# IFM - foglio esercizi 09 - 16 aprile 2019

Questo foglio di esercizi riguarda le equazioni integrali a nucleo separabile.

### Esercizio 1. Equazioni integrali

Risolvi le seguenti equazioni integrali con nucleo separabile con $f \in L^2([0, 2\pi]; \mathbb{R})$

$$f(x) - \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y)\, \mathrm{d}y = \sin x$$

$$\pi f(x) - \int_0^{2\pi} \cos(x+y) f(y)\, \mathrm{d}y = \cos x$$

$$\pi f(x) - \int_0^{2\pi} \cos(x+y) f(y)\, \mathrm{d}y = \sin x$$

### Esercizio 2. Equazioni integrali

Risolvi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la seguente equazione integrale con nucleo separabile con $f, g \in L^2([0, \pi], \mathbb{C})$.

$$f(x) - \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-y)} f(y)\, \mathrm{d}y = g(x)$$

### Esercizio 3.

Trova, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, le soluzioni non banali dell'equazione

$$f(x) - \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y (x+y) f(y) = 0$$

con $f \in L^2([-1, 1])$.

### Esercizio 4.

Sia $T$ l'operatore continuo da $L^2[-1, 1]$ in sé definito da

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^{1} (1 + x^2 y^2) f(y)\, \mathrm{d}y$$

**1)** mostra che $T$ è autoaggiunto e compatto;

**2)** trova le autofunzioni di $T$

**3)** trova, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la soluzione di

$$Tf(x) - \lambda f(x) = 1 + x$$

### Esercizio 5.

Sia $T$ l'operatore continuo da $L^2[-1, 1]$ in sé definito da

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(y)\, \mathrm{d}y + \frac{3x}{2} \int_{-1}^{1} y f(y)\, \mathrm{d}y$$

**a.** mostra che è autoaggiunto

**b.** mostra che è compatto

**c.** discuti l'invertibilità di $\mathbf{I} - \lambda T$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

**d.** mostra che $T$ è un proiettore e caratterizza il sottospazio $V$ su cui proietta

**e.** sia $T^\perp$ il proiettore su $V^\perp$; $T^\perp$ è compatto?

**f.** discuti l'invertibilità di $\mathbf{I} - \lambda T^\perp$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

**g.** sia $g(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}x)$, di norma 1, e sia $S$ il proiettore sulla retta per $g$; per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'operatore $T + \alpha S$ è un proiettore?