Equazione del calore

1. Determinare la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo per la sbarra limitata

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (0,L), \\ u(0,x) = \sin\big(3\pi x/L\big) - 2\sin\big(\pi x/L\big), \quad x \in [0,L], \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

   Discutere la regolarità della soluzione.

2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo per la sbarra limitata

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (0,L), \\ u(0,x) = x\sin(\pi x/L), \quad x \in [0,L], \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

   Discutere la regolarità della soluzione.

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy-Neumann omogeneo per la sbarra limitata

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (0,1), \\ u(0,x) = \cos^2(\pi x), \quad x \in [0,1], \\ \partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,1) = 0 \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

4. Determinare la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet per la sbarra limitata con gli estremi a temperatura fissata

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (0,L), \\ u(0,x) = g(x), \quad x \in [0,L], \\ u(t,0) = T_1,\ u(t,L) = T_2 \quad \forall t \geq 0, \end{cases}$$

   dove g è una funzione continua, limitata e tale che $g(0) = T_1$, $g(L) = T_2$. Determinare l'andamento della soluzione per $t \to +\infty$. (Suggerimento: porre $u = \bar{u} + \tilde{u}$, dove $\bar{u}$ é la soluzione stazionaria $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u} = 0$ con dati al bordo $\bar{u}(0) = T_1$, $\bar{u}(L) = T_2$).

5. Determinare la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo per la sbarra limitata

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (0,1), \\ u(0,x) = \sin(\pi x/2), \quad x \in [0,1], \\ u(t,0) = 0,\ u(t,1) = 1 \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

   Discutere la regolarità della soluzione.

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet per la sbarra limitata

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u + t\sin(\pi x/L), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (0,L), \\ u(0,x) = 0, \quad x \in [0,L], \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Discutere la regolarità della soluzione. (Suggerimento: scrivere la forzante $f(t,x) = t\sin(\pi x)$ come serie $f(t,x) = \sum_{n\geq 1} a(t)v_n(x)$, con $\{v_n\}$ autofunzioni dell'operatore derivata seconda con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee e cercare una soluzione della forma $u(t,x) = \sum_{n\geq 1} \theta(t)v_n(x)$)

7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy per la sbarra limitata ad un estremo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = D\frac{\partial^2}{\partial x^2} u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (-\infty,0), \\ u(0,x) = g(x), \quad x \in (-\infty,L], \\ u(t,0) = 0 \quad \forall t \geq 0, \end{cases}$$

dove g è una funzione continua, limitata e tale che $g(0) = 0$. (Suggerimento: prolungare il dato iniziale per disparità su tutto $\mathbb{R}$ e risolvere il problema globale).