

# Canale Basile - Programma minimo

24 maggio 2019

Programma minimo. Rispetto al programma completo mancano alcuni interi argomenti, e di alcuni argomenti più complessi viene richiesta la conoscenza dei risultati, senza le dimostrazioni.

## Indice

Equazioni della fisica-matematica . . . . .	2
Spazi di Hilbert . . . . .	3
Problemi di Sturm-Liouville . . . . .	4
Operatori lineari . . . . .	5
Operatori compatti . . . . .	6
Teoria del potenziale . . . . .	7

## Equazioni della fisica-fatematica

- 1 Derivazione dell'equazione del calore.
- 2 Condizioni al contorno per l'equazione del calore.
- 3 Unicità con il metodo dell'energia.
- 4 Principio del massimo parabolico locale - solo enunciato
- 5 Unicità e stabilità - solo enunciato
- 6 La soluzione fondamentale.
- 7 Convergenza al dato iniziale - solo enunciato
- 8 Metodo di Fourier.
- 9 La funzione di Green per il problema di Poisson.
- 10 Identità di Green
- 11 Funzioni armoniche.
- 12 Primo e secondo teorema della media
- 14 Principio del massimo
- 15 Unicità e stabilità per il problema di Laplace-Dirichlet.
- 16
- 17 Funzioni di Green nei domini, metodo della carica immagine.

## Spazi di Hilbert [ifm18, cap. 2]

- 1 Spazi di Hilbert reali e complessi. Esempi  $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ , con  $\Omega$  dominio di  $\mathbb{R}^n$ ,  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ,  $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ . Spazi  $L^2$  con pesi - [ifm18] 2.1
- 2 Sottospazi lineari chiusi e non. Ortogonale di un sottospazio.
- 3 Identità del parallelogramma e Teorema della proiezione in spazi di Hilber complessi.
- 4 Sistemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel; spazi separabili e sistemi ortonormali completi (basi), Identità di Parseval. Basi in spazi prodotto (enunciato).
- 5 Ortogonalizzazione di Gramm-Schmidt, esistenza di basi in spazi separabili.
- 6 Base di Fourier.
- 7
- 8

**Problemi di Sturm-Liouville [ifm18 cap. 1, 3, 4, 5]**

1 Polinomi di Legendre

2

3

4 Polinomi di Hermite

5

6

7

## Operatori lineari [ifm18 cap 6, 7, 8]

- 1 Operatori limitati e norma di un operatore, continuità e limitatezza. Estensione di operatori limitati definiti su sottospazi densi. Decomposizione di  $H$  attraverso immagine e nucleo. Esempi: isometrie e proiettori e loro norme. Isometria con  $\ell_2$  degli spazi di Hilbert separabili.
- 2
- 3
- 4
- 5 Il duale di uno spazio di Hilbert e il teorema di rappresentazione di Riesz.
- 6 Operatore aggiunto e sue proprietà.
- 7 Operatori di moltiplicazione - condizioni di limitatezza
- 8 Operatori di integrali - condizioni di limitatezza
- 9 Operatori di convoluzione - condizioni di limitatezza
- 10 L'operatore di shift in  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ , il suo aggiunto, immagine e nucleo.

## Operatori compatti [ifm 18, cap. 9, 10, 14]

- 1 Operatori di rango finito. Teorema dell'alternativa per operatori di rango finito.
- 2 Serie di Neumann e teoremi dell'alternativa per perturbazioni piccole di operatori di rango finito.
- 3 Esempi di precompatti in spazi di Hilbert. Convergenza debole di successioni, esempi e proprietà. Precompattanza debole dei limitati in  $H$  separabile (enunciati).
- 4 Convergenza debole e forte di operatori.
- 5 Operatori compatti.
- 6 Teorema dell'alternativa per operatori compatti
- 7 Risolvente e spettro per operatori.
- 8 Proprietà del risolvente.
- 9 Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti.

## Potenziali di volume, singolo e doppio strato [ifm18 cap. 12]

- 1 Funzione di Green per il problema di Poisson, potenziale di volume. Regolarità  $C^1$
- 2 Regolarità  $C^{2+\alpha}$  - solo enunciato
- 3 Andamento asintotico. Campo di dipolo.
- 4 Definizione dei potenziali di singolo e doppio strato. La terza identità di Green per funzioni regolari e il Lemma di Gauss
- 5 Discontinuità del potenziale di doppio strato e continuità della sua derivata normale, discontinuità della derivata normale del potenziale di singolo strato, nel caso di densità regolari.
- 6 Proprietà del potenziale di doppio strato come operatore: limitatezza in  $L^\infty$  e in  $L^2$ , compattezza.
- 7 Risultati di regolarità nel caso di densità meno regolari: solo enunciato.
- 8
- 9
- 10 Risoluzione del problema di Laplace-Dirichlet nel caso generale.
- 11 Risoluzione del problema di Laplace-Neumann interno.
- 12 Distribuzione delle cariche su un conduttore.
- 13 Introduzione ai problemi di Poisson-Dirichlet e Poisson-Neumann.