appunti-ed-esercizi>

C E. Caglioti: **Dispense di Meccanica Razionale** che trovate su

<https://sites.google.com/site/ecaglioti/didattica/MR>

E R. Esposito: **Appunti delle lezioni di meccanica razionale**, Aracne 1999.

A V.I. Arnolod: **Metodi matematici della meccanica classica** Editori Riuniti (in cui è dato ampio spazio agli aspetti geometrico-differenziali del formalismo hamiltoniano).

# 1 Formalismo hamiltoniano

## 1.1 Dalla lagrangiana all'hamiltoniana

Sia  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  una lagrangiana a  $n$  gradi di libertà, con  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  (per ora  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$  sono solo i nomi delle variabili). Ricordo che le equazioni di Eulero-Lagrange a essa associate sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$$

dove  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  è il gradiente rispetto alla variabile  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$  quello rispetto a  $\mathbf{q}$ , e questi gradienti sono poi calcolati in  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  che stavolta sono posizione e velocità in funzione del tempo. Per un sistema meccanico, la lagrangiana ha le dimensioni di una energia, ed in genere è uguale all'energia cinetica  $\mathcal{T}$  meno l'energia potenziale  $\mathcal{U}$ , e in tal caso l'energia meccanica è  $\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{U}$ .

Più generale, indipendentemente dal fatto in  $L$  si possa individuare un'energia cinetica e una potenziale, si definisce l'**energia generalizzata** come

$$E = \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

Se  $L$  non dipende dal tempo,  $E$  è una quantità conservata. Solo nel caso in cui  $L$  è  $\mathcal{T} - \mathcal{U}$  l'energia generalizzata coincide con l'energia meccanica  $\mathcal{T} + \mathcal{U}$ .

Per gli scopi di questo paragrafo, è importante evidenziare la distinzione tra le variabili in cui viene descritto il moto (cioè  $\mathbf{q}(t)$  e la sua derivata temporale  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ ) e le variabili in cui è definita la lagrangiana. Dopo questo paragrafo, tornerò ad indicare con  $\dot{\mathbf{q}}$  sia la velocità del moto  $\mathbf{q}(t)$ , sia la variabile nella lagrangiana.

Sia dunque  $L = L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t)$ , con  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Le equazioni di Eulero-Lagrange associate al  $L$  sono:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}} \Big|_{\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t} \right] = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t} \quad (1.1)$$

Queste equazioni sono un sistema di equazioni del secondo ordine, in forma non esplicita, nella variabile  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$  (non esplicita vuol dire che non è del tipo  $\ddot{\mathbf{q}} = \dots$ ). Posso riscrivere questo sistema come un sistema del primo ordine, in forma non esplicita, nella coppia di variabili  $(\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\eta}(t)) \in \mathbb{R}^{2n}$ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\eta}(t) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\eta}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\eta}(t), t) \end{cases} \quad (1.2)$$

Definisco ora i **momenti coniugati** alle variabili  $q_i$  come le funzioni

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \eta_i}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t)$$

In notazione vettoriale

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t)$$

Ipotizzo, inoltre, che questa relazione sia invertibile in  $\boldsymbol{\eta}$ . Localmente, questo è garantito dal teorema della funzione implicita, se

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\eta}^2} \neq 0$$

Quindi posso considerare  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  e descrivere il moto nelle variabili  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Il sistema (1.2) diventa

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t), t) \end{cases} \quad (1.3)$$

che è un sistema del primo ordine, in forma esplicita, per il moto delle  $2n$  variabili  $(q, p)$ . Questo sistema, equivalente alle equazioni di Eulero-Lagrange se vale la condizione di invertibilità della relazione tra  $\boldsymbol{\eta}$  e  $\mathbf{p}$ , può essere riscritto molto meglio di così, introducendo la **funzione di Hamilton** (o “hamiltoniana”)

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta} - L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t)$$

dove  $\boldsymbol{\eta}$  è funzione di  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . Il differenziale dell’hamiltoniana è

$$dH = \boldsymbol{\eta} \cdot d\mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot d\boldsymbol{\eta} - \partial_{\mathbf{q}}L \cdot d\mathbf{q} - \partial_{\boldsymbol{\eta}}L \cdot d\boldsymbol{\eta} - \partial_t L dt$$

Poiché  $\mathbf{p} = \partial_{\boldsymbol{\eta}}L$ , i termini in  $d\boldsymbol{\eta}$  si cancellano, e si ottiene

$$dH = \boldsymbol{\eta} \cdot d\mathbf{p} - \partial_{\mathbf{q}}L \cdot d\mathbf{q} - \partial_t L dt$$

da cui

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{q}}H &= -\partial_{\mathbf{q}}L \\ \partial_{\mathbf{p}}H &= \boldsymbol{\eta} \\ \partial_t H &= -\partial_t L \end{aligned}$$

Usando le prime due uguaglianze, si ottiene che il sistema (1.3), e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange, sono equivalenti alle **equazioni di Hamilton**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \partial_{\mathbf{p}}H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \dot{\mathbf{p}} = -\partial_{\mathbf{q}}H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{cases} \quad (1.4)$$

### \* La trasformata di Legendre

L’hamiltoniana è la **trasformata di Legendre** della lagrangiana. In generale, data  $f(\boldsymbol{\eta})$  da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$  convessa, la sua trasformata di Legendre è

$$f^*(\mathbf{p}) = \sup_{\boldsymbol{\eta}} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta} - f(\boldsymbol{\eta}))$$

che è ancora una funzione convessa. Se l’estremo superiore è raggiunto in  $\boldsymbol{\eta}$ , allora deve essere

$$\mathbf{p} = \partial_{\boldsymbol{\eta}}f(\boldsymbol{\eta})$$

e in tal caso si può determinare  $\boldsymbol{\eta}$  in funzione di  $\mathbf{p}$ , ottenendo

$$f^*(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta} - f(\boldsymbol{\eta}).$$

Per un'hamiltoniana naturale, l'energia cinetica è una forma quadratica definita positiva in  $\boldsymbol{\eta}$ , dunque in effetti la relazione tra  $\mathbf{p}$  e  $\boldsymbol{\eta}$  è invertibile e dunque

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sup_{\boldsymbol{\eta}} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta} - L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t))$$

dove  $\mathbf{q}$  e  $t$  sono in questo caso dei semplici parametri.

Tornando a indicare con  $\dot{\mathbf{q}}$  le variabili  $\boldsymbol{\eta}$ ,

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sup_{\dot{\mathbf{q}}} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)).$$

Si nota che a  $\mathbf{q}$  e  $t$  fissati,  $\mathbf{p}$  agisce per dualità sui vettori tangenti  $\dot{\mathbf{q}}$ . Nei sistemi vincolati,  $\mathbf{q}$  sono coordinate per una varietà  $V$  (la varietà vincolare),  $\dot{\mathbf{q}}$  sono vettori tangenti, dunque la lagrangiana è una funzione dal fibrato tangente in  $\mathbb{R}$ . Invece, poiché  $\mathbf{p}$  è lineare sui vettori tangenti,  $H$  è definita sul fibrato cotangente in  $\mathbb{R}$ .

A chi fosse incuriosito da questa differenza strutturale e dalle sue conseguenze, suggerisco la lettura dell'Arnold [A].

## 1.2 Lagrangiane e hamiltoniane naturali

Una lagrangiana che si ottiene da un sistema fisico conservativo in un sistema di riferimento inerziale, con forze puramente posizionali e vincoli perfetti bilateri è sempre del tipo

$$L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}),$$

dove  $T(\mathbf{q})$  è una matrice simmetrica e definita positiva, e  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  sono in  $\mathbb{R}^n$ . Chiamerò lagrangiane *naturali* quelle di questa forma.

Il passaggio all'hamiltoniana è semplice. Infatti il vettore degli impulsi coniugati è dato da:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

ed essendo  $T$  definita positiva, in particolare è invertibile. Dunque

$$\dot{\mathbf{q}} = T(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p}.$$

Ma allora l'hamiltoniana è data da:

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + V(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot T(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} - \frac{1}{2} (T(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p}) \cdot T(\mathbf{q}) T(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot T(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + V(x).$$

Quindi per il calcolo dell'hamiltoniana è sufficiente calcolare l'inversa della matrice  $T$ .

Il caso dei vincoli olonomi dipendenti dal tempo è un po' diverso. Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  è la configurazione non vincolata e  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  sono le coordinate vincolari, la lagrangiana si trova a partire da

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x})$$

usando che

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}, t), \quad \dot{\mathbf{x}} = \partial_t \mathbf{x}(\mathbf{q}, t) + \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

(per semplicità ho considerato la matrice cinetica unitaria nelle coordinate  $\mathbf{x}$ , cioè masse unitarie). Sostituendo, si ottiene

$$L = \frac{1}{2} \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x}^t \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x}^t \partial_t \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \partial_t \mathbf{x} \cdot \partial_t \mathbf{x} - V(\mathbf{x})$$

Dunque la lagrangiana è della forma

$$L = \frac{1}{2} T(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}, t) \quad (1.5)$$

È da notare che in alcuni casi, anche se il vincolo dipende dal tempo, la lagrangiana nelle coordinate vincolari può non dipendere dal tempo; è questo il caso di vincoli in rotazione uniforme intorno a un asse, in cui compaiono termini dovuti alle “forze apparenti”.

Anche la lagrangiana per il moto di una particella di massa  $m$  e carica  $e$ , in un campo elettromagnetico di potenziale  $V(\mathbf{x}, t)$  e di potenziale vettore  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  ha questa forma, infatti è

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} - eV(\mathbf{x}, t) \quad (1.6)$$

dove  $c$  è la velocità della luce. Infatti, il moto è governato dall'equazione

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}$$

dove  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  è il campo elettromagnetico  $\wedge$  è il prodotto vettoriale, e  $c$  è la velocità della luce.

### ***Esercizio 1. Particella carica***

Verificare che, nel caso di campi indipendenti dal tempo, se  $\nabla V = -\mathbf{E}$  e  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , le equazioni di Eulero-Lagrange per (1.6) coincidono con l'equazione di Newton. Si estenda al caso di campi dipendenti dal tempo, caso in cui  $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}$ .

### ***Esercizio 2. Hamiltoniana per la particella carica***

Per esercizio, si provi che se la lagrangiana è data da (1.5) allora

$$\mathbf{p} = T\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}$$

e

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{b}) \cdot T^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{b}) + U$$

In particolare, si scriva l'hamiltoniana per il moto della particella carica.

## **1.3 Variabili cicliche e riduzione dei gradi di libertà**

Mostrerò con un esempio il diverso comportamento dei sistemi lagrangiani e di quelli hamiltoniani in presenza di variabili cicliche. Consideriamo la lagrangiana del moto centrale piano

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V(|\mathbf{x}|)$$

con  $V(r) = \frac{1}{r}$ , le equazioni del moto sono le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = -\nabla V$$

Per ottenere le equazioni in coordinate polari è sufficiente considerare il cambiamento di coordinate

$$x_1 = \rho \cos \vartheta \quad x_2 = \rho \sin \vartheta$$

che genera il corrispondente cambiamento di variabili nelle velocità:

$$\dot{x}_1 = \dot{\rho} \cos \vartheta - \rho \dot{\vartheta} \sin \vartheta \quad \dot{x}_2 = \dot{\rho} \sin \vartheta + \rho \dot{\vartheta} \cos \vartheta$$

Infine si calcola la lagrangiana nelle nuove variabili. Si ottiene

$$L(\rho, \vartheta, \dot{\rho}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\vartheta}^2 - V(\rho)$$

Le equazioni del moto in coordinate polari sono esattamente le equazioni di Eulero Lagrange che si ottengono da questa Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \ddot{\rho} = \frac{\partial L}{\partial \rho} = \rho \dot{\vartheta}^2 - V'(\rho)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\vartheta}) = 0$$

La seconda equazione indica che il  $\rho^2 \dot{\vartheta}$ , il **momento coniugato** alla variabile  $\vartheta$ , si conserva lungo il moto (infatti  $\vartheta$  è una variabile ciclica, cioè  $L$  non dipende esplicitamente da  $\vartheta$ ). Si può trarre vantaggio dalla conservazione di questa quantità, riducendo il sistema a un solo grado di libertà, sostituendo il momento con una costante nell'espressione dell'energia meccanica (si riveda, sui testi di Meccanica, come si porta alle quadrature il moto centrale). Noto che per ottenere questa riduzione si esce dal formalismo lagrangiano (non si può infatti sostituire il momento dentro la lagrangiana, verrebbero equazioni errate).

La corrispondente hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2} p_\rho^2 + \frac{1}{2 \rho^2} p_\vartheta^2 + V(\rho)$$

dove  $p_\rho = \partial_{\dot{\rho}} L = \dot{\rho}$  è il momento coniugato alla variabile  $\rho$  e  $p_\vartheta = \partial_{\dot{\vartheta}} L = \rho^2 \dot{\vartheta}$  è il momento coniugato alla variabile  $\vartheta$ .

Le equazioni di Hamilton corrispondenti sono

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = p_\rho \\ \dot{p}_\rho &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} = p_\vartheta^2 / \rho^3 - V'(\rho) \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = p_\vartheta / \rho^2 \\ \dot{p}_\vartheta &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0 \end{aligned}$$

Questo sistema di 4 equazioni è un sistema a due gradi di libertà, con un variabile ciclica, infatti  $H$  non dipende da  $\vartheta$ . Il corrisponde impulso  $p_\vartheta$  si conserva, come afferma l'ultima equazione. Ma allora, le prime due equazioni, in  $\rho$  e  $p_\rho$ , sono un sistema hamiltoniano a un solo grado di libertà, in cui l'impulso  $p_\vartheta$  è un parametro. Il fatto che la variabile  $\vartheta$  sia ciclica, ha dunque una conseguenza importante: le altre equazioni sono automaticamente

le equazioni del moto di un sistema con un grado di libertà in meno. Questo è un fatto generale: nel formalismo hamiltoniano, a ogni variabile ciclica corrisponde la riduzione del sistema di un grado di libertà, e non sono necessari passaggi ulteriori rispetto alla scrittura delle equazioni del moto.

Ricordo che questo non accade nel formalismo Lagrangiano: la ciclicità di una variabile garantisce la conservazione del momento coniugato, ma la riduzione di un grado di libertà non è contenuta nel formalismo.

Considero, come ulteriore esempio, la lagrangiana della trottola pesante

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{J}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo tra l'asse della trottola e l'asse verticale,  $\phi$  è un angolo che esprime la rotazione intorno all'asse verticale,  $\psi$  è un angolo che esprime la rotazione intorno all'asse della trottola;  $J$  è il momento di inerzia rispetto all'asse della trottola,  $I$  è quello rispetto a un qualunque asse ortogonale che passa per il punto di appoggio,  $l$  è la distanza del baricentro dal punto di appoggio.

L'energia cinetica è

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I \sin^2 \vartheta + J \cos^2 \vartheta & J \cos \theta \\ 0 & J \cos \theta & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

L'inversa della matrice cinetica è

$$\frac{1}{IJ \sin^2 \vartheta} \begin{pmatrix} J \sin^2 \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & J & -J \cos \theta \\ 0 & -J \cos \theta & I \sin^2 \vartheta + J + J \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

dunque l'hamiltoniana è

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2I} p_{\vartheta}^2 + \frac{1}{2IJ \sin^2 \vartheta} (J p_{\phi}^2 - 2J \cos \vartheta p_{\phi} p_{\psi} + (I \sin^2 \vartheta + J \cos^2 \vartheta) p_{\psi}^2) + mgl \cos \vartheta \\ &= \frac{1}{2I} p_{\vartheta}^2 + \frac{1}{2I \sin^2 \vartheta} (p_{\phi} - p_{\psi} \cos \vartheta)^2 + \frac{1}{2J} p_{\psi}^2 + mgl \cos \vartheta \end{aligned}$$

Anche in questo caso, si può considerare questa come l'hamiltoniana di un sistema a un grado di libertà, in cui  $p_{\phi}$  e  $p_{\psi}$  sono integrali primi fissati dai dati iniziali.

## 2 Trasformazioni simplettiche e parentesi di Poisson

### 2.1 Trasformazioni di coordinate

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono equazioni del secondo ordine in  $n$  variabili, e sono **invarianti in forma**: se  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è la lagrangiana e  $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)$  sono delle nuove variabili, allora il moto nelle variabili  $\tilde{\mathbf{q}}$  è governato dalle equazioni di Eulero-Lagrange per la lagrangiana  $\tilde{L}$ , che è esattamente la lagrangiana  $L$  scritta nelle nuove variabili, tenendo conto che

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \partial_t \tilde{\mathbf{q}}$$

Ricordo che questa proprietà di invarianza è una conseguenza immediata del fatto che le equazioni di Eulero-Lagrange sono le equazioni che esprimono la stazionarietà dell'azione; più avanti studieremo nello stesso modo l'invarianza in forma delle equazioni di Hamilton.

L'invarianza in forma è il motivo del "successo" del formalismo lagrangiano: permette infatti di ottenere facilmente le equazioni del moto, scegliendo il sistema di coordinate più opportuno. È utile fare questa analisi anche nel caso hamiltoniano, dunque studieremo le trasformazioni che garantiscono l'invarianza in forma delle equazioni di Hamilton.

### Definizione di trasformazione canonica

Una trasformazione

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{q}} &= \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ \tilde{\mathbf{p}} &= \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\end{aligned}$$

è detta **canonica** se per ogni funzione  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  esiste una funzione  $K(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$  tale che  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  verifica le equazioni di Hamilton di hamiltoniana  $H$  se e solo se  $(\tilde{\mathbf{q}}(t), \tilde{\mathbf{p}}(t))$  verifica le equazioni di Hamilton di hamiltoniana  $K$ .

Ogni trasformazione di coordinate conserva la natura lagrangiana di un moto, ma non tutte le trasformazioni di coordinate e impulsi conservano la natura hamiltoniana del moto. Vedremo però che la classe di trasformazioni che conservano la natura hamiltoniana del moto è più ampia delle sole trasformazioni di coordinate, e questo fatto è il primo vero vantaggio del formalismo hamiltoniano su quello lagrangiano. L'esempio più semplice che si può fare è questo: data  $H = H(q, p)$ , si consideri la trasformazione che scambia, a meno di un segno, momento e coordinata:

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= -q \\ \tilde{q} &= p\end{aligned}$$

è facile verificare che se  $K(\tilde{q}, \tilde{p}) = H(-\tilde{p}, \tilde{q})$ , e quindi  $H(q, p) = K(p, -q)$ , allora

$$\begin{aligned}\dot{q} = \partial_p H(q, p) & \quad \text{se e solo se} & \quad \dot{\tilde{q}} = \dot{p} = -\partial_q H(q, p) = \partial_{\tilde{p}} K(\tilde{q}, \tilde{p}) \\ \dot{p} = -\partial_q H(q, p) & & \quad \dot{\tilde{p}} = -\dot{q} = -\partial_p H(q, p) = -\partial_{\tilde{q}} K(\tilde{q}, \tilde{p})\end{aligned}$$

Dunque abbiamo operato una trasformazione che scambia il ruolo di coordinate e impulsi, cosa evidentemente impossibile da farsi nel formalismo lagrangiano, dove le trasformazioni delle velocità  $\dot{\mathbf{q}}$  sono determinate dalle trasformazioni delle coordinate.

## 2.2 Trasformazioni simplettiche

Per iniziare a esplorare il mondo delle trasformazioni canoniche, è utile riscrivere in un altro modo le equazioni di Hamilton. Indicherò con  $\mathbf{z}$  il complesso delle variabili in  $\mathbb{R}^{2n}$ :

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \partial_{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{q}} \\ \partial_{\mathbf{p}} \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{p}} H \\ -\partial_{\mathbf{q}} H \end{pmatrix} = J \partial_{\mathbf{z}} H$$

dove  $J$  è la **matrice simplettica fondamentale**

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

e  $\mathbf{I}_n$  è la matrice identità in  $\mathbb{R}^n$ . Consideriamo ora una trasformazione di coordinate indipendente dal tempo

$$\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{z}),$$

e sia  $\tilde{H} = H(\mathbf{z}(\tilde{\mathbf{z}}))$ , così che  $\partial_{\mathbf{z}}H = \left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{z}}}{\partial\mathbf{z}}\right)^t \partial_{\tilde{\mathbf{z}}}\tilde{H}$ . Il sistema nelle nuove variabili è

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{z}}}{\partial\mathbf{z}}\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{z}}}{\partial\mathbf{z}}J\partial_{\mathbf{z}}H = \frac{\partial\tilde{\mathbf{z}}}{\partial\mathbf{z}}J\left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{z}}}{\partial\mathbf{z}}\right)^t\partial_{\tilde{\mathbf{z}}}\tilde{H}$$

che coincide con

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = J\partial_{\tilde{\mathbf{z}}}\tilde{H}$$

se e solo se

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{z}}}{\partial\mathbf{z}}J\left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{z}}}{\partial\mathbf{z}}\right)^t = J$$

Se questa condizione è verificata per ogni  $\mathbf{z}$ , la trasformazione è canonica.

È utile dunque dare una definizione: una matrice  $A$  si dice **simplettica** se e solo se

$$AJA^t = J. \quad (2.1)$$

**Proposizione 2.1.** *Matrici simplettiche*

- $J^2 = -\mathbf{I}_{2n}$ , quindi  $J^{-1} = -J$ .
- Calcolando il determinante, si ottiene  $\det J^2 = 1$ , dunque  $|\det J| = 1$  (in realtà è 1, come si può calcolare direttamente).
- Se  $A$  è simplettica, allora, passando ai determinanti, si ha che  $\det A^2 = 1$ , dunque  $A$  è invertibile
- $A$  è simplettica se e solo se  $A^t$  è simplettica. Infatti, moltiplicando a destra per  $JA$  la (2.1) si ha

$$AJA^tJA = J^2A = -A$$

moltiplicando a sinistra per  $A^{-1}$  si ha

$$JA^tJA = -I$$

moltiplicando a sinistra per  $-J$  si ottiene

$$A^tJA = J$$

che dimostra la tesi.

- $A$  è simplettica se e solo se  $A^{-1}$  è simplettica. Infatti, passando agli inversi nell'ultima equazione del punto precedente, si ha

$$A^{-1}(-J)A^{-1t} = -J$$

che dà la tesi.

- Se  $A$  e  $B$  sono simplettiche, allora  $AB$  è simplettica (esercizio). Dunque le matrici simplettiche formano un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni non singolari.

Diremo che una trasformazione è *simplettica* se il suo jacobiano è una matrice simplettica in ogni punto.

Riassumo quanto abbiamo provato in questo paragrafo in un teorema.

**Teorema 2.1. Trasformazioni simplettiche indipendenti dal tempo.**

*Una trasformazione simplettica indipendente dal tempo è canonica, e la nuova hamiltoniana è la vecchia hamiltoniana espressa in funzione delle nuove variabili.*

Non è agevole verificare la canonicità di una trasformazione attraverso la simpletticità dello jacobiano, ma esistono altre condizioni equivalenti. Prima di introdurle però è necessario definire le **parentesi di Poisson**.

### 2.3 Parentesi di Poisson

Le parentesi di Poisson sono uno dei degli strumenti chiave del formalismo hamiltoniano. La forma bilineare antisimmetrica in  $\mathbb{R}^{2n}$

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v} \cdot J\mathbf{w}$$

è detta **prodotto simplettico**.

È facile verificare che una matrice  $A$  è simplettica se e solo se, per ogni  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  vale

$$[A\mathbf{v}, A\mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

Infatti questa condizione equivale a

$$\mathbf{v} \cdot A^t J A \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot J \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

e questo può accadere se e solo se  $A^t J A = J$ .

Il prodotto simplettico è legato alle “parentesi di Poisson”, che sono una operazione sugli “osservabili”, cioè sulle funzioni definite nello spazio delle fasi  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

Le **parentesi di Poisson** sono un’operazione che associa a due funzioni  $f, g$ , la funzione

$$\{f, g\} = [\partial_{\mathbf{z}} f, \partial_{\mathbf{z}} g] = \partial_{\mathbf{z}} f \cdot J \partial_{\mathbf{z}} g = \partial_{\mathbf{q}} f \cdot \partial_{\mathbf{p}} g - \partial_{\mathbf{p}} f \cdot \partial_{\mathbf{q}} g$$

Consideriamo ora un cambiamento di variabili, e, con un abuso di notazioni, indichiamo con  $f$  sia  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , sia  $f(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}), \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}))$ , cioè  $f$  come funzione delle nuove variabili tramite le vecchie. Se si trasformano le variabili, cioè si pensano  $f$  e  $g$  funzioni delle nuove variabili tramite le vecchie

$$\partial_{\mathbf{z}} f = \partial_{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{z}}^t \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} f$$

Dunque

$$\{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = [\partial_{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{z}}^t \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} f, \partial_{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{z}}^t \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} g] = \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} f \cdot \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} \tilde{\mathbf{z}}^t J \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} \tilde{\mathbf{z}}^t \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} g$$

quindi

$$\forall f, g, \quad \{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \{f, g\}_{\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}}$$

se e solo se la trasformazione è simplettica.

Le parentesi di Poisson delle coppie di variabili danno le **regole di commutazione canoniche**:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \tag{2.2}$$

Se considero una trasformazione è canonica, queste relazioni devono valere anche per le nuove variabili rispetto alle nuove variabili, ma, per l'invarianza appena dimostrata, devono valere anche per le nuove variabili rispetto alle vecchie variabili:

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = 0, \quad \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0, \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij} \quad (2.3)$$

Queste condizioni sono del tutto equivalenti alla simpletticità della trasformazione. Dimostriamolo. La condizione di simpletticità è:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} J \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} \right)^t = \frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} J \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^t & \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}}^t \\ \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{q}}^t & \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}}^t \end{pmatrix} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{q}}^t & \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}}^t \\ -\partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^t & -\partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}}^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{q}}^t - \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^t & \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}}^t - \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}}^t \\ \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{q}}^t - \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^t & \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}}^t - \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}}^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(si ricordi che si tratta di prodotti a blocchi di matrici). Si noti ora che se  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  sono due campi vettoriali a valori in  $\mathbb{R}^n$ , allora

$$(\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{f} (\partial_{\mathbf{p}} \mathbf{g})^t)_{ij} = \partial_{\mathbf{q}} f_i \cdot \partial_{\mathbf{p}} g_j.$$

Con questa osservazione è semplice verificare che l'identità tra  $J$  e l'ultima matrice è equivalente alle condizioni (2.3).

Consideriamo un esempio. Sia

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(q^2 + p^2) \\ Q &= \arctan \frac{q}{p} \end{aligned}$$

In questo caso è molto semplice verificare la canonicità della trasformazione mediante le parentesi di Poisson. Infatti, per definizione,  $\{Q, Q\} = 0 = \{P, P\}$ , dunque resta solo da verificare che

$$\{Q, P\} = 1$$

Il semplice calcolo delle derivate mostra che effettivamente questa condizione è verificata (completare per esercizio).

Consideriamo ora l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico  $H = (p^2 + q^2)/2$ . L'hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$K = P$$

per cui le equazioni del moto diventano

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \partial_P K = \partial_P P = 1 \\ \dot{P} &= -\partial_Q K = -\partial_Q P = 0 \end{aligned}$$

che sono di facile soluzione:  $P$  è costante e pari all'energia del moto, mentre  $Q(t) = Q_0 + t$ . Ne segue che il moto è risolto dalle uguaglianze

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(p^2(t) + q^2(t)) &= E \\ \arctan \frac{q(t)}{p(t)} &= Q_0 + t \end{aligned}$$

Dove  $E$  e  $Q_0$  si determinano a partire dal dato iniziale.

In questo esempio si **porta alle quadrature** (cioè si risolve il moto in termini di integrali di funzioni elementari) il moto di un oscillatore armonico (naturalmente questo moto si risolve anche utilizzando la teoria delle equazioni differenziali lineari). Esiste un metodo generale per provare a portare alle quadrature un sistema hamiltoniano mediante una trasformazione canonica che renda semplice il sistema nelle nuove variabili. Per poterlo illustrare serve però introdurre un metodo che permette di ottenere abbastanza facilmente delle trasformazioni canoniche, come mostreremo tra qualche pagina.

Come operazione tra funzioni, le parentesi di Poisson verificano le seguenti proprietà.

**Teorema 2.2. Proprietà delle parentesi di Poisson.**

1. Sono bilineari (verificare per esercizio).

2. Sono antisimmetriche:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

e quindi  $\{f, f\} = 0$  (verificare per esercizio).

3. Vale la formula di Leibnitz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$$

(verificare per esercizio).

4. Vale l'identità di Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

Uno spazio vettoriale (reale o complesso), dotato di un prodotto interno che verifica le proprietà **1,2,4** è detto **algebra di Lie**, dunque lo spazio delle funzioni regolari in  $\mathbb{R}^{2n}$  con le parentesi di Poisson è un'algebra di Lie. Da questa definizione perché incontreremo altri casi di algebre di Lie. In particolare, lo spazio vettoriale di operatori lineari su uno spazio Hilbert  $H$  (per esempio  $\mathbb{R}^m$  o  $L^2$ ) diventano algebre di Lie considerando come operazione interna il **commutatore** tra operatori: se  $\mathbf{v}$  è un elemento dello spazio  $H$ , e  $A$  e  $B$  sono due operatori lineari,

$$[A, B]\mathbf{v} = AB\mathbf{v} - BA\mathbf{v}$$

(non confondete questa notazione con quella di prodotto simplettico, che comunque non userò più). La bilinearità e l'antisimmetria del commutatore sono di verifica immediata, l'identità di Jacobi si può mostrare facilmente sviluppando tutti i termini, ma si può abbreviare con un minimo di riflessione: tutti i termini dell'espressione

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$$

sono formati da una permutazione del prodotto tra le tre matrici  $A, B, C$ . Isoliamo i termini che iniziano per  $A$ . Indicando con  $\dots$  i termini che non iniziano per  $H$ , si ha

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] &= A[B, C] = ABC - ACB \\ [B, [C, A]] &= -[C, A]B + \dots = ACB + \dots \\ [C, [A, B]] &= -[A, B]C + \dots = -ABC + \dots \end{aligned}$$

Dunque la somma di tutti i termini che iniziano per  $A$  è nulla. Si può ripetere lo stesso ragionamento per i termini che iniziano per  $B$  e  $C$  (l'espressione dell'identità di Jacobi è invariante per le permutazioni degli argomenti), dunque la somma dei tre termini è effettivamente nulla.

Ho premesso la prova dell'identità di Jacobi per il commutatore perché fa da traccia per la prova dell'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson. Serve però qualche utile passaggio intermedio. Dato il campo vettoriale  $\mathbf{v}$ , indico la derivata di una funzione  $f$  lungo  $\mathbf{v}$  con il simbolo

$$L_{\mathbf{v}}f = \mathbf{v} \cdot \nabla f$$

Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  due campi vettoriali, Considero il commutatore tra gli operatori  $L_{\mathbf{v}}$  e  $L_{\mathbf{w}}$ , su una funzione  $f$ :

$$[L_{\mathbf{v}}, L_{\mathbf{w}}]f = \mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{w} \cdot \nabla f) - \mathbf{w} \cdot \nabla(\mathbf{v} \cdot \nabla f)$$

L'espressione a destra sembra contenere derivate prime e seconde di  $f$ , ma a una più attenta analisi si scopre che le derivate seconde non ci sono, e dunque il commutatore dei due operatori di derivazione è anch'esso un operatore del primo ordine. Infatti, i termini nelle derivate seconde sono:

$$\sum_{i,j} v_i w_j \partial_{ij}^2 f - \sum_{i,j} w_i v_j \partial_{ji}^2 f$$

che dunque si cancellano. Il campo vettoriale  $\mathbf{u}$  tale che

$$[L_{\mathbf{v}}, L_{\mathbf{w}}] = L_{\mathbf{u}}$$

è il **commutatore**  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$  dei due campi  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ . Usando la definizione si ottiene

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

L'identità di Jacobi per operatori  $L_{\mathbf{u}}, L_{\mathbf{v}}, L_{\mathbf{w}}$ , si riscrive facilmente come

$$L_{[\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]]} + L_{[\mathbf{v},[\mathbf{w},\mathbf{u}]]} + L_{[\mathbf{w},[\mathbf{u},\mathbf{v}]]} = 0$$

Poiché  $L : \mathbf{u} \rightarrow L_{\mathbf{u}}$  è lineare in  $\mathbf{u}$ , l'identità precedente si scrive come

$$L_{[\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]]+[\mathbf{v},[\mathbf{w},\mathbf{u}]]+[\mathbf{w},[\mathbf{u},\mathbf{v}]]} = 0$$

che è possibile se e solo se anche il commutatore dei campi vettoriali verifica l'identità di Jacobi.

Torniamo alle parentesi di Poisson. Usando la definizione, si vede che

$$\{f, g\} = \partial_{\mathbf{z}}f \cdot J \partial_{\mathbf{z}}g = L_{J \partial_{\mathbf{z}}g} f = -L_{J \partial_{\mathbf{z}}f} g$$

Riscrivo i tre termini nel membro di destra dell'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson come operatori che agiscono su  $h$ . Il primo si riscrive come

$$-L_{J \partial_{\mathbf{z}}f}(-L_{J \partial_{\mathbf{z}}g}h) = L_{J \partial_{\mathbf{z}}f} L_{J \partial_{\mathbf{z}}g} h$$

Il secondo è

$$-L_{J \partial_{\mathbf{z}}g} L_{J \partial_{\mathbf{z}}f} h$$

Il terzo è

$$L_{J \partial_{\mathbf{z}}\{f,g\}} h$$

La somma dei tre termini è dunque

$$([L_{J\partial_{\mathbf{z}}f}, L_{J\partial_{\mathbf{z}}g}] + L_{J\partial_{\mathbf{z}}\{f,g\}})h$$

Ogni termine dello sviluppo dell'identità di Jacobi è lineare nelle derivate seconde di una delle tre funzioni, ma la somma scritta sopra non ha termini nelle derivate seconde di  $h$ . Poiché possiamo ripetere il ragionamento per ognuna delle tre funzioni, otteniamo che tutti i termini sono nulli, e dunque vale l'identità di Jacobi.

Come corollario, segue che l'identità di Jacobi è equivalente a

$$[L_{J\partial_{\mathbf{z}}f}, L_{J\partial_{\mathbf{z}}g}] = -L_{J\partial_{\mathbf{z}}\{f,g\}}$$

cioè, in termini di prodotti di Lie,

$$[J\partial_{\mathbf{z}}f, J\partial_{\mathbf{z}}g] - J\partial_{\mathbf{z}}\{f, g\}.$$

D'ora in poi chiamerò **campo vettoriale hamiltoniano** associato alla funzione  $f$ , il campo  $J\partial_{\mathbf{z}}f$ . L'identità precedente afferma che il campo vettoriale hamiltoniano associato alle parentesi di Poisson delle due funzioni  $f$  e  $g$  è meno il commutatore dei due campi hamiltoniani associati a  $f$  e  $g$ .

La commutatività dei campi vettoriali è equivalente alla commutatività dei flussi generati. Lavorerò in coordinate rettangolari, ma usando carte locali questa trattazione si estende al caso di flussi e campi su varietà.

Siano dati due campi vettoriali regolari  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ . Definisco i due flussi associati:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\Phi^t(\mathbf{x})) \\ \Phi^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\Psi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\Psi^t(\mathbf{x})) \\ \Psi^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \end{cases}$$

**Teorema 2.3. Flussi commutanti.**

$\Phi^t$  e  $\Psi^s$  commutano, cioè

$$\Phi^t(\Psi^s(\mathbf{x})) = \Psi^s(\Phi^t(\mathbf{x}))$$

per ogni  $s, t, \mathbf{x}$ , se e solo se i corrispondenti campi commutano.

Dimostro questo risultato in  $\mathbb{R}^m$ , ma la tesi rimane valida anche per flussi su varietà. Osservo preliminarmente che, sviluppando in  $t = 0$ :

$$\Phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \frac{t^2}{2}\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} + O(t^3)$$

Analogamente,

$$\Psi^s(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + s\mathbf{w}(\mathbf{x}) + \frac{s^2}{2}\mathbf{w} \cdot \nabla\mathbf{w} + O(s^3)$$

**Lemma 2.1.** Vale (completare i dettagli per esercizio):

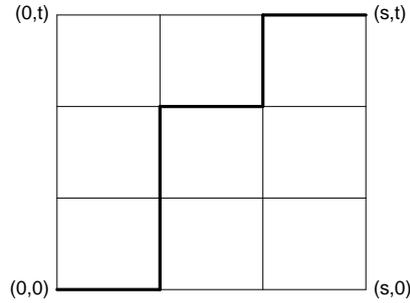
$$\Phi^t(\Psi^s(\mathbf{x})) - \Psi^s(\Phi^t(\mathbf{x})) = st[\mathbf{w}, \mathbf{v}] + O_3 \tag{2.4}$$

dove con  $O_3$  intendo termini di ordine superiore al secondo.

Ci sono due punti importanti in questo enunciato. Il primo è che il primo termine significativo della differenza è dato dal commutatore dei campi, il secondo è che i termini del secondo ordine in  $t^2$  e  $s^2$  non ci sono.

Da questo lemma segue facilmente che se  $\Phi^t$  e  $\Psi^s$  commutano, allora  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$  è nullo, infatti lo sviluppo in serie di potenze di  $s$  e  $t$  del membro di destra della (2.4) deve essere identicamente nullo, e quindi deve essere nullo il coefficiente del termine in  $st$ .

Vale anche il viceversa, come ora dimostreremo. La dimostrazione è concettualmente semplice, ma richiede un po' di notazioni e di grafici. Fissiamo  $s, t > 0$ ,  $m$  intero,  $\delta s = s/m$ ,  $\delta t = t/m$ .



Considera il rettangolo  $[0, s] \times [0, t]$  nel piano  $(s, t)$ , diviso in  $m^2$  rettangolini di lati  $\delta s$ ,  $\delta t$  (in figura  $m = 3$ ). Consideriamo un cammino  $\gamma$  da  $(0, 0)$  a  $(s, t)$  fatto di segmenti dei rettangolini, ma con  $s$  e  $t$  non decrescenti (il cammino può solo andare a destra o in alto). Fissato  $\gamma$ , indichiamo con  $T_\gamma(\mathbf{x})$  il punto di  $\mathbb{R}^n$  che otteniamo da  $\mathbf{x}$  evolvendo con la composizione di  $\Phi^{\delta t}$  e  $\Psi^{\delta s}$  nell'ordine con cui compaiono in  $\gamma$  i tratti orizzontali e i tratti verticali, rispettivamente. Per esempio, al cammino  $\gamma$  in figura corrisponde il punto

$$T_\gamma(\mathbf{x}) = \Psi^{\delta s} \circ \Phi^{\delta t} \circ \Psi^{\delta s} \circ \Phi^{\delta t} \circ \Phi^{\delta t} \circ \Psi^{\delta s}(\mathbf{x})$$

(nota che la sequenza dei tratti di  $\gamma$  si ritrova al contrario nell'espressione di  $T_\gamma$ ). Dunque i cammini  $\gamma$  sono in biiezione con le sequenze composte di  $m$  flussi  $\Phi^{\delta t}$  e  $m$  flussi  $\Psi^{\delta s}$ .

È facile convincersi che esiste una sequenza di cammini  $\{\gamma_k\}_{k=0 \dots m^2}$  tale che

- $T_{\gamma_{m^2}} = (\Phi^{\delta t})^m \circ (\Psi^{\delta s})^m = \Phi^t \circ \Psi^s$ ;
- $T_{\gamma_0} = (\Psi^{\delta s})^m \circ (\Phi^{\delta t})^m = \Psi^s \circ \Phi^t$ ;
- $\gamma_{k+1}$  differisce da  $\gamma_k$  per un solo rettangolino, cioè per lo sostituzione di un movimento “a destra, poi in alto” con un movimento “in alto, poi a destra”, e quindi la corrispondente sequenza di flussi differisce per uno scambio di  $\Psi^{\delta s} \Phi^{\delta t}$  con  $\Phi^{\delta t} \Psi^{\delta s}$ ;

•

$$\Phi^t(\Psi^s(\mathbf{x})) - \Psi^s(\Phi^t(\mathbf{x})) = \sum_{k=0}^{m^2-1} (T_{\gamma_{k+1}}(\mathbf{x}) - T_{\gamma_k}(\mathbf{x}))$$



In particolare si ottengono le equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i &= \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}\end{aligned}$$

Inoltre è facile scrivere la definizione di integrale primo del moto in termini di parentesi di Poisson. La funzione  $f$  è costante lungo il moto se e solo se  $\frac{df}{dt} = 0$ , cioè se

$$\partial_t f + \{f, H\} = 0$$

Usando l'identità di Jacobi, si dimostri per esercizio il seguente teorema

**Teorema 2.4. Parentesi di Poisson di due integrali primi.**

*Se  $f$  e  $g$  sono due integrali primi del moto, allora anche  $\{f, g\}$  lo è (si deve usare l'identità di Jacobi).*

Per esempio, sia  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ , e sia  $\frac{m}{2}\dot{\mathbf{q}}^2$  l'energia cinetica. Allora  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}}$  e il momento della quantità di moto è  $\ell = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$ . Mostrare che

$$\{\ell_1, \ell_2\} = \ell_3$$

Quindi se si conservano le prime due componenti del momento della quantità di moto si conserva anche la terza (in generale  $\{\ell_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk}\ell_k$  dove  $\varepsilon_{ijk}$  è il tensore completamente antisimmetrico).

Definizione: due funzioni  $H$  e  $K$  sono in **involuzione** se  $\{H, K\} = 0$ .

Ricordando che il commutatore dei campi hamiltoniani associati a due funzioni  $H$  e  $K$  è meno il campo hamiltoniano generato da  $\{H, K\}$ , si ottiene che due flussi hamiltoniani di hamiltoniane  $H$  e  $K$  commutano se e solo se

$$J \partial_{\mathbf{z}}\{H, K\} = 0$$

cioè se e sole se  $\{H, K\} = \text{costante}$ , e questo accade in particolare se  $H$  e  $K$  sono in involuzione. Osservo anche che essere in involuzione garantisce che  $K$  è un integrale primo del moto di hamiltoniana  $H$ , e viceversa (cosa che non accade se  $\{H, K\}$  è una costante non nulla).

Riassumendo: se  $\{H, K\} = 0$ , i flussi hamiltoniani di hamiltoniane  $H$  e  $K$  commutano, e  $H$  e  $K$  sono integrali primi per entrambi i flussi.

### 3 Il teorema di Noether per sistemi hamiltoniani

TO DO

Per un sistema lagrangiano, l'esistenza di un gruppo a un parametro di simmetrie nelle variabili è equivalente all'esistenza di una combinazione lineare dei momenti che si conserva. Per i sistemi hamiltoniani si possono considerare gruppi di simmetrie che coinvolgono le  $2n$  variabili, ma è falso che a ogni gruppo di simmetria nelle  $2n$  variabili corrisponde un integrale primo. La maggiore generalità delle simmetrie considerabili va limitata dalla condizione di simpletticità.

**Teorema 3.1. Generatori dei flussi**

Sia  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , e sia  $\Psi_t(\mathbf{x})$  un gruppo a un parametro di diffeomorfismi, cioè

$$\Psi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad e \quad \forall s, t \quad \Psi_t \circ \Psi_s = \Psi_{t+s}$$

Allora esiste un campo vettoriale  $\mathbf{u}$  tale che  $\Psi_t$  è il flusso generato da  $\mathbf{u}$ , cioè

$$\frac{d}{dt} \Psi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\Psi_t(\mathbf{x}))$$

Se esiste  $\mathbf{u}$ , in particolare  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  deve coincidere con la derivata in  $t$  al tempo  $t = 0$  di  $\Psi_t(\mathbf{x})$ . Definisco dunque

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \Psi_t(\mathbf{x}).$$

Verifico che genera  $\Psi_t$ .

$$\frac{d}{dt} \Psi_t(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} (\Psi_{t+\varepsilon}(\mathbf{x}) - \Psi_t(\mathbf{x})) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \Psi_\varepsilon(\Psi_t(\mathbf{x}) - \Psi_t(\mathbf{x})) = \mathbf{u}(\Psi_t(\mathbf{x}))$$

Nella penultima uguaglianza ho usato la proprietà di gruppo, nell'ultima ho usato la definizione di  $\mathbf{u}$ .

**Teorema 3.2. Flussi simplettici** Sia  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$  e sia  $\Psi_t$  un gruppo a un parametro, generato dal campo vettoriale  $\mathbf{u}$ . Allora  $\partial_z \Psi_t$  è simplettica se e solo se esiste  $K = K(\mathbf{z})$  tale che

$$\mathbf{u} = J \partial_z K$$

Chiederò flussi simplettici i flussi che hanno jacobiano simplettico. Il teorema asserisce che i flussi simplettici sono tutti e soli i flussi hamiltoniani.

Dimostro il teorema. Derivando in  $\mathbf{z}$  la relazione

$$\frac{d}{dt} \Psi_t(\mathbf{z}) = \mathbf{u}(\Psi_t(\mathbf{z}))$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt} \partial_z \Psi_t(\mathbf{z}) = \partial_z \mathbf{u}(\Psi_t(\mathbf{z})) \partial_z \Psi_t(\mathbf{z})$$

Suppongo ora che  $\partial_z \Psi_t$  sia simplettica per ogni  $t$ , cioè

$$(\partial_z \Psi_t)^t J \partial_z \Psi_t = J$$

Derivo in  $t$ . Il secondo membro è nullo, mentre

$$\frac{d}{dt} (\partial_z \Psi_t)^t J \partial_z \Psi_t = (\partial_z \Psi_t)^t (\partial_z \mathbf{u})^t J \partial_z \mathbf{u} \partial_z \Psi_t$$

dove  $\partial_z \mathbf{u}$  è calcolato in  $\Psi^t(\mathbf{z})$ . Per  $t = 0$ , ricordando che  $\partial_z \Psi_0 = \mathbf{I}$ , ottenego

$$(\partial_z \mathbf{u})^t J + J \partial_z \mathbf{u}$$

che riscrivo come

$$J \partial_z \mathbf{u} = -(\partial_z \mathbf{u})^t J$$

Ma  $-J = J^t$ , dunque la matrice  $J \partial_{\mathbf{z}} \mathbf{u}$  è simmetrica, cioè la forma differenziale associata è chiusa, dunque localmente esiste  $K$  tale che

$$J \partial_{\mathbf{z}} \mathbf{u} = -\partial_{\mathbf{z}} K$$

e da questa relazione, moltiplicando per  $-J$  ottengo proprio che  $\mathbf{u}$  è il campo di hamiltoniana  $K$ .

Viceversa, sia  $\mathbf{u} = J \partial_{\mathbf{z}} K$ . Allora

$$\partial_{\mathbf{z}} \mathbf{u} = J \partial_{\mathbf{z}\mathbf{z}}^2 K$$

dove  $\partial_{\mathbf{z}\mathbf{z}}^2 K$  è l'hessiano di  $K$ . La derivata nel tempo di  $A_t = (\partial_{\mathbf{z}} \Psi_t)^t J \partial_{\mathbf{z}} \Psi_t$  è dunque

$$(\partial_{\mathbf{z}} \Psi_t)^t ((\partial_{\mathbf{z}} \mathbf{u})^t J + J \partial_{\mathbf{z}} \mathbf{u}) \partial_{\mathbf{z}} \Psi_t$$

Sostituendovi dentro l'espressione di  $\partial_{\mathbf{z}} \mathbf{u}$  in termini dell'hessiano di  $K$  si ottiene la matrice nulla. La tesi segue facilmente notando che al tempo 0  $\partial_{\mathbf{z}} \Psi_t$  è la matrice identità, che è simplettica, dunque  $A_0 = H$ , e che  $\frac{d}{dt} A_t = 0$ , e dunque  $A_t = J$  per ogni  $t$ .

Siamo dunque in grado di enunciare e dimostrare il teorema di Noether per i sistemi hamiltoniani. Per semplicità considero solo il caso indipendente dal tempo.

### **Teorema 3.3. Teorema di Noether**

*L'hamiltoniana  $H$  è invariante per un gruppo a un parametro di diffeomorfismi simplettici, se e solo se esiste una funzione  $K$  tale che il gruppo è il flusso di hamiltoniana  $K$  e  $K$  è un integrale primo per  $H$ .*

La prima parte del teorema è il contenuto del teorema precedente. Devo solo provare che  $H$  è invariante per il flusso di hamiltoniana  $K$  se e solo se  $\{H, K\} = 0$ . Infatti, detto  $\Psi_t$  il flusso

$$0 = \partial_t H(\Psi_t(\mathbf{z})) = \partial_{\mathbf{z}} H \cdot J \partial_{\mathbf{z}} K \text{ sse } \{H, K\} = 0$$

## **4 L'equazione di Hamilton-Jacobi**

Il formalismo hamiltoniano sprigiona tutta la sua potenza attraverso la definizione di un metodo generale per la ricerca di soluzioni. Per introdurlo, devo ulteriormente approfondire la struttura delle trasformazioni canoniche, attraverso lo studio di un principio variazionale per le equazioni di Hamilton.

### **4.1 Un principio variazionale per le equazioni di Hamilton**

#### **Teorema 4.1. Principio variazionale per le equazioni di Hamilton**

*Il moto hamiltoniano di hamiltoniana  $H$  rende stazionaria l'azione*

$$S = \int_0^T (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) dt$$

con  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$  al tempo  $t = 0$  e  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$  al tempo  $t = T$ .

La verifica è semplice. Sia  $\delta\mathbf{q}$ ,  $\delta\mathbf{p}$  una variazione del moto che soddisfa le condizioni iniziali e finali, cioè sia nulla per  $t = 0$  e  $t = T$ . La variazione dell'azione è

$$\delta S = \int_0^T (\delta\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p} \cdot \delta\dot{\mathbf{q}} - \partial_{\mathbf{q}}H \cdot \delta\mathbf{q} - \partial_{\mathbf{p}}H \cdot \delta\mathbf{p}) dt$$

Integrando per parti il termine in  $\delta\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt}\delta\mathbf{q}$  si ottiene

$$\delta S = \int_0^T (\dot{\mathbf{q}} - \partial_{\mathbf{p}}H) \cdot \delta\mathbf{p} dt - \int_0^T (\dot{\mathbf{p}} + \partial_{\mathbf{q}}H) \cdot \delta\mathbf{q} dt$$

Dunque  $\delta S$  è nulla per ogni variazione del moto che soddisfi i dati iniziali se e solo se valgono le equazioni di Hamilton.

Ricordo che nel principio variazionale di Hamilton per l'azione lagrangiana  $\int_0^T L dt$  si fissano solo le posizioni  $\mathbf{q}$  agli estremi, e se la differenza  $|\mathbf{q}(T) - \mathbf{q}(0)|$  è abbastanza piccola si può provare che esiste il minimo dell'azione e dunque si possono trovare variazionalmente le soluzioni delle equazioni del moto, a estremi fissati, e questo fatto è particolarmente utile nella ricerca di soluzioni periodiche. Nel principio variazionale per le equazioni di Hamilton abbiamo fissato sia i momenti che gli impulsi al tempo 0 e al tempo  $T$ . Ma se si fissa  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  al tempo 0, esiste una sola soluzione, dunque non si può fissare anche  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  al tempo  $T$ . D'altra parte, è facile verificare che per ottenere le equazioni di Hamilton abbiamo integrato per parti il solo termine in  $\delta\dot{\mathbf{q}}$ , dunque non è necessario fissare  $\mathbf{p}$  al bordo, ma basta fissare solo  $\mathbf{q}$ .

**QUI MEGLIO, SEMPLIFICA!!!!**

Però la scelta che abbiamo fatto permette di pensare all'azione  $S$  come all'integrale su una qualunque curva  $\gamma$  nello **spazio delle fasi esteso**  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  (cioè lo spazio prodotto dello spazio delle fasi e dell'asse temporale), che unisce  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, 0)$  e  $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, T)$  della forma differenziale

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt$$

Infatti, se  $[0, \bar{\lambda}] \ni \lambda \rightarrow (\mathbf{q}(\lambda), \mathbf{p}(\lambda), t(\lambda))$  è un cammino siffatto

$$\int_{\gamma} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) = \int_0^{\bar{\lambda}} (\mathbf{p}(\lambda) \cdot \partial_{\lambda}\mathbf{q}(\lambda) - H(\mathbf{q}(\lambda), \mathbf{p}(\lambda), t(\lambda)) \partial_{\lambda}t) d\lambda$$

Ma se la relazione tra  $\lambda$  e  $t$  è invertibile, riparametrizzando in  $t$  si ottiene di nuovo

$$S = \int_0^T (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H) dt$$

## 4.2 $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt$

Il principio variazionale dimostrato nel punto precedente permette di verificare in un altro elegante modo la canonicità di una trasformazione. Infatti, se il sistema hamiltoniano di hamiltoniana  $H$  si trasforma nel sistema hamiltoniano di hamiltoniana  $K$ , allora i due seguenti funzionali

$$S = \int_0^T (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) dt, \quad \tilde{S} = \int_0^T (\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)) dt$$

devono avere gli stessi punti stazionari, una volta fissati i valori delle variabili agli estremi temporali. Una condizione sufficiente perché ciò accada è che le due forme differenziali

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt, \quad \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt,$$

dove  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  sono scritte in termini di  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , differiscano per un differenziale esatto  $dG$ . In tal caso, infatti, il valore dell'azione su una traiettoria nelle nuove variabili è

$$\tilde{S} = \int_0^T (\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)) dt = \int_{\tilde{\gamma}} (\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt)$$

dove  $\tilde{\gamma}$  è la corrispondente curva nello spazio delle fasi esteso. Traducendo questo integrale nelle variabili  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  si ottiene

$$\int_{\tilde{\gamma}} (\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt) = \int_{\gamma} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) + \int_{\gamma} dG$$

dove  $\gamma$  è la curva  $\tilde{\gamma}$  nelle variabili  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Il primo integrale è proprio l'azione  $S$  calcolata sul cammino nelle variabili  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , mentre

$$\int_{\gamma} dG = G(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, T) - G(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, 0)$$

Ma allora  $S$  e  $\tilde{S}$  differiscono per una costante che dipende solo dai valori (fissati) agli estremi, dunque una traiettoria rende stazionaria  $S$  se e solo se rende stazionaria  $\tilde{S}$  nelle variabili  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ . In tal modo, abbiamo dimostrato il seguente teorema.

#### **Teorema 4.2. Canonicità attraverso i differenziali - I**

*Se la trasformazione  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  è tale che data  $H$  esiste  $K$  e una funzione  $G$  tali che*

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt + dG$$

*allora la trasformazione manda il sistema hamiltoniano di hamiltoniana  $H$  nelle variabili  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  nel sistema hamiltoniano di hamiltoniana  $K$  nelle variabili  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ .*

Che relazione c'è tra questo teorema e le proprietà delle trasformazioni simplettiche?

#### **Teorema 4.3. Canonicità attraverso i differenziali - II**

*La trasformazione  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  è una trasformazione simplettica a  $t$  fissato se e solo se  $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q}$  è un differenziale esatto a  $t$  fissato.*

Osservo che

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) - \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p}) + \frac{1}{2}d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$$

e posso ottenere una analoga espressione per  $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q}$ . Ne segue che  $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q}$  è un differenziale esatto se e solo se

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p} - (\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{P})$$

è un differenziale esatto. In termini di  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  questa espressione è

$$J\mathbf{z} \cdot d\mathbf{z} - J\mathbf{Z} \cdot d\mathbf{Z}$$

Ma

$$d\mathbf{Z} = \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z} d\mathbf{z}$$

dunque la forma differenziale è

$$(J\mathbf{z} - \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J\mathbf{Z}) \cdot d\mathbf{z}$$

La forma è localmente esatta se e solo se è localmente chiusa, cioè

$$\partial_i(J\mathbf{z} - \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J\mathbf{Z})_j = \partial_j(J\mathbf{z} - \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J\mathbf{Z})_i$$

Ora

$$\begin{aligned} \partial_i(J\mathbf{z})_j &= \sum_k \partial_i(J_{jk}z_k) \sum_k J_{jk}\delta_{ik} = J_{ji} \\ \partial_i(\partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J\mathbf{Z})_j &= \sum_{h,k} \partial_i(\partial_j Z_h J_{hk} Z_k) = \sum_{h,k} \partial_{ij}^2 Z_h J_{hk} Z_k + \sum_{h,k} \partial_j Z_h J_{hk} \partial_i Z_k \\ &= \sum_{h,k} \partial_{ij}^2 Z_h J_{hk} Z_k + (\partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z})_{ji} \end{aligned}$$

Sviluppando nello stesso modo il membro di destra, si ottiene la condizione di chiusura

$$J_{ji} - (\partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z})_{ji} = J_{ij} - (\partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z})_{ij}$$

(i termini con le derivate seconde sono uguali e si cancellano). Ma sia la matrice  $J$  che la matrice  $\partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}$  sono antisimmetriche, e per una matrice antisimmetrica  $A_{ij} = -A_{ji}$  se e solo se  $A_{ij} = 0$ . Dunque la condizione di chiusura è proprio la condizione di simpletticità dello jacobiano della trasformazione

$$J = \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}.$$

Una conseguenza di questo teorema è che le trasformazioni simplettiche dipendenti dal tempo sono canoniche.

#### **Teorema 4.4. Canonicità attraverso i differenziali - III**

Se la trasformazione  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , anche dipendente dal tempo, è simplettica per ogni  $t$  fissato, allora esiste  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  tale che,

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = dG, \quad a \ t \ fissato, \ per \ ogni \ t$$

In tal caso, se  $H$  è un'hamiltoniana, scegliendo

$$K = H + \mathbf{P} \cdot \partial_t \mathbf{Q} + \partial_t G \tag{4.1}$$

si ottiene che

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt + dG$$

Quindi una trasformazione simplettica dipendente dal tempo è una trasformazione canonica e la nuova hamiltoniana si calcola come in (4.1).

### 4.3 Funzioni generatrici

L'uso più importante che si può fare di questa parte della teoria è che permette di **costruire** trasformazioni canoniche. Vediamo come.

Consideriamo, come esempio, la funzione  $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{Q}$ , che ha differenziale

$$dF = \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot d\mathbf{Q}$$

Chiediamoci ora se esistono due funzioni di  $\mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$  e  $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$  tali che

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = dF = \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot d\mathbf{Q} \quad (4.2)$$

La risposta è evidentemente sì, e

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} = -\mathbf{q}$$

In questo modo risulta definita la trasformazione

$$\mathbf{P} = -\mathbf{q}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{p}$$

che è in effetti la trasformazione canonica che scambia coordinate e momenti (a meno di un segno). D'altra parte, l'uguaglianza (4.2) è verificata anche pensando che le variabili indipendenti siano  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  mentre  $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$  sono date dal cambiamento di variabile. Infatti  $F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$  e

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p} = d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) = dF$$

Questo esempio dovrebbe rendere evidente che vale il seguente teorema

**Teorema 4.5. Funzione generatrice**  $F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$

*Sia  $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  una funzione regolare, con la matrice  $\partial_{\mathbf{q}\mathbf{Q}}^2 F$  non singolare. Allora le equazioni*

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \partial_{\mathbf{q}} F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \\ -\mathbf{P} &= \partial_{\mathbf{Q}} F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \end{aligned}$$

*definiscono un cambiamento di variabili che è simplettico per ogni  $t$ .*

*Inoltre, data  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , l'hamiltoniana per il sistema nelle nuove variabili è*

$$K = H + \partial_t F$$

Infatti, la prima equazione permette di ottenere  $\mathbf{Q}$  in funzione di  $\mathbf{q}$  (a questo serve l'ipotesi di non singolarità della matrice delle derivate seconde incrociate). La seconda equazione permette di determinare  $\mathbf{P}$  in funzione di  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{Q}$ . La canonicità è garantita dal fatto che, in variabili  $\mathbf{q}, \mathbf{Q}$ , ovviamente vale

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = dF$$

e questa stessa relazione rimane naturalmente vera anche se viene espressa in funzione di  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$ . Poiché una trasformazione simplettica ha jacobiano simplettico, e le matrici simplettiche hanno determinate 1, segue che la mappa  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  e  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  è non singolare, dunque definisce effettivamente una trasformazione di coordinate.

Data  $H$ , la nuova hamiltoniana  $K$  si definisce imponendo l'uguaglianza

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt + dF$$

Dunque

$$K = H + \partial_t F$$

Notate che questa relazione tra  $H$  e  $K$  è più semplice rispetto a quella espressa nella (4.1), il motivo è che

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt + dF$$

letta nelle variabili  $\mathbf{q}, \mathbf{Q}$  afferma che

$$\partial_t F = K - H,$$

letta invece nelle variabili  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  afferma che

$$\partial_t F = K - H - \mathbf{P} \cdot \partial_t \mathbf{Q}$$

che è appunto la (4.1)

È possibile anche scegliere altre coppie di variabili indipendenti tra le  $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ . Infatti, sia  $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ,  $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  симплетica per ogni  $t$ . Allora, per i teoremi precedenti, esiste  $G = G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  tale che a  $t$  fissato

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = dG \quad (4.3)$$

Se si possono considerare indipendenti  $\mathbf{q}, \mathbf{P}$ , allora, aggiungendo  $d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})$  a entrambi i membri della (4.3), e definendo

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = G(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{P}), t) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$$

si ha che

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{P} = dS, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}} \end{cases} \quad \det \partial_{\mathbf{q}\mathbf{P}} S \neq 0$$

Se si possono considerare indipendenti  $\mathbf{p}, \mathbf{P}$ , allora, aggiungendo  $d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$  a entrambi i membri della (4.3), e definendo

$$F_3(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = G(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t), \mathbf{p}, t) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)$$

si ha che

$$-\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{P} = dF_3, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \mathbf{q} = -\partial_{\mathbf{P}} F_3 \\ \mathbf{Q} = \partial_{\mathbf{P}} F_3 \end{cases} \quad \det \partial_{\mathbf{p}\mathbf{P}} F_3 \neq 0$$

Infine, se si possono considerare indipendenti  $\mathbf{p}, \mathbf{Q}$ , allora, aggiungendo  $-d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$  a entrambi i membri della (4.3), e definendo

$$F_4(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) = G(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{p}, t) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)$$

si ha che

$$-\mathbf{q} \cdot d\mathbf{p} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = dF_4, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \mathbf{q} = -\partial_{\mathbf{p}} F_4 \\ \mathbf{P} = -\partial_{\mathbf{Q}} F_4 \end{cases} \quad \det \partial_{\mathbf{p}\mathbf{Q}} F_4 \neq 0$$

Si noti che in dimensione maggiore di 1, è possibile considerare scelte diverse per ogni coppia di variabili coniugate. Per esempio, provate a scrivere qual è la trasformazione indotta da una funzione generatrice  $F = F(q_1, Q_1, q_2, P_2)$ .

**Osservazione:** le varie funzioni generatrici non sono equivalenti. Per esempio, la trasformazione identica

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}, \mathbf{P} = \mathbf{p}$$

è generata da  $S = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{P}$ , ma non può essere generata da una funzione generatrice del tipo  $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$  (infatti non si possono scegliere  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{Q}$  come variabili indipendenti).

Usando le funzioni generatrici, è semplice mostrare come un cambiamento di coordinate induca un cambiamento negli impulsi.

**Esempio:** sia  $\mathbf{x}(\mathbf{q})$  un diffeomorfismo da un dominio di  $\mathbb{R}^n$  in un dominio di  $\mathbb{R}^n$ , cioè  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{x}(\mathbf{q})$  sia cambiamento regolare delle variabili  $\mathbf{q}$ . Sia

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{q})$$

Poiché  $\partial_{\mathbf{q}, \mathbf{P}} S = \partial_{\mathbf{q}, \mathbf{x}}$ , che per ipotesi è non singolare,  $S$  definisce la trasformazione canonica

$$\mathbf{Q} = \partial_{\mathbf{P}} S = \mathbf{x}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{p} = (\partial_{\mathbf{q}, \mathbf{x}})^t \mathbf{P}$$

Questa trasformazione solleva la trasformazione delle sole coordinate in una trasformazione nello spazio delle fasi.

È da notare che la funzione generatrice

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{q}) + g(\mathbf{q}),$$

dove  $g$  è una funzione scalare delle  $\mathbf{q}$ , genera la trasformazione canonica

$$\mathbf{Q} = \partial_{\mathbf{P}} S = \mathbf{x}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{p} = (\partial_{\mathbf{q}, \mathbf{x}})^t \mathbf{P} + \partial_{\mathbf{q}} g$$

che non coincide con la precedente. Dunque, come preannunciato, le trasformazioni canoniche sono “più numerose” delle trasformazioni indotte da trasformazioni delle sole  $\mathbf{q}$ .

Usando le funzioni generatrici non è troppo difficile arrivare a dimostrare che, data  $H$ , il flusso di hamiltoniana  $H$  definisce una trasformazione simplettica. Dimostreremo il seguente teorema.

**Teorema 4.6. Simpletticità del flusso di fase.**

*Sia*

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}} &= \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ \bar{\mathbf{p}} &= \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{aligned} \tag{4.4}$$

la soluzione delle equazioni di Hamilton di hamiltoniana  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , di dato iniziale  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , cioè

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \partial_{\mathbf{p}} H(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} = -\partial_{\mathbf{q}} H(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, 0) = \mathbf{q} \\ \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, 0) = \mathbf{p} \end{cases}$$

Allora, la trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) \\ \mathbf{p}_1 &= \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) \end{aligned}$$

è simplettica per ogni  $t$ , dalle variabili  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$  alle variabili  $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$ .

Si potrebbe dimostrare questo teorema dimostrando che lo jacobiano del flusso è simplettico (più precisamente, dimostrando che se  $A$  è la matrice jacobiana al tempo  $t$ , allora  $AJA^t$  è costante nel tempo, dunque è pari  $J = A(0)JA^t(0)$ , e quindi  $A$  è simplettica; completare per esercizio). È però utile procedere in un altro modo, cioè costruendo esplicitamente una funzione generatrice della trasformazione.

Premetto un lemma tecnico.

**Lemma 4.1.** *Sia  $H$  un'hamiltoniana con  $\partial_p^2 H$  non singolare. Allora, se  $t$  è sufficientemente piccolo, l'uguaglianza  $\mathbf{q}_1 = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$  può essere risolta in  $\mathbf{p}_0$ , dunque si possono utilizzare, localmente, le variabili indipendenti  $\mathbf{q}_0$  e  $\mathbf{q}_1$  per descrivere il moto.*

Si noti che se  $H$  è un'hamiltoniana che proviene da una lagrangiana naturale,  $H$  dipende quadraticamente degli impulsi tramite l'inversa della matrice cinetica, che è definita positiva, dunque non singolare.

Il lemma si dimostra facilmente notando che, per  $t$  piccolo,

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 + \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, 0)t + o(t) = \mathbf{q}_0 + \partial_p H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, 0)t + o(t)$$

e questa uguaglianza si può invertire in  $\mathbf{p}_0$ , a  $t$  piccolo, per l'ipotesi di non singolarità di  $\partial_p^2 H$ .

Consideriamo dunque il moto  $\bar{\mathbf{q}}(t)$ ,  $\bar{\mathbf{p}}(t)$  con dati al bordo  $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, 0) = \mathbf{q}_0$  e  $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) = \mathbf{q}_1$ , che, per il lemma precedente, esiste in opportuni intorno di  $\mathbf{q}_0$  e  $\mathbf{q}_1$  se  $t$  è sufficientemente piccolo. Consideriamo inoltre il valore dell'azione calcolata sul moto:

$$F(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t) = \int_0^t (\bar{\mathbf{p}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}} - H(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, s)) ds$$

Tenendo fissato  $t$  e variando  $\mathbf{q}_0$  e  $\mathbf{q}_1$ , varia naturalmente tutta la traiettoria. Sia  $\delta\bar{\mathbf{q}}(s)$ ,  $\delta\bar{\mathbf{p}}(s)$  la variazione al tempo  $s$  al primo ordine, con  $\delta\bar{\mathbf{q}}(0) = \delta\mathbf{q}_0$  e  $\delta\bar{\mathbf{q}}(t) = \delta\mathbf{q}_1$ . Vale

$$F(\mathbf{q}_0 + \delta\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 + \delta\mathbf{q}_1, t) - F(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t) = \int_0^t (\delta\bar{\mathbf{p}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta\dot{\bar{\mathbf{q}}} - \partial_q H \cdot \delta\bar{\mathbf{q}} - \partial_p H \cdot \delta\bar{\mathbf{p}}) ds + o(\delta\mathbf{q}_0, \delta\mathbf{q}_1)$$

Usando le equazioni del moto che sono soddisfatte da  $\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}$ , cioè che  $\partial_q H = -\dot{\bar{\mathbf{p}}}$  e che  $\partial_p H = \dot{\bar{\mathbf{q}}}$ , si ottiene

$$F(\mathbf{q}_0 + \delta\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 + \delta\mathbf{q}_1, t) - F(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t) = \int_0^t \frac{d}{ds} (\bar{\mathbf{p}} \cdot \delta\bar{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) \cdot \delta\mathbf{q}_1 - \mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q}_0 + o(\delta\mathbf{q}_0, \delta\mathbf{q}_1)$$

Ma allora,

$$dF = \mathbf{p}_1 \cdot d\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_0 \cdot d\mathbf{q}_0$$

Per i teoremi della sezione precedente, questa identità garantisce che la trasformazione è simplettica.

#### 4.4 L'equazione di Hamilton-Jacobi

È utile calcolare anche come varia  $F$  nel tempo. Si noti che cambiando  $t$  e tenendo fissi  $q_0$  e  $q_1$ , non è facile determinare la variazione di  $F$ , infatti cambia l'intera traiettoria. È invece facile mostrare che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(q_0, \bar{q}(q_0, p_0, t), t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t ds (\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - H(\bar{q}, \bar{p}, s)) \\ &= \bar{p}(t) \cdot \dot{\bar{q}}(t) - H(\bar{q}(t), \bar{p}(t), t) = p_1 \cdot \dot{q}(t) - H(q_1, p_1, t) \end{aligned}$$

Infatti scegliendo  $q_1 = \bar{q}(q_0, p_0, t)$  con  $(q_0, p_0)$  fissato, la traiettoria non cambia, e dunque la derivata è l'argomento dell'integrale calcolato in  $t$ . Poiché  $\partial_{q_1} F = p_1 = \bar{p}$ , si ha che

$$\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - H = \frac{d}{dt} F(q_0, \bar{q}(q_0, p_0, t), t) = \partial_t F + \partial_q F \cdot \dot{\bar{q}} = \partial_t F + \bar{p} \cdot \dot{\bar{q}}$$

cioè

$$\partial_t F = -H(\bar{q}, \bar{p}, t) = -H(q_1, p_1, t)$$

Possiamo rivedere quanto fatto fin'ora notando che abbiamo dimostrato la canonicità della trasformazione che associa a  $(q_1, p_1)$ , al tempo  $t$ , il corrispondente dato iniziale  $(q_0, p_0)$  al tempo 0. Indicando con  $q = q_1$  e  $p = p_1$ , abbiamo dimostrato il seguente teorema

**Teorema 4.7.** *L'azione calcolata sul moto di dato iniziale  $q_0$  e di posizione  $q$  al tempo  $t$  ha differenziale*

$$dF = p \cdot dq - H dt - p_0 \cdot dq_0$$

*Dunque la trasformazione che associa a  $(q, p)$  al tempo  $t$  il dato iniziale  $(q_0, p_0)$  è canonica. Nelle nuove variabili  $(q_0, p_0)$  l'hamiltoniana è nulla, infatti  $K = H + \partial_t F = H - H = 0$ .*

Poiché nelle nuove variabili l'hamiltoniana è nulla e  $p = \partial_q F$ , la funzione  $F = F(q_0, q, t)$  risolve la seguente equazione

$$H(q, \partial_q F, t) + \partial_t F = 0$$

Questa è l'equazione di **Hamilton-Jacobi**.

Si noti che se è noto il flusso hamiltoniano, la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi si ottiene mediante l'integrale di azione. Al contrario, riuscire a determinare opportune soluzioni dell'equazione di Hamilton-Jacobi permette, in un qualche senso, di trovare la soluzione delle equazioni del moto, come mostreremo nel prossimo paragrafo.

## 4.5 Il metodo di Hamilton-Jacobi

Come abbiamo visto nell'esempio del punto precedente, una trasformazione canonica può rendere banalmente integrabile le equazioni di Hamilton. Però, chi ci dice come trovare la trasformazione? Possiamo tentare di determinarla cercando una funzione generatrice  $S(q, P, t)$  tale che la nuova hamiltoniana  $K$  sia esattamente 0. In tal caso, infatti, le equazioni nelle nuove variabili  $(Q, P)$  sono banali:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= 0 \\ \dot{P} &= 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

dunque nota la trasformazione si può risalire al moto nelle variabili  $q, p$ . Come deve essere fatta una tale  $S$ ? Deve valere:  $\partial_q S = p$  e  $K = 0$ , cioè:

$$H(q, \partial_q S(q, P, t), t) + \partial_t S(q, P, t) = 0. \tag{4.6}$$

Per Hamiltoniane indipendenti dal tempo, si può cercare una soluzione **separando le variabili**, cioè cercando la soluzione nella forma  $S(q, P, t) = W(q, P) - P_n t$ , dove  $P_n$  è l'ultimo impulso ed è pari all'energia. L'equazione di HJ diventa l'**equazione caratteristica di HJ**:

$$H(q, \partial_q W(q, P, t)) = P_n. \tag{4.7}$$

In pratica, invece di cercare  $S$  dipendente dal tempo che renda nulla l'hamiltoniana, cerchiamo  $W$ , indipendente da  $t$ , che rende costante l'hamiltoniana. Infatti, se  $W$  risolve l'equazione caratteristica di Hamilton, con  $P_n$  ultimo nuovo impulso,  $W$  genera una trasformazione canonica nelle nuove variabili  $(Q, P)$ , per le quali l'hamiltoniana è  $P_n$ . Nelle nuove variabili le equazioni del moto sono banali:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \partial_{P_i} K = 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{Q}_n &= \partial_{P_n} K = 1 \\ \dot{P}_i &= -\partial_{Q_i} K = 0 \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Come si procede in pratica? Sempre e solo per separazione di variabili, cioè cercando la soluzione come somma di  $n$  funzioni ognuna delle quali dipende solo da una delle vecchie coordinate. In alcuni rari casi ci si riesce (sistemi integrabili) in generale no. Il fatto che si riesca a trovare la soluzione dipende dal fatto che dentro  $H$  la dipendenza delle variabili è *separtata*.

Prima di vedere come funziona la separazione di variabili, guardiamo come funziona il metodo in un caso che sappiamo già risolvere, quello dell'oscillatore armonico.

Considero un'oscillatore armonico di hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

L'equazione caratteristica di HJ è

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial q} + q \right)^2 = E$$

dove  $E$  (l'energia) sarà il nuovo impulso. Esplicitando rispetto alla derivata di  $W$  si ottiene

$$W(q, E) = \pm \int^q dq \sqrt{2E - q^2}$$

L'integrale si può calcolare esplicitamente, ma questo calcolo non è necessario per trovare la soluzione delle equazioni del moto. Infatti, se  $Q$  è la nuova variabile, la soluzione è

$$Q(t) = c + t,$$

dove  $c$  dipende dal dato iniziale, mentre la relazione tra  $Q$  e le vecchie variabili è data da

$$Q = \frac{\partial W}{\partial E} = \pm \int^q \frac{dq}{\sqrt{2E - q^2}}$$

Dunque la soluzione delle equazioni del moto si esprime mediante la **formula di quadratura**:

$$\pm \int^{q(t)} \frac{dq}{\sqrt{2E - q^2}} = t + c$$

dove il segno e la costante  $c$  dipendo da dato iniziale. Si noti che in questo caso l'integrale si può calcolare esplicitamente, e vale  $\arcsin q(t)/\sqrt{2E}$ . Sostituendo questa espressione e invertendo rispetto a  $q$  si ottiene  $q = \sqrt{2E} \sin(t + c)$ .

Il valore del metodo di HJ si comprende nei rari casi di sistemi che si risolvono per quadrature, senza che esista un'evidente simmetria che renda ciclica qualche variabile. Faccio un esempio.

### Esempio: moto in un campo di dipolo, ristretto al piano

In  $\mathbb{R}^3$ , il potenziale di dipolo, con il dipolo orientato sull'asse delle  $x_1$ , è, a meno di costanti,

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1$$

dove  $\mathbf{e}_1$  è il versore dell'asse  $x_1$ . Si noti che questo potenziale decade come  $1/|\mathbf{x}|^2$ , più rapidamente del potenziale coulombiano.

Restringendoci a moti che avvengono sul piano  $(x_1, x_2)$  la lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{x_1}{|\mathbf{x}|^3}$$

che in coordinate polari è

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{\rho^2} \cos \vartheta$$

La corrispondente hamiltoniana è

$$H = \frac{p_\rho^2}{2} + \frac{p_\vartheta^2}{2\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \cos \vartheta$$

Come si nota facilmente, non ci sono variabili cicliche. L'equazione di HJ è

$$\frac{1}{2}(\partial_\rho W)^2 + \frac{1}{2\rho^2}(\partial_\vartheta W)^2 - \frac{1}{\rho^2} \cos \vartheta = E$$

dove  $E$  sarà uno dei nuovi impulsi. Cerco la soluzione nella forma

$$W(\rho, \vartheta) = A(\rho) + B(\vartheta)$$

Otengo

$$\frac{1}{2}(\partial_\rho A(\rho))^2 + \frac{1}{2\rho^2}(\partial_\vartheta B(\theta))^2 - \frac{1}{\rho^2} \cos \vartheta = E$$

che si può riscrivere come

$$\frac{1}{2}(\partial_\rho A(\rho))^2 + \frac{1}{2\rho^2}((\partial_\vartheta B(\theta))^2 - 2 \cos \vartheta) = E$$

È abbastanza evidente che questa equazione si può risolvere solo ipotizzando che

$$(\partial_\vartheta B(\theta))^2 - 2 \cos \vartheta = J$$

con  $J$  che non dipende da  $\rho$  e da  $\vartheta$ . In tal caso l'equazione per  $A$  diventa

$$\frac{1}{2}(\partial_\rho A(\rho))^2 + \frac{J}{2\rho^2} = E$$

Le due equazioni sono risolte da

$$B(\vartheta, J) = \pm \int^\vartheta d\vartheta \sqrt{J + 2 \cos \vartheta}$$
$$A(\rho, J, E) = \pm \int^\rho d\rho \sqrt{2E - \frac{J}{\rho^2}}$$

Le nuove variabili sono

$$Q_J = \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{\partial B}{\partial J} + \frac{\partial A}{\partial J} = \pm \int^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{2\sqrt{J+2\cos\vartheta}} - \mp \int^{\rho} \frac{d\rho}{2\rho^2\sqrt{2E-\frac{J}{\rho^2}}}$$

$$Q_E = \frac{\partial W}{\partial E} = \pm \int^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{2E-\frac{J}{\rho^2}}}$$

Poiché la soluzione delle equazioni del moto è data da  $Q_E = t + c_1$  e  $Q_J = c_2$ , le formule di quadratura sono

$$\pm \int^{\vartheta(t)} \frac{d\vartheta}{2\sqrt{J+2\cos\vartheta}} \mp \int^{\rho(t)} \frac{d\rho}{2\rho^2\sqrt{2E-\frac{J}{\rho^2}}} = c_2$$

$$\pm \int^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{2E-\frac{J}{\rho^2}}} = t + c_1$$

Abbiamo potuto portare il moto alle quadrature perché il metodo di HJ ci ha permesso di notare l'esistenza di un integrale primo, diverso dall'energia:

$$J = p_{\vartheta}^2 - 2\cos\vartheta$$

In genere, l'equazioni di HJ si risolve se ci sono  $n$  integrali primi, e la loro dipendenza è separabile.

## 4.6 L'equazione caratteristica di HJ

Formalizzo i concetti espressi nei punti precedenti. Si chiama **integrale completo** dell'equazione caratteristica di Hamilton-Jacobi

$$H(\mathbf{q}, \partial_{\mathbf{q}}W) = E$$

una funzione  $W = W(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}})$ , dove  $\mathbf{p}$  sono  $n$  parametri indipendenti da cui dipende la soluzione, con  $E = E(\tilde{\mathbf{p}})$ , e tali che

$$\det \partial_{\tilde{\mathbf{p}}}^2 W \neq 0$$

Se una tale funzione esiste, allora è ben definito il cambiamento di variabili dato, implicitamente, da

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{q}} = \partial_{\tilde{\mathbf{p}}} W(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}) \\ \mathbf{p} = \partial_{\mathbf{q}} W(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}) \end{cases}$$

L'hamiltoniana nelle nuove variabili è data da  $E = E(\tilde{\mathbf{p}})$ , le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = 0 \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \partial_{\tilde{\mathbf{p}}} E(\tilde{\mathbf{p}}) \end{cases}$$

Poiché i nuovi impulsi sono costanti, anche  $\partial_{\tilde{\mathbf{p}}} E(\tilde{\mathbf{p}})$  è un vettore costante, dunque il moto nelle nuove variabili è

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}(t) = \tilde{\mathbf{p}}(0) \\ \tilde{\mathbf{q}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(0) + t \partial_{\tilde{\mathbf{p}}} E(\tilde{\mathbf{p}}) \end{cases}$$

## 5 Sistemi integrabili

### 5.1 Sistemi integrabili

Se l'equazione caratteristica di HJ

$$H(\mathbf{q}, \partial_{\mathbf{q}}W) = E$$

ha un integrale completo  $W$ , i nuovi impulsi sono degli integrali primi indipendenti del moto. Ne segue che se un sistema non ha  $n$  integrali primi indipendenti, non è possibile trovare un integrale completo delle equazioni di HJ.

Inoltre, se HJ ha soluzione, il moto nelle nuove variabili è particolarmente semplice, infatti i nuovi impulsi sono costanti, e nelle nuove coordinate il moto è rettilineo uniforme:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}(t) = \tilde{\mathbf{p}}(0) \\ \tilde{\mathbf{q}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(0) + t \partial_{\tilde{\mathbf{p}}} E(\tilde{\mathbf{p}}(0)) \end{cases}$$

Queste stesse formule indicano che il moto è stato **ridotto alle quadrature**, cioè il moto è descritto attraverso inversioni di funzioni (che in genere sono espresse mediante integrali):

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \tilde{\mathbf{p}}(0) \\ \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) + t \partial_{\tilde{\mathbf{p}}} E(\tilde{\mathbf{p}}(0)) \end{cases}$$

Un sistema che si possa ridurre alle quadrature mediante HJ è detto **sistema integrabile**.

I sistemi integrabili sono sistemi con specifiche proprietà. Si noti, infatti, che i nuovi impulsi sono integrali primi del moto indipendenti (cioè non si può determinarne uno in funzione degli altri). Inoltre, per le regole di commutazione canonica,

$$\{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\}_{\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}} = 0$$

Dimostriamo l'esistenza di  $n$  integrali primi indipendenti in involuzione è anche una condizione sufficiente all'integrabilità. In particolare dimostreremo l'integrabilità locale di un sistema siffatto (teorema di Liouville), per poi descrivere la versione globale (teorema di Arnold-Liouville), che dà anche importanti informazioni qualitative sul moto,

È necessario fare una osservazione generale sugli integrali primi di un sistema di equazioni differenziali. Consideriamo il flusso  $\Phi^t$  associato a un campo vettoriale  $\mathbf{u}$  in  $\mathbb{R}^m$ , e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto non stazionario, cioè  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ . Sia  $\Pi$  l'iperpiano che passa per  $\mathbf{x}_0$  ed è ortogonale a  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$ . Consideriamo un intorno  $B$  di raggio  $r$  di  $\mathbf{x}_0$ . Se  $r$  è abbastanza piccolo, per ogni  $\mathbf{x} \in B$  esistono  $t^- < 0 < t^+$  tale che per  $t \in (t^-, t^+)$  si ha  $\Phi^t(\mathbf{x}) \in B$  mentre  $\Phi^{t^\pm}(\mathbf{x}) \in \partial B$ . Inoltre, esiste  $t_0 \in (t^-, t^+)$  tale che  $\Phi^{t_0}(\mathbf{x}) \in \Pi$ . Risulta dunque ben definita la funzione

$$\mathbf{F} : B \rightarrow \Pi$$

che a  $\mathbf{x}$  associa  $\Phi^{t_0}(\mathbf{x})$ , cioè che a  $\mathbf{x}$  associa il punto di intersezione della sua orbita con  $\Pi$ . È evidente che la funzione vettoriale a  $m - 1$  componenti  $\mathbf{F}$  è conservata dal flusso. Quindi, intorno a un punto non stazionario, esistono  $m - 1$  integrali primi del moto. Questa affermazione, però, non dà nessuna informazione in più rispetto all'esistenza locale delle soluzioni. Al contrario, come vedremo, l'esistenza di  $n$  integrali primi indipendenti in involuzione per un sistema hamiltoniano a  $n$  gradi di libertà (che è dunque un sistema in  $\mathbb{R}^{2n}$ ) implica che il moto si riduce alle quadrature.

## 5.2 Geometria симплетtica

(2018-2019: argomento non svolto a lezione, tranne enunciato dell'ultimo teorema)

Premetto una breve sezione geometrica che mi servirà per generalizzare alcuni risultati. In questa sezione chiamo **prodotto antiortogonale** il prodotto  $\mathbf{z} \cdot J\mathbf{w}$  (che prima chiamavo prodotto симплетtico).

Un sottospazio  $V$  è detto **nullo** se tutti i suoi vettori sono antiortogonali tra loro. Si dimostri per esercizio che  $V$  è nullo se e solo se  $V$  è ortogonale a

$$JV = \{J\mathbf{z} \mid \mathbf{z} \in V\}.$$

**Teorema 5.1. Sulla dimensione dei sottospazi nulli** *Se  $V$  è nullo, allora ha dimensione  $\leq n$ .*

Infatti  $V$  e  $JV$  sono ortogonali, e hanno la stessa dimensione, che deve dunque essere al più  $n$ .

Se  $\mathbf{u}_i$  sono  $n$  vettori antiortogonali, allora  $V = \text{span}\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$  è uno spazio nullo, come anche  $JV$ .

Indico con  $\hat{\mathbf{q}}_i$  e  $\hat{\mathbf{p}}_j$  i versori degli assi  $q_i$  e  $p_j$ . Chiamo  $i$ -esimo **piano coordinato** il piano generato da  $\hat{\mathbf{q}}_i$  e  $\hat{\mathbf{p}}_i$ . Noto che l' $i$ -esimo piano coordinato è invariante per  $J$ , perché

$$J\hat{\mathbf{q}}_i = \hat{\mathbf{p}}_i \quad \text{e} \quad J\hat{\mathbf{p}}_i = \hat{\mathbf{q}}_i$$

Si consideri ora una qualunque scelta dei versori  $\sigma_i = \hat{\mathbf{q}}_i$  oppure  $\sigma_i = \hat{\mathbf{p}}_i$ . Sia

$$\Pi_{\sigma} = \text{span}\{\sigma_i\}_{i=1}^n$$

Poiché  $J\sigma_i$  è ortogonale a  $\sigma_i$  (vedi sopra),  $\Pi_{\sigma}$  è nullo. Lo chiamerò "sottospazio coordinato nullo  $n$ -dimensionale".

Posso ora enunciare e dimostrare il seguente risultato.

**Teorema 5.2.** *Sia  $V$  un sottospazio nullo  $n$ -dimensionale. Esiste almeno un sottospazio coordinato nullo  $n$ -dimensionale  $\Pi$  tale che*

$$V \cap \Pi = \{\mathbf{0}\}$$

e dunque

$$\mathbb{R}^{2n} = V \oplus \Pi$$

Considero il sottospazio nullo  $\Pi_0$  generato da  $\{\hat{\mathbf{p}}_i\}_{i=1}^n$ . Sia  $k$  la dimensione di  $V \cap \Pi_0$ . Senza mancare di generalità (rinominando gli indici) posso supporre che

$$V \cap \Pi_0 = \text{span}\{\hat{\mathbf{p}}_i\}_{i=1}^k$$

Ciò è equivalente a dire che  $\hat{\mathbf{p}}_i \in V$  se  $i \leq k$ , mentre  $\hat{\mathbf{p}}_i \notin V$  se  $i > k$ . Poiché se  $i \leq k$ ,  $\hat{\mathbf{p}}_i \in V$  e  $V$  è nullo,  $-\hat{\mathbf{q}}_i = J\hat{\mathbf{p}}_i$  è ortogonale a  $V$ , e dunque non gli appartiene. In questo modo abbiamo provato che se

$$\Pi = \text{span}\{\{\hat{\mathbf{q}}_i\}_{i=1}^k, \{\hat{\mathbf{p}}_{i=k+1}^n\}\}$$

allora  $V \cap \Pi = \{\mathbf{0}\}$ .

**Teorema 5.3.** *Sia  $V$  un sottospazio nullo  $n$  dimensionale generato da  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$ , vettori indipendenti e antiortogonali.*

*Esiste una scelta di  $\sigma_i = \hat{\mathbf{q}}_i$  oppure  $\sigma_i = \hat{\mathbf{p}}_i$  tale che il minore  $n \times n$  della matrice formata dai vettori  $\mathbf{u}_i$  rispetto alle componenti  $\sigma_i$  è non nullo.*

Dimostro il teorema per la matrice  $JV$ ; la tesi è valida perché  $V$  è nullo se e solo se lo è  $JV$ . Usando il teorema precedente, esiste  $\Pi$  sottospazio nullo coordinato generato da  $\hat{\sigma}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tale che  $V \otimes \Pi = \mathbb{R}^{2n}$ . Sia ora  $\mathbf{z} \in JV$ . Esistono  $\mathbf{v} \in V$  e  $\mathbf{w} \in \Pi$  tale che

$$\mathbf{z} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

Indico con  $\mathcal{P}_W$  il proiettore ortogonale sul sottospazio  $W$ . Poiché  $\mathbf{z} \in JV$  e  $\mathbf{v} \in V$ , si ha che  $\mathbf{v} = -\mathcal{P}_V \mathbf{w}$ , dunque

$$\mathbf{z} = \mathbf{w} - \mathcal{P}_V \mathbf{w}$$

Si noti che l'operatore  $\mathbf{I} - \mathcal{P}_V$  definito su  $\Pi$  è iniettivo, altrimenti esisterebbe un  $\mathbf{w}$  non nullo tale che

$$\mathbf{w} = \mathcal{P}_V \mathbf{w}$$

ma allora  $\mathbf{w} \in V \cap \Pi$ . Dunque  $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w} - \mathcal{P}_V \mathbf{w}$  è una biiezione tra  $\Pi$  e  $JV$ . Proiettiamo la relazione trovata su  $\Pi$ , con  $\mathcal{P}_\Pi$ :

$$\mathcal{P}_\Pi \mathbf{z} = \mathbf{w} - \mathcal{P}_\Pi \mathcal{P}_V \mathbf{w}$$

Mostriamo che anche questa è iniettiva. Se così non fosse, esisterebbe  $\mathbf{w}$  non nullo tale che

$$\mathbf{w} = \mathcal{P}_\Pi \mathcal{P}_V \mathbf{w}$$

ma questo è possibile se e solo se  $\mathbf{w} \in V \cap \Pi$ , cioè se  $\mathbf{w}$  è nullo.

Poiché  $\mathcal{P}_\Pi$  è iniettiva da  $JV$  a  $\Pi$ , se  $\mathbf{w}_i$  sono vettori linearmente indipendenti che generano  $JV$ , allora il minore che corrisponde alle coordinate di  $\Pi$  ha determinante non nullo (lascio questo dettaglio al lettore).

Un risultato più debole ma più semplice da dimostrare è il seguente.

**Teorema 5.4.** *Siano  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$  indipendenti e antiortogonali. Esiste una trasformazione canonica lineare di nuove variabili  $\tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_i$  tali che*

$$JV = \text{span}\{J\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n = \{\tilde{\mathbf{u}} | \tilde{p}_i = 0 \text{ per } i = 1, \dots, n\}$$

*Equivalentemente,  $JV$  è il sottospazio  $n$ -dimensionale  $\tilde{\mathbf{q}}_1 \dots \tilde{\mathbf{q}}_n$ .*

Sia  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$  una base ortonormale per  $V = \text{span}\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$ . Ne segue che  $\{J\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$  è una base ortonormale per  $JV$ , infatti  $J$  conserva il prodotto scalare. Inoltre  $\mathbf{x}_i$  è ortogonale a  $J\mathbf{x}_j$  perché  $V$  è ortogonale a  $JV$ , infatti  $\mathbf{u}_i \cdot J\mathbf{u}_j = 0$ . Indico con  $\mathbf{x}_i^q$  e  $\mathbf{x}_i^p$  le componenti  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  del vettore  $\mathbf{x}_i$ . Noto che la condizione di ortonormalità è

$$\delta_{ij} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i^q \cdot \mathbf{x}_j^q + \mathbf{x}_i^p \cdot \mathbf{x}_j^p$$

mentre la condizione di prodotto simplettico nullo è

$$0 = \mathbf{x}_i \cdot J\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i^q \cdot \mathbf{x}_j^p - \mathbf{x}_i^p \cdot \mathbf{x}_j^q$$

Sia ora  $\mathbf{z} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ .

$$\begin{aligned}\tilde{p}_i &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_i^q + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i^p = \mathbf{z} \cdot \mathbf{x}_i \\ \tilde{q}_i &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_i^p - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i^q = \mathbf{z} \cdot J\mathbf{x}_i\end{aligned}$$

Questa trasformazione è ortogonale, infatti la matrice che la definisce ha come prime  $n$  righe i vettori  $J\mathbf{x}_i$  e come ultime  $n$  righe i vettori  $\mathbf{x}_i$ , e i vettori  $\{\mathbf{x}_j, J\mathbf{x}_j\}_{j=1\dots n}$  sono una base ortonormale. Calcolo le parentesi di Poisson delle nuove coordinate:

$$\begin{aligned}\{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} &= \mathbf{x}_i^q \cdot \mathbf{x}_j^p - \mathbf{x}_i^p \cdot \mathbf{x}_j^q = 0 \\ \{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} &= -\mathbf{x}_i^p \cdot \mathbf{x}_j^q + \mathbf{x}_i^q \cdot \mathbf{x}_j^p = 0 \\ \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} &= \mathbf{x}_i^p \cdot \mathbf{x}_j^p - (-\mathbf{x}_i^q) \cdot \mathbf{x}_j^q = \delta_{ij}\end{aligned}$$

La dimostrazione si conclude osservando che  $JV = \{\mathbf{z} \mid \forall i \mathbf{z} \cdot \mathbf{x}_i = 0\}$  ma la condizione  $\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}_i = 0$  è esattamente la condizione  $\tilde{p}_i = 0$ .

### 5.3 Integrabilità locale

**Teorema 5.5. Liouville** *Sia dato un sistema di hamiltoniana  $H$  indipendente dal tempo. Supponiamo che in un intorno di un punto  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$  esistano  $n$  funzioni  $f_i = f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , con  $i = 1, \dots, n$ , tali che*

- sono integrali primi del moto, cioè  $\{f_i, H\} = 0$  per ogni  $i$ ;
- sono in involuzione, cioè  $\{f_i, f_j\} = 0$ , per ogni  $i, j$ ;
- sono indipendenti, cioè la matrice  $(\partial_{\mathbf{z}} f_1 \dots \partial_{\mathbf{z}} f_n)$  ha rango  $n$  in un intorno di  $\mathbf{z}_0$

Indicando con  $\mathbf{f}$  il vettore formato da queste  $n$  funzioni  $\mathbf{f} = (f_1 \dots f_n)$ , esiste una funzione  $h = h(\mathbf{f})$  tale che in un intorno di  $\mathbf{z}_0$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h(\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$$

e una trasformazione canonica  $S(\mathbf{q}, \mathbf{f})$  che ha  $\mathbf{f}$  come nuovi impulsi. Nelle nuove coordinate  $(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{f})$  il moto è ricondotto alle quadrature:

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(0) + t \partial_{\mathbf{f}} h(\mathbf{f})$$

con  $\mathbf{f}$  e  $\partial_{\mathbf{f}} h(\mathbf{f})$  vettori costanti.

Assumeremo inizialmente che in un intorno di  $\mathbf{z}_0$

$$\det \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{f} \neq 0$$

(si ricordi che per ipotesi c'è un minore  $n \times n$  con determinante non nullo della matrice  $\partial_{\mathbf{z}} \mathbf{f}$ , che però potrebbe non essere  $\partial_{\mathbf{p}} \mathbf{f}$ ). Da questa ipotesi, usando il teorema della funzione implicita, segue che è possibile esprimere le  $\mathbf{p}$  in funzione delle  $\mathbf{q}$  e delle  $\mathbf{f}$ . Esiste, cioè, una funzione  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{f})$  tale che

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) = \mathbf{p}$$

Differenziando in  $\mathbf{p}$  e in  $\mathbf{q}$  si ha che

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{f}}\mathbf{g} \partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f} &= \mathbf{I} \\ \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{g} + \partial_{\mathbf{f}}\mathbf{g} \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f} &= 0\end{aligned}$$

Usando la prima nella seconda, si ottiene

$$\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{g} = -\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^{-1} \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f} = 0 \quad (5.1)$$

La condizione di involuzione implica che la forma differenziale

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}, \mathbf{q}) \cdot d\mathbf{q}$$

è chiusa. La condizione di chiusura, infatti, equivale a

$$\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{g} = \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{g}^t \quad (5.2)$$

Usando la (5.1) si ottiene che la (5.2) è equivalente a

$$\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^{-1} \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f} = \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f}^t (\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^t)^{-1}$$

che, moltiplicando a sinistra per  $\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}$  e a destra per  $\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^t$ , è equivalente a

$$\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f} \partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^t = \partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f} \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f}^t$$

L'elemento di matrice  $ij$  del membro di sinistra è  $\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f}_i \cdot \partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}_j$ , quello del membro di destra è  $\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}_i \cdot \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f}_j$ , dunque la condizione è equivalente a  $\{f_i, f_j\} = 0$  per ogni  $i$  e  $j$ .

La chiusura della forma  $\mathbf{g} \cdot d\mathbf{q}$  permette di definire, localmente, la sua primitiva

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{q}$$

dove l'integrale è esteso a un qualunque cammino intorno a  $\mathbf{z}_0$  che parte da  $\mathbf{q}_0$  e arriva in  $\mathbf{q}$ . Si noti che stiamo in pratica definendo

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$$

dove  $\mathbf{p}$  diventano funzioni delle  $\mathbf{q}$ , fissando le  $\mathbf{f}$ . Per definizione,

$$\partial_{\mathbf{q}}S = \mathbf{g} \quad \text{e} \quad \partial_{\mathbf{f}, \mathbf{q}}^2 S = \partial_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = \partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^{-1}$$

che sono tutte matrici non singolari per le ipotesi fatte. Dunque  $S$  definisce una trasformazione canonica, attraverso

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) \\ \tilde{\mathbf{q}} &= \partial_{\mathbf{f}}S(\mathbf{q}, \mathbf{f})\end{aligned}$$

dove le nuove coordinate sono le  $\tilde{\mathbf{q}}$ , mentre i nuovi impulsi sono gli integrali primi  $\mathbf{f}$ . Sia  $\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{f})$  l'hamiltoniana nelle nuove variabili. Scriviamo nelle nuove variabili il fatto che  $f_i$  sono integrali primi:

$$0 = \{\tilde{H}, f_i\} = \partial_{\tilde{q}_i}\tilde{H}$$

Ma allora  $\tilde{H}$  non dipende dalle nuove coordinate  $\tilde{\mathbf{q}}$ , cioè  $\tilde{H}$  è funzione solo dei nuovi impulsi. Ne segue la banalità del moto in  $\tilde{\mathbf{q}}$ :

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \partial_{\mathbf{f}}\tilde{H}(\mathbf{f})$$

e il membro di destra non dipende dal tempo.

Dimostro ora che posso rimuovere l'ipotesi che il minore non singolare della matrice delle derivate delle  $f_i$  sia proprio quello che si ottiene derivando negli impulsi  $p_j$ .

**Teorema 5.6.** *Siano  $\{f_i\}_{i=1}^n$  integrali primi indipendenti e in involuzione in un intorno di un punto  $\mathbf{z}_0$ . Intorno a  $\mathbf{z}_0$  esiste una trasformazione canonica tale che  $\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}$  ha determinante non nullo.*

Senza mancare di generalità, assumo  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ . Indico con

$$M = \{\mathbf{z} \mid f_i(\mathbf{z}) = f_i(\mathbf{0}), i = 1, \dots\}$$

l'insieme che si ottiene fissando i valori delle  $f_i$  al valore che assumo in  $\mathbf{0}$ . Intorno a  $\mathbf{0}$ ,  $M$  è una varietà differenziabile. Siano  $\mathbf{u}_i = \partial_{\mathbf{z}}f_i(\mathbf{0})$ . Per le ipotesi sulle  $f_i$ , questi vettori sono linearmente indipendenti e hanno prodotto simplettico nullo. Noto che lo spazio  $V$  generato da  $\mathbf{u}_i$  è il sottospazio  $n$ -dimensionale ortogonale a  $M$  in  $\mathbf{0}$ , mentre lo spazio  $JV$  generato da  $J\mathbf{u}_i$  è il sottospazio  $n$ -dimensionale tangente a  $M$  in  $\mathbf{0}$ .

Per i risultati del paragrafo dedicato alla geometria simplettica, esiste una trasformazione simplettica lineare tale che lo spazio tangente in  $\mathbf{0}$  è descritto da  $\tilde{p}_i = 0$ , per  $i = 1 \dots n$ . Poiché questo spazio è generato anche dalle  $J\partial_{\mathbf{z}}f_i$ , ne segue che  $\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f}$  è la matrice nulla. Ma allora la condizione di indipendenza dei gradienti delle  $f_i$  è esattamente la condizione di non singolarità di  $\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}$ .

Questo teorema permette di concludere che il teorema di integrabilità locale vale sotto l'ipotesi generale che  $\partial_{\mathbf{z}}\mathbf{f}$  abbia rango  $n$ .

Come corollario, vale il seguente teorema generale.

**Teorema 5.7. Non esistenza di  $n+1$  funzioni indipendenti in involuzione** *Se  $f_i$  sono  $n$  funzioni indipendenti in involuzione e  $g$  è una funzione in involuzione con le  $f_i$ , allora  $g$  è funzione di  $f_1, \dots, f_n$ .*

Infatti, il sistema di hamiltoniana  $g$  con gli  $n$  integrali primi in involuzione  $f_i$  è localmente integrabile, e dunque, come dimostrato sopra,  $g$  è funzione delle  $f_i$ .

## 5.4 Integrabilità globale

### Teorema 5.8. Arnold-Liouville

*Nelle ipotesi del teorema precedente, supponiamo che date le costanti  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  la varietà  $n$ -dimensionale*

$$M_{\mathbf{c}} = \{\mathbf{z} \mid f_i(\mathbf{z}) = c_i, i = 1, \dots\}$$

*sia connessa e compatta e lo jacobiano  $\partial_{\mathbf{z}}f$  sia di rango  $n$  in tutti i punti della varietà  $M_{\mathbf{c}}$ . Si noti che  $M_{\mathbf{c}}$  è invariante per il moto, poiché le  $f_i$  sono costanti del moto.*

*Allora:*

- $M_{\mathbf{c}}$  è diffeomorfa a un toro  $n$ -dimensionale.
- su  $M_{\mathbf{c}}$  si possono scegliere  $n$  variabili angolari  $\vartheta_i \in [0, 2\pi]$
- in queste variabili il moto è dato da

$$\vartheta(t) = \vartheta(0) + t\boldsymbol{\omega}$$

dove  $\boldsymbol{\omega}$  è un vettore costante (vettore delle frequenze)

In questo moto sul toro, ogni variabile  $\vartheta_i$  si muove con velocità uniforme, e torna al valore iniziale dopo un periodo  $T_i = 2\pi/\omega_i$ . Per questo fatto prende il nome di **moto quasi periodico sul toro**.

Il punto chiave è considerare i flussi  $\Psi_i^t$  di hamiltoniana  $f_i$ . Poiché le  $f_i$  sono in involuzione, la varietà  $M_c$  è invariante anche per questi flussi. Inoltre, sempre per l'involuzione, i flussi commutano. Sia ora  $\mathbf{z} \in M_c$ , e consideriamo la mappa

$$\Psi^{s_1 s_2 \dots s_n}(\mathbf{z}) = \Psi_1^{s_1} \circ \Psi_n^{s_n}(\mathbf{z})$$

Noto che

$$\partial_{s_i} \Psi^s = J \partial_{\mathbf{z}} f_i(\Psi^s)$$

infatti, poiché i flussi commutano, posso far agire  $\Psi_i^{s_i}$  per ultimo, e la sua derivata è proprio  $J \partial_{\mathbf{z}} f_i$  calcolato sul flusso.

Dunque per valori sufficientemente vicini a  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  è un sistema di coordinate locali per  $M_c$  intorno a  $\mathbf{x}$ , infatti i vettori  $J \partial_{\mathbf{z}} f_i$  sono una base per lo spazio tangente a  $M_c$  (per l'indipendenza delle  $f_i$ ).

Diamo alcune proprietà per  $\Psi^s$ .

**Rapporto con il flusso  $\Phi^t$  di hamiltoniana  $H$**  Vale

$$\Phi^t = \Psi^{t \partial_{\mathbf{f}} H}$$

Infatti, per l'integrabilità locale  $H$  è funzione delle sole  $f$ , dunque il vettore  $\partial_{\mathbf{f}} H$  dipende solo da  $\mathbf{f}$ , ed è dunque costante su  $M_c$ . Derivo in  $t$ . A sinistra ho

$$\partial_t \Phi^t(\mathbf{z}) = J \partial_{\mathbf{z}} H|_{\Phi^t(\mathbf{z})} = \sum_j \partial_{f_i} H J \partial_{f_j} \Big|_{\Phi^t(\mathbf{z})}$$

A destra ho

$$\partial_t \Psi^{t \partial_{\mathbf{f}} H}(\mathbf{z}) = \sum_j \partial_{f_i} H J \partial_{f_j} \Big|_{\Psi^{t \partial_{\mathbf{f}} H}(\mathbf{z})}$$

Dunque i due flussi verificano la stesso sistema di equazioni differenziali.

**Suriettività di  $\Psi^s(\mathbf{z}_0)$**  Sia  $\mathbf{z}(\lambda)$  una curva regolare che unisce  $\mathbf{z}_0$  a un punto  $\mathbf{z} \in M_c$ . Infatti, siano  $a_i(\lambda)$  tali che

$$\sum_i a_i(\lambda) J \partial_{\mathbf{z}} f_i(\mathbf{z}(\lambda)) = \partial_{\lambda} \mathbf{z}(\lambda)$$

(il vettore  $\mathbf{a}$  esiste perché  $\partial_{\lambda} \mathbf{z}(\lambda)$  è tangente a  $M_c$  in  $\mathbf{z}(\lambda)$  e i vettori  $\{J \partial_{\mathbf{z}} f_i(\mathbf{z}(\lambda))\}_{i=1}^n$  sono una base dello spazio tangente in  $\mathbf{z}(\lambda)$ ). Sia  $\mathbf{s}(\lambda)$  soluzione del sistema differenziale

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} \mathbf{s}(\lambda) &= \mathbf{a}(\lambda) \\ \mathbf{s}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\Psi^{\mathbf{s}(\lambda)} = \mathbf{z}(\lambda)$$

(lo si dimostri per esercizio, in modo analogo al punto precedente).

### Non iniettività di $\Psi^s(\mathbf{z}_0)$

Poiché  $M_c$  è compatta,  $\Psi^s(\mathbf{z}_0)$  non può essere iniettiva. Dunque esistono  $\mathbf{s}_1 \neq \mathbf{s}_2$  tali che  $\Psi^{\mathbf{s}_1}(\mathbf{z}_0) = \Psi^{\mathbf{s}_2}(\mathbf{z}_0)$ . Ma allora per la proprietà di flusso, se  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$

$$\Psi^{\mathbf{s}_0}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0$$

cioè esiste  $\mathbf{s}_0$  non nullo per cui  $\mathbf{z}_0$  è un punto fisso di  $\Psi^{\mathbf{s}_0}$ . Poiché per ogni  $\mathbf{z}$  esiste  $\mathbf{s}$  tale che  $\mathbf{z} = \Psi^s(\mathbf{z}_0)$ , ne segue che

$$\mathbf{z} = \Psi^s(\mathbf{z}_0) = \Psi^s(\Psi^{\mathbf{s}_0}(\mathbf{z}_0)) = \Psi^{\mathbf{s}_0}(\Psi^s(\mathbf{z}_0)) = \Psi^s(\mathbf{z})$$

Quindi è non vuoto l'insieme

$$G = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \Psi^s(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}\}$$

### $G$ è un sottogruppo discreto di $\mathbb{R}^n$

È facile verificare che  $G$  è un sottogruppo di  $\mathbb{R}^n$  rispetto alla somma vettoriale. Mostriamo che  $G$  è un sottogruppo discreto di  $\mathbb{R}^n$ , cioè esiste  $r > 0$  tale che se  $\mathbf{s} \in G$  e  $|\mathbf{s}| < r$  allora  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$  (da cui segue, per la proprietà di gruppo, che due punti di  $G$  diversi distano più di  $r$ ). Infatti, sia  $\mathbf{s}^k \rightarrow 0$ , con  $\mathbf{s}^k \in G$ . Poiché

$$\mathbf{z} = \Psi^{\mathbf{s}^k}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + \sum_i s_i^k J \partial_{\mathbf{z}} f_i(\mathbf{z}) + O(|\mathbf{s}^k|^2)$$

sia ha che

$$\sum_i \frac{s_i^k}{|\mathbf{s}^k|} J \partial_{\mathbf{z}} f_i = O(|\mathbf{s}^k|)$$

Per sottosequenze  $\mathbf{s}^k/|\mathbf{s}^k|$  converge a un versore  $\mathbf{v}$ , e dunque, passando al limite nell'espressione precedente, si ottiene una combinazione lineare nulla a coefficienti non nulli dei vettori  $J \partial_{\mathbf{z}} f_i(\mathbf{z})$ , in contraddizione con l'indipendenza.

### $G$ è generato da $n$ vettori indipendenti di $\mathbb{R}^n$

Poiché  $G$  è un sottogruppo discreto di  $\mathbb{R}^n$ , esistono  $m \leq n$  vettori linearmente indipendenti  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ , tali che

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^m k_i \mathbf{v}_i \mid k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

(non dimostro questo punto, facile ma un po' lungo, vedi Arnold). Siano inoltre  $\mathbf{v}_{m+1} \dots \mathbf{v}_n$  una base per l'ortogonale allo spazio generato da  $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_m$ . Considero ora l'applicazione lineare

$$(\vartheta_1 \dots \vartheta_n) \rightarrow \mathbf{s}(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \vartheta_i \mathbf{v}_i$$

Per costruzione

$$\Phi^{\mathbf{s}(\vartheta)}$$

è un diffeomorfismo tra  $S^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  e  $M_c$ , dove  $S$  è la circonferenza unitaria. Ma, poiché  $M_c$  è compatta,  $m = n$  e  $M_c$  è diffeomorfa al toro  $n$ -dimensionale.

Studiamo il moto di hamiltoniana  $H$  nelle variabili angolari  $\vartheta$  definite in termini di  $\mathbf{s}$ . Ho già provato che nelle variabili  $\mathbf{s}_i$  il moto avviene a velocità costante  $\partial_{f_i} H(\mathbf{f})$ . Poiché la relazione tra le variabili  $\mathbf{s}$  e le variabili  $\vartheta$  è lineare, anche nelle variabili  $\vartheta$  il moto avviene a velocità costante, cioè esistono  $\omega_i = \omega_i(\mathbf{f})$  tali che

$$\vartheta_i(t) = \vartheta_i(0) + t\omega_i$$

## 5.5 Moti quasi periodici

Consideriamo un moto quasi periodico sul toro  $S \times S \times \dots \times S = S^{\times n}$ , dato da

$$\vartheta(t) = \vartheta(0) + t\omega$$

Le frequenze  $\omega$  si dicono **razionalmente indipendenti** se, per ogni  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$  non nullo, (ogni componente di  $\mathbf{w}$  è un intero) allora

$$\omega \cdot \mathbf{w} \neq 0$$

Equivalentemente, se  $\omega \cdot \mathbf{w} = 0$  e  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$ , allora  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ . Si noti che queste definizioni non cambiano se si considerano combinazioni lineari a coefficienti razionali invece che interi.

Descriviamo le proprietà di questi moti, considerando prima il caso bidimensionale.

### Teorema 5.9. Moti quasi periodici su $S^{\times 2}$

*Il moto è periodico se e solo se le due "pulsazioni"  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono razionalmente dipendenti. In caso contrario, il moto è denso su  $S^{\times 2}$ .*

Se c'è almeno un  $\omega_i$  nullo, il moto è periodico e le frequenze sono banalmente razionalmente dipendenti. Siano dunque entrambe non nulle. Il moto nella variabile  $\vartheta_i$  è periodico di periodo  $T_i = 2\pi/\omega_i$ , dunque il moto è periodico se e solo se  $T_1$  e  $T_2$  hanno rapporto razionale. Ma questo è vero se e solo se le due pulsazioni sono razionalmente dipendenti. Se questo non accade, consideriamo due intersezioni successive della traiettoria con l'asse  $\vartheta_1 = 0$ . Il valore di  $\vartheta_2$  cambia di  $T_1\omega_2 = 2\pi\omega_2/\omega_1 = \alpha$  che è un numero che ha un rapporto irrazionale con  $2\pi$ . Il sistema dinamico discreto su  $S$  definito da  $\Psi^k\vartheta = \vartheta + k\alpha$  prende il nome di **anello di Jacobi**. Se  $\alpha$  ha rapporto razionale con  $2\pi$ , il sistema è periodico. In caso contrario, l'insieme  $\{\Psi^k(\vartheta)\}_{k \in \mathbb{N}}$  è denso. (**2018-2019: omettere la dimostrazione**) Infatti, tra gli  $m$  punti (distinti) che si ottengono per  $k = 1 \dots m$  ce ne sono almeno due che distano  $2\pi/m$ , siano essi  $\Psi^{k+h}(\vartheta)$  e  $\Psi^k(\vartheta)$  con  $h > 0$ . Ma allora  $\Psi^h(\vartheta)$  dista da  $\vartheta$  meno di  $2\pi/m$  e dunque iterando  $\Psi^h$  si ricopre  $S^1$  con punti che distano meno di  $2\pi/m$ . Per l'arbitrarietà di  $m$  segue la tesi.

Dalla densità del moto in  $\vartheta_2$  segue facilmente la densità del moto in  $S^2$ .

Consideriamo il caso  $n$  dimensionale.

### Teorema 5.10. Moto quasi periodico su $S^{\times n}$

- *Se le pulsazioni sono razionalmente indipendenti, la funzione  $t \rightarrow \vartheta(0) + t\omega$  è iniettiva e il moto è denso sul toro.*
- *Se invece le pulsazioni sono razionalmente dipendenti, sia  $m$  il massimo numero di pulsazioni razionalmente indipendenti. Allora il moto risulta denso su una sottovarietà diffeomorfa a un toro di dimensione  $m$ .*
- *In particolare, se  $m = 1$ , esiste  $\nu \in \mathbb{R}$  e esistono  $n$  interi  $k_i$  tali che  $\omega_i = k_i\nu$ ; in tal caso il moto è periodico e infatti ricopre un toro unidimensionale, cioè una varietà diffeomorfa a una circonferenza.*

La terza parte è banale, la seconda non la dimostro, per dimostrare la prima dimostro una proprietà più forte.

Si definisce **media spaziale** di una funzione  $f$  il valore

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{S^{2n}} f(\vartheta) d\vartheta$$

Si definisce **media temporale** il valore

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(\vartheta_0 + t\omega) dt$$

**Teorema 5.11. Ergodicità nel caso di pulsazioni razionalmente indipendenti** *Se le pulsazioni sono razionalmente indipendenti, allora il moto è ergodico, cioè per ogni  $f$  integrabile secondo Riemann la sua media spaziale coincide con la media temporale.*

Per il “significato” di questo teorema e la dimostrazione (fatte comunque a lezione) leggete sull’Arnold paragrafo 51, o le dispense di Buttà-Negrini, o le “dispense II” di Caglioti.

Da questo teorema segue facilmente la densità del moto: se così non fosse, esisterebbe in punto del toro con un suo intorno  $A$  che ha intersezione nulla con la traiettoria. Poiché  $A$  è un insieme misurabile secondo Riemann (infatti  $\chi\{\vartheta \in A\}$  è una funzione integrabile secondo Riemann) allora  $|A|/(2\pi)^n$  deve essere pari alla media temporale. Ma per ipotesi la traiettoria non passa mai da  $A$ , dunque la media temporale è nulla, da cui la contraddizione che dimostra il teorema.

## 5.6 Variabili azione-angolo

Nella dimostrazione del teorema di Arnold abbiamo prima considerato come coordinate locali su  $M_{\mathbf{c}}$  i “tempi”  $s_i$  di evoluzione per i flussi di hamiltoniane  $f_i$ , e poi abbiamo dimostrato che esiste un sistema di coordinate angolari  $\vartheta_i$ , che si ottiene mediante una trasformazione lineare degli  $s_i$ , che è biettivo da  $S^{2n}$  in  $M_{\mathbf{c}}$ . In entrambe queste costruzioni abbiamo considerato fissi i valori degli integrali primi. Ora mostreremo che questi cambiamenti di coordinate si estendono a trasformazioni canoniche.

**Teorema 5.12.** *Le coordinate coniugate agli integrali primi  $f_i$  sono i tempi  $s_i$ , ovvero*

$$\mathbf{s} = \partial_{\mathbf{f}} W(\mathbf{q}, \mathbf{f})$$

(2018-2019: omettere la dimostrazione).

Do prima una prova locale. Supponiamo che intorno a  $\mathbf{z}_0$  il minore  $\partial_{\mathbf{p}} \mathbf{f}$  abbia determinante non nullo. Mostro per prima cosa che le variabili  $\mathbf{s}$  sono ben definite, anche al variare di  $\mathbf{f}$ . Sia  $\mathbf{p}_0(\mathbf{q}_0, \mathbf{f})$  il valore di  $\mathbf{p}$  tale che  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in M_{\mathbf{f}}$  (che esiste per piccole variazioni di  $\mathbf{f}$ ). Considero il sistema di coordinate locali  $\mathbf{s}$  che va da un intorno di  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  a valori in  $M_{\mathbf{f}}$  definite da

$$\Psi^{\mathbf{s}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0(\mathbf{q}_0, \mathbf{f}))$$

dove  $\Psi^{\mathbf{s}}$  è la composizione dei flussi generati dalle hamiltoniane  $f_i$ .

Sia  $W(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{q}$  la funzione generatrice che si utilizza nel teorema di integrabilità locale. Le nuove coordinate sono

$$\partial_{\mathbf{f}} W(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{f}} \mathbf{p}^t d\mathbf{q}$$

Ora cambio variabile nell'integrale da  $d\mathbf{q}$  alle variabili  $ds$ , con le notazione

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^s \\ \mathbf{P}^s \end{pmatrix} = \Psi^s(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0(\mathbf{q}_0, \mathbf{f}))$$

Per definizione di  $\Psi^s$

$$\partial_s \mathbf{Q}^s = \partial_{\mathbf{f}} \mathbf{P}^t$$

e dunque

$$d\mathbf{q} = \partial_{\mathbf{f}} \mathbf{P}^t ds$$

Ma allora, poiché  $\partial_{\mathbf{f}} \mathbf{p}$  e  $\partial_{\mathbf{p}} \mathbf{f}$  sono una l'inversa dell'altra, si ottiene

$$\partial_{\mathbf{f}} W(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = \int_0^{s(\mathbf{q}, \mathbf{f})} ds = s(\mathbf{q}, \mathbf{f})$$

Dunque  $(\mathbf{s}, \mathbf{f})$  sono coordinate canoniche coniugate intorno a un punto per cui  $\partial_{\mathbf{p}} \mathbf{f}$  è non singolare. D'altra parte, come notato nel paragrafo precedente, si possono prima trasformare semplicemente  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  in modo che questa condizione sia soddisfatta, e poi ripetere la costruzione. Le variabili di arrivo saranno sempre  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{s}$  (con i tempi  $\mathbf{s}$  traslati opportunamente), perché la loro definizione dipende solo da  $M_{\mathbf{f}}$  e dal punto di partenza, che non cambia (lascio i dettagli al lettore).

Le coordinate  $(\mathbf{s}, \mathbf{f})$  non sono però globalmente definibili, perché le  $\mathbf{s}$  non sono iniettive. D'altra parte le variabili  $\vartheta$  sono iniettive, se limitate alla loro periodicità. Ci si chiede dunque se esitano delle variabili canoniche con  $\vartheta$  come nuove coordinate. La risposta è sì ed è sufficiente ridefinire gli integrali primi.

Si faccia variare  $\vartheta_i$  tra 0 e  $2\pi$ , tenendo fissi i valori delle altre variabili  $\vartheta_j$ . In questo modo si descrive una curva  $\gamma_i$  sul  $M_{\mathbf{f}}$  che non è omotopa al punto.

### **Teorema 5.13. Variabili azione-angolo**

*Siano*

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$$

*le azioni.*

*I valori di  $I_i$  dipendono solo da  $\mathbf{f}$ , e non dalle  $\vartheta_j$ . Inoltre  $\partial_{\mathbf{f}} \mathbf{I}$  è non singolare. Le coordinate  $(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{I})$  sono ben definite in un intorno di  $M_{\mathbf{f}}$  e sono canoniche.*

**(2018-2019: omettere la dimostrazione).**

Abbiamo dimostrato che la forma  $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$  è chiusa su  $M_{\mathbf{f}}$  intorno ai punti per cui  $\det \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{f} \neq 0$ . D'altra parte dove questa condizione non è soddisfatta, si cambiano semplicemente variabili in modo che  $\tilde{\mathbf{p}} \cdot d\tilde{\mathbf{q}}$  è chiusa. Ma poiché la trasformazione è симплетica e lineare, la differenza tra queste due forme è esatta, dunque  $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$  è chiusa ovunque su  $M_{\mathbf{c}}$  (sull'Arnold c'è una dimostrazione più geometrica e interessante.) Come conseguenza, qualunque deformazione continua della curva  $\gamma_i$  non modifica il valore di  $I_i$ . Dunque le  $I_i$  sono ben definite, e funzioni delle  $\mathbf{f}$ .

La relazione trovata nella prova del teorema di Arnold tra  $\boldsymbol{\vartheta}$  e  $\mathbf{s}$  è data da

$$(\vartheta_1 \dots \vartheta_n) \rightarrow \mathbf{s}(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \vartheta_i \mathbf{v}_i$$

dove i  $\mathbf{v}_i$  sono  $n$  vettori linearmente indipendenti. Per calcolare la derivata di  $I_i$  rispetto a  $\mathbf{f}$ , mi serve il seguente lemma geometrico.

**Lemma 5.1. Teorema di Liouville**

Sia  $\gamma$  una curva chiusa regolare nel piano  $xy$ . Sia  $\gamma_\varepsilon$  la curva che si ottiene spostando i punti  $(x, y) \in \gamma$  di  $\varepsilon(u(x, y), v(x, y))$ . Allora

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{\gamma_\varepsilon} y \, dx = \int_{\gamma} (v \, dx - u \, dy)$$

Si noti che, scelto l'orientamento orario, il primo membro è la derivata dell'area racchiusa da  $\gamma$ , il secondo membro è il flusso uscente da  $\gamma$  del vettore  $(u, v)$ .

Questo lemma è conseguenza del teorema di Liouville, che dice che

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon} |\Phi^\varepsilon(A)| = \int_A \operatorname{div} \mathbf{u}$$

dove  $A$  è un dominio misurabile e  $\Phi^\varepsilon$  il flusso generato dal campo  $\mathbf{u}$ . Usando il teorema della divergenza si ottiene che il secondo membro è il flusso uscente di  $\mathbf{u}$  da  $\partial A$ . Si ottiene la tesi applicando questo teorema al caso bidimensionale.

Comunque se ne può dare una dimostrazione “alla fisica” più semplice: basta notare che un tratto di curva  $d\lambda$ , dove  $\lambda$  è l'ascissa curvilinea, trasportata da  $\varepsilon \mathbf{u}$  genera un'area  $\varepsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\lambda$ , dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale uscente.

Torno alla dimostrazione del teorema. Poichè  $\int_{\gamma_i} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$  è la somma delle aree orientate della proiezione di  $\gamma_i$  sui piani coordinati, basta calcolare le variazioni di queste aree dovute a variazioni di  $\mathbf{f}$ . Fisso la curva  $\gamma_i$  come sopra (facendo muovere  $\vartheta_i$  da 0 a  $2\pi$ ), I suoi punti  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  si posso anche descrivere nelle coordinate  $(\alpha, \mathbf{f})$ . Considero la variazione di  $q_j$  e  $p_j$  nella variabile  $f_h$ . Usando il lemma, notando che

$$\int_{\gamma_i} p_j \, dq_j = \int_{\mathcal{P}_j \gamma_i} p_j \, dq_j$$

dove indico con  $\mathcal{P}_j \gamma_i$  la proiezione di  $\gamma_i$  sul piano  $(q_j, p_j)$ , si ha

$$\partial_{f_h} \int_{\mathcal{P}_j \gamma_i} p_j \, dq_j = \int_{\mathcal{P}_j \gamma_i} \partial_{f_h} p_j \, dq_j - \partial_{f_h} q_j \, dp_j$$

Dunque

$$\partial_{f_h} \int_{\gamma_i} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \int_{\gamma_i} \partial_{f_h} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \partial_{f_h} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p}$$

Ora integro in  $d\vartheta_i$ , ricordando che

$$dq = \partial_{\mathbf{f}} \mathbf{p}^t \, ds, \quad dp = -\partial_{\mathbf{f}} \mathbf{q}^t \, ds, \quad ds = \frac{1}{2\pi} \mathbf{v}_i \, d\vartheta_i$$

Sostituendo, si ottiene che l'integrando è

$$\frac{1}{2\pi} \partial_{f_h} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i \, d\vartheta_i$$

e dunque

$$\partial_{\mathbf{f}} I_i = \frac{1}{2\pi} \mathbf{v}_i$$

(un  $2\pi$  si cancella con l'integrale, mentre ne rimane uno al denominatore per la definizione di  $I_i$ ).

Poiché i vettori  $\mathbf{v}_i$  sono linearmente indipendenti, il cambiamento di variabili tra  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{f}$  è biiettivo. Usando questa relazione tra le derivate di  $\mathbf{I}$  rispetto a  $\mathbf{f}$  e i vettori  $\mathbf{v}_i$ , è facile dimostrare che

$$\Psi^{\mathbf{s}(\vartheta)}$$

è la composizione dai flussi generati dalle hamiltoniane  $I_i$ . Quindi, utilizzando il primo teorema di questo paragrafo, si ottiene che le variabili coniugate alle azioni  $I_i$  sono proprio gli angoli  $\vartheta_i$ . PS c'è qualche  $2\pi$  di troppo.

**Esercizio 4. Variabili azione-angolo per i moti unidimensionali**

Sia  $H = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$ , con  $V(q)$  strettamente convessa e divergente a  $\pm\infty$ . Sia  $E$  l'energia, sia  $\gamma$  la curva nello spazio delle fasi data dall'equazione  $H = E$ . Si mostri che

$$\int_{\gamma} p dq = A(E) = \text{Area racchiusa da } \gamma$$

La funzione  $A(E)$  è crescente in  $E$ , dunque invertibile, e  $I(E) = A(E)/(2\pi)$ . Dunque

$$H(I) = A^{-1}(2\pi I)$$

Dunque

$$\omega(I) = \partial_I H(I) = 2\pi/A'(E)$$

e quindi se  $T(E) = 2\pi/\omega$  è il periodo del moto di energia  $E$ ,

$$T(E) = \partial_E A(E)$$

**Esercizio 5. Variabili azione-angolo per l'oscillatore armonico**

Sia  $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}q^2$  l'hamiltoniana di un oscillatore armonico. Si determinino le variabili azione-angolo, ricordando che l'area di una ellisse di semiassi  $a$  e  $b$  è  $\pi ab$ .

## 6 Il teorema del ritorno di Poincaré

Tra le principali conseguenze della conservazione della misura per il flusso di fase c'è il teorema del ritorno di Poincaré, che afferma che per un flusso a un parametro che conserva la misura, definito su una regione limitata, "quasi ogni" traiettoria ritorna arbitrariamente vicina al suo dato iniziale.

**Teorema 6.1. teorema del ritorno I.**

Sia  $\Phi$  un omeomorfismo che conserva la misura, definito da  $\Omega$ , dominio limitato, in sé. Sia  $A$  un sottoinsieme misurabile di  $\Omega$ , allora, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste  $n \geq k$  tale che

$$A \cap \Phi^n(A) \neq \emptyset$$

(inoltre questa intersezione ha misura non nulla). In particolare, esiste  $\mathbf{x} \in A$  tale che  $\Phi^n(\mathbf{x}) \in A$ .

**Dimostrazione.** Definisco  $\Psi = \Phi^k$ . Anche  $\Psi$  è un omeomorfismo e conserva la misura di  $A$ . Considero la sequenza di sottoinsiemi  $\{\Psi^h(A)\}_{h \geq 0}$ . Se le loro intersezioni avessero tutte misura nulla, si avrebbe

$$|\Omega| \geq \left| \bigcup_h \Psi^h(A) \right| = \sum_h |\Psi^h(A)| = \sum_h |A| = +\infty$$

che è assurdo poiché  $\Omega$  è limitato. Dunque esiste  $h \geq 0$  ed esiste  $m \geq 1$  tali che

$$\Psi^h(A) \cap \Psi^{h+m}(A) \neq \emptyset$$

Poiché  $\Psi$  è un omeomorfismo, ne segue che

$$A \cap \Psi^m(A) \neq \emptyset$$

In termini di  $\Phi$ , questa relazione si legge

$$A \cap \Phi^{mk} \neq \emptyset$$

Scegliendo  $n = mk \geq k$  si ottiene la tesi.

Un corollario di questo teorema è il seguente. Sia  $\varepsilon > 0$ ; dirò che  $\mathbf{x}$  è un punto che  $\varepsilon$ -**ritorna** se per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , esiste  $n > k$  tale che  $|\Phi^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \varepsilon$ .

**Teorema 6.2. teorema del ritorno II**

*L'insieme dei punti che non  $\varepsilon$ -ritornano ha misura nulla.*

Dimostrazione. Sia  $N_\varepsilon$  l'insieme dei punti che non  $\varepsilon$ -ritornano, cioè

$$N_\varepsilon = \{\mathbf{x} \mid |\Phi^k(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| \geq \varepsilon \text{ definitivamente in } k\} = \bigcup_{k \geq 1} N_\varepsilon^k$$

dove

$$N_\varepsilon^k = \{\mathbf{x} \mid \forall n \geq k \mid \Phi^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| \geq \varepsilon\} = \bigcap_{n \geq k} \tilde{N}_\varepsilon^n$$

con

$$\tilde{N}_\varepsilon^n = \{\mathbf{x} \mid |\Phi^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| \geq \varepsilon\}$$

$\tilde{N}_\varepsilon^n$  è un chiuso, dunque è misurabile e dunque sono misurabili anche  $N_\varepsilon^k$  e  $N_\varepsilon$ .

Dimostro che  $N_\varepsilon^k$  ha misura nulla. Poiché  $\Omega$  è limitato, è possibile ricoprirlo con un numero finito di palle  $B_1, B_2, \dots$  di raggio  $\varepsilon/2$  (se  $\Omega$  è illimitato, esiste un ricoprimento numerabile ma localmente finito, e il teorema vale lo stesso). Sia  $A = B_i \cap N_\varepsilon^k$ , e sia  $\Psi = \Phi^k$ . Per definizione, per ogni  $h \geq 1$

$$\Psi^h(A) \cap A = \emptyset$$

Infatti, se l'intersezione fosse non vuota, esisterebbero  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  tali che  $x = \Psi^h(\mathbf{y}) = \Phi^{hk}(\mathbf{y})$ , dunque

$$|\mathbf{y} - \Psi^{hk}(\mathbf{y})| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon$$

perchè  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A \subset B_i$ , ma questo è impossibile perchè  $\mathbf{y} \in A \subset N_\varepsilon^k$ .

Ne segue che  $B_i \cap N_\varepsilon^k$  deve avere misura nulla, poiché

$$|\Omega| \geq \sum_h |\Psi^h(A)| = \sum_h |B_i \cap N_\varepsilon^k|$$

Usando la  $\sigma$ -subadditività della misura di Lebesgue

$$N_\varepsilon^k = \bigcup_i B_i \cap N_\varepsilon^k \Rightarrow |N_\varepsilon^k| \leq \sum_i |B_i \cap N_\varepsilon^k| = 0$$

Di nuovo usando la  $\sigma$ -subadditività

$$N_\varepsilon = \bigcup_k N_\varepsilon^k \Rightarrow |N_\varepsilon| \leq \sum_k |N_\varepsilon^k| = 0$$

Infine, si può provare la seguente affermazione più forte. Dirò che  $x \in \Omega$  **ritorna** se,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geq k \text{ tale che } |\Phi^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \varepsilon$$

Detto in parole,  $x$  ritorna se  $\varepsilon$ -ritorna per ogni  $\varepsilon$ , ovvero se la triettoria che parte da  $x$  torna infinite volte arbitrariamente vicino a  $x$ .

### **Teorema 6.3. teorema del ritorno II**

*L'insieme dei punti che non ritornano ha misura nulla.*

Se il punto  $x$  ritorna, allora  $1/n$ -ritorna per ogni  $n \in \mathbb{N}$  positivo. Dunque l'insieme dei punti che ritornano è l'intersezione per  $n \geq 1$  degli insiemi dei punti che  $1/n$ -ritornano. Il complementare è l'insieme dei punti che non ritornano, ed è dunque l'unione per  $n \geq 1$  dell'insieme dei punti che non  $1/n$ -ritornano. Poiché questi insiemi hanno misura nulla, la loro unione numerabile ha misura nulla.

Per commenti sui paradossi del teorema del ritorno vedi le dispense di Buttà–Negrini. È da notare, comunque, che lo studio delle proprietà a tempi lunghi dei sistemi conservativi (hamiltoniani) sono l'inizio dello studio che porta alla descrizione dei sistemi mediante la Meccanica Statistica (parola chiave **ipotesi ergodica**), ma non dirò nulla in merito.