IFM - foglio esercizi 08 - 16 aprile 2019

Questo foglio di esercizi riguarda gli operatori.

Esercizio 1. Operatori integrali

Per quali $\alpha > 0$ l'operatore

$$K_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha + |y|^\alpha + 1} f(y)\,\mathrm{d}y$$

ha nucleo in $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$?
Per quali α l'operatore K_α è limitato?

Esercizio 2. •

Considera il funzionale lineare

$$Lf = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Poiché $1/\sqrt{x}$ non è il L^2, questo funzionale non è continuo, anche se è definibile su un sottoinsieme denso.

- Prova che è ben definito sulle funzioni a supporto compatto in $(\varepsilon, 1]$, con $\varepsilon > 0$:
- Prova che è ben definito sulle funzioni limitate.
- Prova che è illimitato, considerando la seccesione di funzioni $f_\delta(x) = \mathcal{X}\{x \in (\delta, 1)\}/\sqrt{x}$; mostra cioè che nel limite $\delta \to 0$
$$|Lf_\delta|/\|f_\delta\| \to +\infty$$
- Considera l'operatore lineare definito da
$$Tf(x) = \int_0^1 \frac{|x-y|}{y^\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y$$
Mostra che è illimitato se $\alpha \geq 1/2$

Esercizio 3.

Dato $\alpha > 0$, sia M_α il funzionale moltiplicativo in $L^2(\mathbb{R})$ definito da

$$M_\alpha f(x) = \frac{1}{1+\alpha x^2} f(x)$$

- Mostra che M_α e autoaggiunto e calcola la sua norma
- Mostra che M_α tende fortemente all'operatore identità. Suggerimento: l'operatore $R_\alpha = \mathbf{I} - M_\alpha$ è dato da
$$R_\alpha f(x) = \frac{\alpha x^2}{1+\alpha x^2} f(x)$$
dunque
$$\|R_\alpha f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\alpha x^2}{1+\alpha x^2}\right)^2 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$
L'integrando tende puntualmente a zero, dunque è sufficiente una convergenza dominata per ottenere la tesi...

- Mostra che $\|R_\alpha\|$ non tende a 0.
- Sia T_α l'operatore dato da

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \frac{1}{1+\alpha y^2} f(y)$$

  Mostra che T_α tende fortemente a T_0. Suggerimento: T_α è la composizione di un operatore di convoluzione limitato e dell'operatore M_α.
- Mostra che T_α non tende in norma a T_0. Suggerimento: la norma dell'operatore R_α è 1, $\|R_\alpha f\|/\|f\|$ è circa 1 se f si concentra in un punto che tende a infinito, per esempio $f_\delta = \mathcal{X}\{x \in (1/\delta, 1/\delta + \delta)\}/\sqrt{\delta}$

Esercizio 4.
Sia T_α su $L^2(\mathbb{R})$ definito da

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+(x-y-\alpha)^2} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Mostrare che è continuo, e che tende debole a 0 per $\alpha \to +\infty$, ma che non tende forte a 0.

Esercizio 5.
Discuti al variare di $\alpha > 0$ la continuità e la compattezza dell'operatore integrale

$$T_1 f(x) = \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{|y|}{|x-y|^\alpha} f(y)$$

da $L^2([0,1]$ in sé.
Discuti al variare di $\alpha > 0$ la continuità e la compattezza dell'operatore integrale

$$T_2 f(x) = \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{|x-y|}{y^\alpha} f(y)$$

da $L^2([0,1]$ in sé.

Esercizio 6.
Considera la seguente famiglia di operatori in $L^2(\mathbb{R})$:

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha y^2}}{1+|x-y|^4} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Discutine limitatezza e compattezza al variare di $\alpha \in [0,+\infty)$. Discuti in quale senso A_α converge a A_0

Considera la famiglia di operatori

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}}{1+|x-y|^4} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Discutine limitatezza e compattezza al variare di $\alpha \in [0,+\infty)$.

(riadattamento di esercizio preso dalle dispense di Pulvirenti)

Esercizio 7.

Considera $g \in L^2(\mathbb{R})$ e considera la successione

$$g_n(x) = n^\alpha g(nx)$$

Discuti il suo limite per $n \to +\infty$ al variare di α.

Considera la successione di operatori $T_n \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ definiti da

$$T_n g(x) = n^\alpha g(nx)$$

Discuti la convergenza di T_n.

(riadattamento di esercizio preso dalle dispense di Pulvirenti)

Esercizio 8.

Considera le due successioni di operatori integrali in $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R})$

$$A_n f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-n(x-y)^2} f(y)\, \mathrm{d}y$$

$$B_n f(x) = \log n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+n(x-y)^2} f(y)\, \mathrm{d}y$$

Mostra che sono tutti operatori continui e discuti il loro limite per $n \to +\infty$.

(riadattamento di esercizio preso dalle dispense di Pulvirenti)